应用数学和力学，第18卷 第2期（1997年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一个具有动态条件的Verigin问题

徐龙封[1]

（林宗池推荐，1995年2月22日收到，1996年10月3日收到修改稿）

摘　要

本文考虑了一个具有动态条件的Verigin问题，得到了这个问题关于时间的局部古典解的存在唯一性。

关键词　动态条件　Verigin问题　古典解

一、引　言

设$\widetilde{\Omega}$是$\boldsymbol{R}^3$中一个有界区域，$D\subset\widetilde{\Omega}$是一个供油区域，$\widetilde{\Omega}\backslash D\equiv\Omega\doteq\Omega_1(t)\cup\Omega_2(t)\cup\Gamma_t$，水和油分别占据$\Omega_1(t)$和$\Omega_2(t)$，而$\Gamma_t$是分离水油的自由边界，$\Gamma_t$的初始位置为$\Gamma^0$，$\partial D=\Gamma^2$，$\partial\Omega=\Gamma^1\cup\Gamma^2$，$\partial\Omega_i(t)=\Gamma^i\cup\Gamma_t$，$i=1,\ 2$．设水和油不混合只作活塞式推动．用$p_1$，$p_2$分别表示水和油的压强，$\mu_1$，$\mu_2$分别表示水和油的粘性，$\nu$表示$\Gamma_t$的单位法向量，正向为$\Omega_1(t)$朝$\Omega_2(t)$，由守恒律和Darcy定律，

$$\frac{\partial p_i}{\partial t}-\nabla\left(\frac{k}{\mu_i}\nabla p_i\right)=0,\qquad 在\bigcup_{t>0}\Omega_i(t)内，\ i=1,\ 2 \tag{1.1}$$

$$p_1-p_2=0,\qquad 在\bigcup_{t\geq 0}\Gamma_t上 \tag{1.2}$$

$$-\frac{k}{\mu_i}\frac{\partial p_i}{\partial\nu}=\phi V,\qquad 在\bigcup_{t\geq 0}\Gamma_t上，\ i=1,\ 2 \tag{1.3}$$

其中k，ϕ都是正的常数，V是Γ_t的法向移动速度．上面描述中略去了毛细现象的作用，如果考虑毛细现象的影响，应用Gibbs-Thomson关系进行修正，则(1.2)应为

$$p_1-p_2=\alpha\kappa+\beta V \tag{1.4}$$

其中α，β都是非负常数，κ是Γ_t的曲率．由于Verigin在1957年首先提出了对这类模型的研究，所以我们称这类模型为Verigin问题．对一维情况，已有不少结果，对多维情况，目前结果还不多．最近苏州大学陶有山博士研究了多维$\beta=0$情形，得到了局部古典解的存在性，本文致力于研究$\alpha=0$情况．不失一般性，我们设$\phi=\beta=1$，$k/\mu_1=1$，$k/\mu_2=\alpha^2>1$，我们的问题是要确定两个函数$u^1(x,\ t)$，$u^2(x,\ t)$和一族自由边界曲面Γ_t满足

$$\partial u^i/\partial t-\Delta u^i=0,\quad 在Q_i\equiv\bigcup_{0<t<T}\Omega_i(t)内，\ i=1,\ 2 \tag{1.5}$$

$$u^1-u^2=V,\qquad 在\Gamma\equiv\bigcup_{0\leq t\leq T}\Gamma_t上 \tag{1.6}$$

1 铜陵财经专科学校，安徽铜陵 244000

$$-\partial u^1/\partial\nu=-\alpha^2\partial u^2/\partial\nu=V \qquad 在\Gamma上 \tag{1.7}$$

$$u^i=h^i, \qquad 在\Gamma^i\times[0,\ T]上,\ i=1,\ 2 \tag{1.8}$$

$$u^i(x,\ 0)=\psi^i(x), \qquad 在\bar{\Omega}_i(0)上,\ i=1,\ 2 \tag{1.9}$$

$$\Gamma_0=\Gamma^0 \tag{1.10}$$

主要结果如下：

定理1.1 设$\Gamma^0\in C^{l+1+\alpha}$，$\Gamma^i\in C^{l+\alpha}$，$h^i\in C^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\Gamma^i\times[0,\ T])$，$\psi^i\in C^{l+\alpha}(\bar{\Omega}_i(0))$，$i=1,\ 2$，则存在一个$T>0$和$\{u^1,\ u^2,\ \Gamma\}$作为(1.5)～(1.10)的解，$u^i\in C^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}(\bar{Q}_i)$，$\Gamma\in C^{l+\alpha,(l+\alpha)/2}$，$l\geqslant 2$为整数．特别地当$l>2$时，$\{u^1,\ u^2,\ \Gamma\}$还是唯一的．

二、存在性

仅以$l=2$为例证明，其它情况证法类似．取$\mu\subset \boldsymbol{R}^3$是一个二维流形，变换

$$X^0(\omega):\mu\to\Gamma^0$$

是$C^{3+\alpha}$的微分全射．ω表示μ的局部坐标，$\nu^0(\omega)$表示Γ^0在点$x=X^0(\omega)$的单位法向量，令

$$X(\omega,\ \lambda)=X^0(\omega)+\lambda\nu^0(\omega):\ \mu\times[-L,\ L]\to\boldsymbol{R}^3$$

设L足够小，$X(\omega,\ \lambda)$是从$\mu\times[-L,L]$到Γ^0在$\boldsymbol{R}^3$内某个邻域上的$C^{2+\alpha}$微分全射，$x=X(\omega,\ \lambda)$的反函数为

$$\lambda=\lambda(x),\quad \omega=\omega(x)$$

（为书写方便，今后记$\partial f/\partial\omega_i=f_i$，$i=1,\ 2$）现在$\forall T>0$，$\forall k>0$，定义集合

$$B_{k,M}=\{g(\omega,\ t)\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,\ T]):|g|\leqslant L/2,\ \|g_i\|_{L^\infty}\leqslant k,$$
$$\|g_{ij}\|_{L^\infty}\leqslant k,\ [g_{ij}]_{C^\alpha(\mu)}\leqslant k,\ i,j=1,\ 2,\ \|g_t\|_{L^\infty}\leqslant M,$$
$$[g_t]_{C^{\alpha/2}([0,T])}\leqslant M,\ g[\omega,\ 0)=0\}$$

M是待定常数．

$\forall g\in B_{k,M}$定义一族光滑闭曲面

$$\Gamma_t=\{X(\omega,\ \lambda):\lambda=g(\omega,\ t),\ \omega\in\mu\},\qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

显然T足够小，$\Gamma_t\subset\subset\Omega$，$\Gamma_t\in C^{2+\alpha}$．

记$\sigma_{(i)}(\omega,\ t)=|\nabla_x\omega_i|\,|_{x=X(\omega,g(\omega,t))}$，则存在常数$c_1(k)$，$c_2(M)$使得

$$\sup_{0<t<T}\|\sigma_{(i)}(\cdot,\ t)\|_{C^{2+\alpha}(\mu)}\leqslant c_1(k),$$

$$\sup_{\omega\in\mu}\|\sigma_{(i)}(\omega,\ \cdot)\|_{C^{1+\alpha/2}([0,T])}\leqslant c_2(M),\qquad i=1,\ 2$$

$$V=g_t/\sqrt{1+\sigma_{(1)}^2g_1^2+\sigma_{(2)}^2g_2^2}$$

引理2.1 $\forall g\in B_{k,M}$，若$h^i\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Gamma^i\times[0,\ T])$，$\psi^i\in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_i(0))$，$\Gamma^i\in C^{2+\alpha}$，$i=1,\ 2$，则(1.5)、(1.8)、(1.9)和

$$-\partial u^1/\partial\nu=-\alpha^2\partial u^2/\partial\nu=u^1-u^2,\qquad 在\Gamma上 \tag{2.1}$$

有唯一解$\{u^1,\ u^2\}$，记

$$c^*=\max\{\|h^j\|_{C^0(\Gamma^j\times[0,T])},\|\psi^j\|_{C^0(\bar{\Omega}_j(0))},\ j=1,\ 2\}$$

$$|u^i|\leqslant c^*,\quad \|u^i\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_i)}\leqslant c_0(k,\ M),\qquad i=1,\ 2 \tag{2.2}$$

证 取Banach空间$B=C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{Q}_1)$和闭凸集$E=\{u\in B:|u|\leqslant c^*\}$，由标准的抛物型方程理论，$\forall u\in E$，在光滑块$\bar{Q}_2$上，下列问题

$$\partial u^2/\partial t-\Delta u^2=0,\qquad 在Q_2内$$

$$u^2=h^2,\qquad 在\Gamma^2\times[0,\ T]上$$
$$u^2(x,\ 0)=\psi^2(x),\qquad 在\bar{\Omega}_2(0)上$$
$$a^2\partial u^2/\partial\nu-u^2=-u,\qquad 在\Gamma上$$

有唯一解 $u^2\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_2)$且$|u^2|\leqslant c^*$，再$\forall\varepsilon\in[0,\ 1]$，由标准的抛物型方程理论，在光滑块$\bar{Q}_1$上，下列问题

$$\partial u^1/\partial t-\Delta u^1=0,\qquad 在Q_1内$$
$$u^1=\varepsilon h^1,\qquad 在\Gamma^1\times[0,\ T]上$$
$$u^1(x,\ 0)=\varepsilon\psi^1(x),\qquad 在\bar{\Omega}_1(0)上$$
$$\partial u^1/\partial\nu+u^1=\varepsilon u^2,\qquad 在\Gamma上$$

有唯一解$u^1\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_1)\cap E$.

定义$E\times[0,\ 1]\to E$的映射$P:P(u,\ \varepsilon)=u^1$,

① 显然$\forall u\in E$, $P(u,\ 0)=0$.

② 易推知P关于u连续且关于ε一致连续，再由$C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_1)\cap E\hookrightarrow\hookrightarrow E$，映射$P$是紧的.

③ $\forall\varepsilon\in[0,\ 1]$，设$P(u,\ \varepsilon)=u$对$\forall(x_0,\ t_0)\in\Gamma$在$(x_0,\ t_0)$的充分小邻域$\mathscr{N}_0$内将$u^2$从$\mathscr{N}_0\cap\bar{Q}_2$上反射到$\mathscr{N}_0\cap\bar{Q}_1$上，具体说作函数

$$\hat{u}^2=u^2(X^0(\omega)+(2g(\omega,\ t)-\lambda)\nu^0(\omega),\ t)$$

在$\mathscr{N}_0\cap\bar{Q}_1$内应用边界上满足"互补条件"的抛物系统理论（见[2]p.616第七章定理10.1，若有必要可将Γ_t变换为Γ^0，变换方法见本文第三节）存在不依赖于ε的正数M^*使

$$\|u\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_1)}\leqslant M^*$$

由Leray-Schauder不动点定理，存在$u^1\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_1)\cap E$，使$P(u^1,\ 1)=u^1$. 注意到$c^*$的定义，$u^1$的唯一性是显然的. 最后由

$$\|u^1\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{Q}_1)}\leqslant M^*$$

不难推得(2.2)成立.

记 $v(\omega,\ t)=u^1(X^0(\omega)+g(\omega,\ t)\nu^0(\omega),\ t)-u^2(X^0(\omega)+g(\omega,\ t)\nu^0(\omega),\ t)$

记φ_δ是关于ω的磨光函数,

$$v_\delta(\omega,\ t)=(\varphi_\delta*v(\cdot,\ t))(\omega),\quad \sigma_{i\delta}(\omega,\ t)=(\varphi_\delta*\sigma_{(i)}(\cdot,\ t))(\omega)$$

则 $\|\sigma_{i\delta}(\cdot,\ t)\|_{C^{2+\alpha}(\mu)}\leqslant c_1$, $\|\sigma_{i\delta}(\omega,\ \cdot)\|_{C^{1+\alpha/2}([0,T])}\leqslant c_2$, $\|v_\delta\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,T])}\leqslant c_3$

$\forall\varepsilon>0$，设$\tilde{g}(\omega,\ t)$是下列问题的解

$$\tilde{g}_t=\sqrt{1+\sigma_{1\delta}^2\tilde{g}_1^2+\sigma_{2\delta}^2\tilde{g}_2^2}\,v_\delta+\varepsilon(\tilde{g}_{11}+\tilde{g}_{22}),\qquad \mu\times[0,\ T]\tag{2.3}$$
$$\tilde{g}(\omega,\ 0)=0,\qquad \omega\in\mu\tag{2.4}$$

由比较原理$|\tilde{g}(\omega,\ t)|\leqslant c_2t$，由(2.3)

$$\|\tilde{g}_t\|_{L^\infty}\leqslant\sqrt{1+2c_1^2k^2}\,c^*+2k\equiv M$$

设T足够小，则

$$|\tilde{g}(\omega,\ t)|\leqslant L/2$$

由于 $\tilde{g}\in C^\infty(\mu)$，从(2.3)，$|\tilde{g}_{it}|$，$|\tilde{g}_{ijt}|\leqslant$const，再由(2.4)和拉格朗日中值定理，存在常数a_i，$a_{ij}>0$使

$$|\tilde{g}_i(\omega,\ t)|\leqslant a_it,\quad |\tilde{g}_{ij}(\omega,\ t)|\leqslant a_{ij}t,\qquad \omega\in\mu,\ 0\leqslant t\leqslant T,\ i,j=1,\ 2$$

引理2.2 若$T\leqslant 1/8c_1c_3$则a_1，a_2均可不大于$3c_2$.

证 对(2.3)关于ω_1微分得

$$\mathscr{L}\tilde{g}_1\equiv\tilde{g}_{1t}-\frac{\sigma_{1\delta}^2\tilde{g}_1\tilde{g}_{11}+\sigma_{1\delta}\sigma_{1\delta 1}\tilde{g}_1^2+\sigma_{2\delta}^2\tilde{g}_2\tilde{g}_{12}+\sigma_{2\delta}\sigma_{2\delta 1}\tilde{g}_2^2}{\sqrt{1+\sigma_{1\delta}^2\tilde{g}_1^2+\sigma_{2\delta}^2\tilde{g}_2^2}}v_\delta$$
$$-\sqrt{1+\sigma_{1\delta}^2\tilde{g}_1^2+\sigma_{2\delta}^2\tilde{g}_2^2}\,v_{\delta 1}-\varepsilon(\tilde{g}_{111}+\tilde{g}_{122})=0$$

取$W=at$，$a>0$是待定常数，则

$$\mathscr{L}W=a-\frac{\sigma_{1\delta}\sigma_{1\delta 1}W^2+\sigma_{2\delta}\sigma_{2\delta 1}\tilde{g}_2^2}{\sqrt{1+\sigma_{1\delta}^2W^2+\sigma_{2\delta}^2\tilde{g}_2^2}}v_\delta-\sqrt{1+\sigma_{1\delta}^2W^2+\sigma_{2\delta}^2\tilde{g}_2^2}\,v_{\delta 1}$$
$$\geqslant a-(|\sigma_{1\delta 1}|a+|\sigma_{2\delta 1}|a_2)tc_3-(\sigma_{1\delta}a+\sigma_{2\delta}a_2)tc_3-c_3$$
$$\geqslant 3a/4-a_2/4-c_3$$

(i) 若$a_2\leqslant 3c_3$，取$a=3c_3$，$\mathscr{L}W>0$易得$|\tilde{g}_1(\omega,\ t)|\leqslant 3c_3t$，即可使$a_1\leqslant 3c_3$；

(ii) 若$a_2=3c_3+\theta$，$\theta>0$，取$a=3c_3+(\theta-c_3)/3$，则$\mathscr{L}W>0$，易得$|\tilde{g}_1(\omega,\ t)|\leqslant[3c_3+(\theta-c_3)/3]t$，即可使$a_1\leqslant 3c_3+(\theta-c_3)/3$。

类似地，若$a_1\leqslant 3c_3$，可使$a_2\leqslant 3c_3$；若$a_1=3c_3+\theta_1$，$0<\theta_1\leqslant(\theta-c_3)/3$，又可使$a_2\leqslant 3c_3+(\theta_1-c_3)/3$，如此反复，引理得证。

让$T\leqslant k/3c_3$，得$\|\tilde{g}_i\|_{L^\infty}\leqslant k$，$i=1$，2。

引理2.3 存在一个充分大的正数$c(c_1,\ k)$当$T\leqslant 1/8c$时，可使a_{11}，a_{12}，a_{22}均不大于$3c$。

证 首先对(2.3)关于ω_1，ω_2各微分一次，得

$$\mathscr{L}\tilde{g}_{12}\equiv\tilde{g}_{12t}+F_1\tilde{g}_{121}+F_2\tilde{g}_{122}+F_3\tilde{g}_{11}+F_4\tilde{g}_{12}+F_5\tilde{g}_{22}+F_6\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{12}+F_7\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22}$$
$$+F_8\tilde{g}_{12}^2+F_9\tilde{g}_{12}\tilde{g}_{22}+F_{10}-\varepsilon(\tilde{g}_{1211}+\tilde{g}_{1222})=0$$

其中$|F_l|\leqslant c(c_1,\ k)$，$l=1$，…，10。取$W=at$，$a>0$是待定常数，得

$$\mathscr{L}W=a+F_3\tilde{g}_{11}+F_4W+F_5\tilde{g}_{22}+F_6\tilde{g}_{11}W+F_7\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22}+F_8W^2+F_9\tilde{g}_{22}W+F_{10}$$
$$\geqslant a-c(a_{11}+a+a_{22})t-c(a_{11}a+a_{11}a_{22}+a^2+aa_{22})t^2-c \qquad (*)$$

从(*)式易见，存在$0<T_0\leqslant\min\{T,\ 1/8c\}$使得$a=4c$时$\mathscr{L}W>0$在$\mu\times[0,\ T_0]$上成立，因此若$0\leqslant t\leqslant T_0$，则$|\tilde{g}_{12}(\omega,\ t)|\leqslant 4ct$，也就是说在$\mu\times[0,\ T_0]$上可以让$a_{12}\leqslant 4c$。

再对(2.3)关于ω_1微分两次，得

$$\mathscr{L}\tilde{g}_{11}\equiv\tilde{g}_{11t}+F_1\tilde{g}_{111}+F_2\tilde{g}_{112}+F_3\tilde{g}_{11}^2+F_4\tilde{g}_{11}+F_5\tilde{g}_{12}^2+F_6\tilde{g}_{12}$$
$$+F_7\tilde{g}_{11}\tilde{g}_{12}+F_8-\varepsilon(\tilde{g}_{1111}+\tilde{g}_{1122})=0$$

其中$|F_m|\leqslant c(c_1,\ k)$，$m=1$，…，8。取$W=at$，$a>0$待定，得

$$\mathscr{L}W=a+F_3W^2+F_4W+F_5\tilde{g}_{12}^2+F_6\tilde{g}_{12}+F_7W\tilde{g}_{12}+F_8$$
$$\geqslant a-c(a+a_{12})t-c(a^2+aa_{12}+a_{12}^2)t^2-c$$

在$\mu\times[0,\ T_0]$上，由于$a_{12}\leqslant 4c$，则

$$\mathscr{L}W\geqslant\frac{13}{16}a-\frac{1}{64c}a^2-\frac{7}{4}c$$

取$a=3c$，$\mathscr{L}W>0$，得$|\tilde{g}_{11}(\omega,\ t)|\leqslant 3ct$。换句话说，我们可以让$a_{11}\leqslant 3c$在$\mu\times[0,\ T_0]$上成立。类似地可使$a_{22}\leqslant 3c$在$\mu\times[0,\ T_0]$上成立。

再考察(*)式，在$\mu\times[0,\ T_0]$上，由于$a_{11}\leqslant 3c$，$a_{22}\leqslant 3c$，

$$\mathscr{L}W\geqslant\frac{25}{32}a-\frac{1}{64c}-\frac{121}{64}c$$

取$a=3c$，$\mathscr{L}W>0$，从而在$\mu\times[0,\ T_0]$上，又可使$a_{12}\leqslant 3c$。

最后注意到$|\tilde{g}_{12}(\omega,\ t)|\leqslant\tilde{c}$（常数），记$T_1=T_0(1+c/\tilde{c})$，则在$\mu\times[T_0,\ T_1]$上，

$$|\tilde{g}_{12}(\omega,\ t)|\leqslant|\tilde{g}_{12}(\omega,\ T_0)|+\tilde{c}(t-T_0)\leqslant 3cT_0+cT_0<4cT_1$$

因此在$\mu\times[0,\ T_1]$上，可使$a_{12}\leqslant 4c$，进一步又可推得在$\mu\times[0,\ T_1]$上，a_{11}，a_{12}，a_{22}均不大

于$3c$。再记$T_2=T_1(1+c/\tilde{c})$，在$\mu\times[0,\ T_2]$上，a_{11}，a_{12}，a_{22}均可不大于$3c$，如此继续下去，引理得证。让$T\leqslant k/3c$，则$\|\tilde{g}_{ij}\|_{L^\infty}\leqslant k$，$i$，$j=1$，2。

由于v_δ关于ω和t都绝对连续，容易证明

$$\tilde{g}_t=\sqrt{1+\sigma_{1\delta}^2\tilde{g}_1^2+\sigma_{2\delta}^2\tilde{g}_2^2}\,v_\delta,\qquad \mu\times[0,\ T] \tag{2.5}$$

$$\tilde{g}(\omega,\ 0)=0,\qquad \omega\in\mu \tag{2.6}$$

最多只有一个解。令$\varepsilon\to0$，$\tilde{g}=\tilde{g}_\varepsilon$收敛到(2.5)、(2.6)的唯一解$g^*$。从(2.5)有

$$|\tilde{g}_{it}|\leqslant 4c_1^2k^2c^*+\sqrt{1+2c_1^2k^2}c_3$$

$$\frac{|g_i^*(\omega,\ t_1)-g_i^*(\omega,\ t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha/2}}\leqslant 2c_1^2kc^*\frac{|g_1^*(\omega,t_1)-g_1^*(\omega,t_2)|+|g_2^*(\omega,t_1)-g_2^*(\omega,t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha/2}}$$

$$+\sqrt{1+2c_1^2k^2}\frac{|v_\delta(\omega,\ t_1)-v_\delta(\omega,\ t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha/2}}$$

$$+2c_1k^2c^*\frac{|\sigma_{1\delta}(\omega,\ t_1)-\sigma_{1\delta}(\omega,\ t_2)|+|\sigma_{2\delta}(\omega,\ t_1)-\sigma_{2\delta}(\omega,\ t_2)|}{|t_1-t_2|^{\alpha/2}}$$

$$\leqslant[4c_1^2kc^*(4c_1^2k^2c^*+\sqrt{1+2c_1^2k^2}c_3)+\sqrt{1+2c_1^2k^2}c_3+4c_1k^2c^*c_2]T^{1-\alpha/2}$$

让T充分小，则$[g_i^*]_{C^{\alpha/2}([0,T])}\leqslant M$。

对(2.3)、(2.4)关于ω微分三次或四次，并利用ct估计，可得T足够小，$\tilde{g}$关于ω的三阶、四阶偏导数都存在一致的界，因此对(2.5)关于ω微分两次是有意义的。

$$\begin{aligned}(g_{11}^*)_t=&F_1(g_{11}^*)_1+F_2(g_{11}^*)_2+F_3g_{12}^{*2}+F_4g_{11}^*+F_5g_{12}^{*2}+F_6g_{12}^*\\&+F_7g_{11}^*g_{12}^*+F_8\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中 $F_i=\sigma_{i\delta}^2g_i^*v_\delta/\sqrt{1+\sigma_{1\delta}^2g_1^{*2}+\sigma_{2\delta}^2g_2^{*2}}\in C^{1+\alpha,0}(\mu\times[0,\ T])$，$\quad i=1$，2

引特征线$\partial\xi_i/\partial t=-F_i(\xi,\ t)$，$\xi_i(\omega,\ 0)=\omega_i$，$i=1$，2，

注意$\partial(\xi_1,\ \xi_2)/\partial(\omega_1,\ \omega_2)|_{t=0}=I_{2\times2}$，让$T$足够小，则

$$1/2\leqslant\det(\partial(\xi_1,\ \xi_2)/\partial(\omega_1,\ \omega_2))\leqslant2 \tag{2.8}$$

（必要时，可以认为g^*，v_δ，$\sigma_{1\delta}$，$\sigma_{2\delta}$都已关于ω周期延拓到$\boldsymbol{R}^2$上）。$\forall(\omega,\ t)\in\mu\times[0,\ T]$，必有点$(\omega^0,\ 0)\in\mu\times\{0\}$，使从$(\omega^0,\ 0)$引出的特征线经过$(\omega,\ t)$沿特征线方向对(2.7)积分，得

$$\begin{aligned}|g_{11}^*(\xi(\omega^1,\ t),\ t)-g_{11}^*(\xi(\omega^2,\ t),\ t)|\leqslant&A_1\int_0^t|g_{11}^*(\xi(\omega^1,\ s),\ s)\\&-g_{11}^*(\xi(\omega^2,\ s),\ s)|ds+A_2\int_0^t|g_{12}^*(\xi(\omega^1,\ s),\ s)\\&-g_{12}^*(\xi(\omega^2,\ s),\ s)|ds+A_3\int_0^t|(\xi(\omega^1,\ s))-(\xi(\omega^2,\ s))|ds\\&+A_4\int_0^t|(\xi(\omega^1,\ s))-(\xi(\omega^2,\ s))|^\alpha ds\end{aligned}$$

记 $G_{ij}(s)=|g_{ij}^*(\xi(\omega^1,\ s),\ s)-g_{ij}^*(\xi(\omega^2,s),\ s)|/|(\xi(\omega^1,\ s))-(\xi(\omega^2,s))|^\alpha$

由(2.8)得

$$G_{11}(t)\leqslant\frac{1}{2}B_{11}\int_0^tG_{11}(s)ds+\frac{1}{3}B_{12}\int_0^tG_{12}(s)ds+\frac{1}{3}B_0t \tag{2.9}$$

同理

$$G_{12}(t)\leqslant\frac{1}{2}B_{11}\int_0^tG_{11}(s)ds+\frac{1}{3}B_{12}\int_0^tG_{12}(s)ds$$

$$+\frac{1}{2}B_{22}\int_0^t G_{22}(s)ds+\frac{1}{3}B_0t \tag{2.10}$$

$$G_{22}(t)\leqslant\frac{1}{3}B_{12}\int_0^t G_{12}(s)ds+\frac{1}{2}B_{22}\int_0^t G_{22}(s)ds+\frac{1}{3}B_0t \tag{2.11}$$

其中B_0, B_{11}, B_{12}, B_{22}都不依赖于δ和T的下界。将(2.9)～(2.11)相加并利用Gronwall不等式可得，T足够小有

$$[g^*_{ij}]_{C^\alpha(\mu)}\leqslant k,\qquad i,\ j=1,\ 2$$

定义映射$W: g\to Wg=g^*$，映$B_{k,M}$到自身，如果对$B_{k,M}$提供一个一致拓扑，则$B_{k,M}$是紧的，又由(2.5)、(2.6)解唯一，W是连续的，由Schauder不动点定理，W有一个不动点g^*_δ，令$\delta\to0$通过抽取子列，我们能得到一个极限函数g及其对应的函数u^1，u^2作为(1.5)～(1.10)的解。

三、唯一性

设$\{u^1,\ u^2,\ g\}$和$\{\tilde u^1,\ \tilde u^2,\ \tilde g\}$是(1.5)～(1.10)的两个解。

取一个函数$h(\mu,\ \eta)\in C^\infty([-L,\ L]\times\boldsymbol{R}^1)$，满足$\partial h/\partial\mu\geqslant c>0$且

$$h(\mu,\ \eta)=\begin{cases}\mu, & |\mu|\geqslant3L/4\\ 0, & \mu=\eta\text{且}|\mu|\leqslant L/2\end{cases}$$

定义从$\Omega_T\equiv\Omega\times[0,\ T]$到自身的变换$Y(x,\ t)$，

$$Y(x,\ t)=\begin{cases}(x,\ t), & \operatorname{dist}(x,\ \Gamma^0)\geqslant3L/4\\ (X^0(\omega)+h(\lambda,\ g(\omega,\ t))\nu^0(\omega),\ t)|_{(\omega,\lambda)=(\omega(x),\lambda(x))} & \\ & \operatorname{dist}(x,\ \Gamma^0)\leqslant3L/4\end{cases} \tag{3.1}$$

容易证明$Y\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\boldsymbol{\Omega}}_T)$是$\bar{\boldsymbol{\Omega}}_T\to\bar{\boldsymbol{\Omega}}_T$的微分全射，$\forall t\in[0,\ T]$，$Y$映$\Gamma_t$为$\Gamma^0\times\{t\}$，且

$$\|Y\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar\Omega_T)}\leqslant c,\quad \|Y^{-1}\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar\Omega_T)}\leqslant c$$

记$Z^m(y,\ t)=u^m(Y^{-1}(y,\ t),\ t)$或$Z^m(Y(x,\ t),\ t)=u^m(x,\ t)$，由(1.5)、(1.8)、(1.9)、(2.1)得

$$\frac{\partial Z^m}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}\frac{\partial^2 Z^m}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^3 b_i\frac{\partial Z^m}{\partial y_i}=0,\qquad \text{在}\Omega_m(0)\times(0,\ T]\text{内},\ m=1,2 \tag{3.2}$$

$$Z^m=h^m(Y^{-1}(y,\ t),\ t),\qquad \text{在}\Gamma^m\times[0,\ T]\text{上},\ m=1,\ 2 \tag{3.3}$$

$$Z^m(y,\ 0)=\psi^m(Y^{-1}(y,\ 0)),\qquad \text{在}\bar{\boldsymbol{\Omega}}_m(0)\text{上},\ m=1,\ 2 \tag{3.4}$$

$$-\nu\cdot\nabla_y Z^1=-\nu\alpha^2\nabla_y Z^2=Z^1-Z^2,\qquad \text{在}\Gamma\text{上} \tag{3.5}$$

其中

$$\begin{cases}a_{ij}\equiv a_{ij}(y,\ t)=(\nabla_x Y^i\cdot\nabla_x Y^j)(x,\ t)|_{x=Y^{-1}(y,t)}\\ b_i\equiv b_i(y,\ t)=(\Delta_x Y^i)(x,\ t)|_{x=Y^{-1}(y,t)}\end{cases}$$

$$\nu\equiv\nu(y,\ t)=\nu(x,\ t)|_{x=Y^{-1}(y,\ t)},\quad \nu\equiv(\nu^1(y,\ t),\ \nu^2(y,\ t),\ \nu^3(y,\ t))$$

$$\nu^i=\left.\frac{\partial\lambda/\partial x_i-g_{\omega_1}\partial\omega_1/\partial x_i-g_{\omega_2}\partial\omega_2/\partial x_i}{\sqrt{1+g^2_{\omega_1}|\nabla_x\omega_1|^2+g^2_{\omega_2}|\nabla_x\omega_2|^2}}\right|_{x=Y^{-1}(y,t)},\qquad i=1,\ 2,\ 3$$

容易证明

$$\|a_{ij}\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega}_T)}\leqslant c,\quad \|b_i\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)}\leqslant c,\quad \|\nu^i\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\bar{\Omega}_T)}\leqslant c$$

因为$\nu(y,\ 0)=\nu^0(y)$且$(a_{ij}(y,\ 0))=I_{3\times3}$让$T$充分小，总可以使

$$\nu\cdot\nu^0\geqslant\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}|\xi|^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\frac{3}{2}|\xi|^2,\qquad \forall\xi\in\boldsymbol{R}^3,\ \forall(y,\ t)\in\Gamma^0\times[0,\ T]$$

现在取$\varphi^m(y,\ t)=\tilde{Z}^m(y,\ t)-Z^m(y,\ t)$，由(3.2)～(3.5)

$$\frac{\partial\varphi^m}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{3}\tilde{a}_{ij}\frac{\partial^2\varphi^m}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^{3}\tilde{b}_i\frac{\partial\varphi^m}{\partial y_i}=-\sum_{i,j=1}^{3}(\tilde{a}_{ij}-a_{ij})\frac{\partial^2 Z^m}{\partial y_i\partial y_j}$$

$$+\sum_{i=1}^{3}(\tilde{b}_i-b_i)\frac{\partial Z^m}{\partial y_i}=f^m,\qquad m=1,\ 2,\ 在\Omega_m(0)\times(0,\ T]内$$

$$\varphi^m=0,\qquad m=1,\ 2,\ 在(\Gamma^m\times[0,\ T])\cup\bar{\boldsymbol{\Omega}}_m(0)上$$

$$-\tilde{\nu}\cdot\nabla_y\varphi^1-(\varphi^1-\varphi^2)=-(\tilde{\nu}-\nu)\nabla_y Z^1\equiv G_1,\qquad 在\Gamma^0\times[0,\ T]上$$

$$-\alpha^2\tilde{\nu}\cdot\nabla_y\varphi^2-(\varphi^1-\varphi^2)=-\alpha^2(\tilde{\nu}-\nu)\cdot\nabla_y Z^2\equiv G_2,\qquad 在\Gamma^0\times[0,\ T]上$$

容易推得

$$\|f^m\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_m(0)\times[0,T])},\quad \|G^m\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\Gamma^0\times[0,T])}$$
$$\leqslant c\|g-\tilde{g}\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,T])},\qquad m=1,\ 2$$

利用边界上满足“互补条件”的抛物系统理论([2]第七章定理10.1)易得

$$\|\varphi^m\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_m(0)\times[0,T])}\leqslant c\|g-\tilde{g}\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,\ T])},\qquad m=1,\ 2$$

从而
$$\|v-\tilde{v}\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,T])}\leqslant c\|g-\tilde{g}\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,T])}\tag{3.6}$$

由于
$$-\alpha^2\tilde{\nu}\cdot[\nabla_y(\varphi^1-\varphi^2)]-(\alpha^2-1)(\varphi^1-\varphi^2)=-\alpha^2(\tilde{\nu}-\nu)\cdot(\nabla_y Z^1-\nabla_y Z^2)$$
在$\Gamma^0\times[0,T]$上
$$|v-\tilde{v}|=|\varphi^1-\varphi^2|\leqslant c\cdot\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|g(\cdot,\ t)-\tilde{g}(\cdot,\ t)\|_{C^1(\mu)}\tag{3.7}$$

考虑到
$$g_t=\sqrt{1+\sigma_{(1)}^2g_1^2+\sigma_{(2)}^2g_2^2}\ v\tag{3.8}$$

对(3.8)关于ω两次微分

$$g_{ijt}=H_1g_{1ij}+H_2g_{ij2}+J_{ij},\qquad i,\ j=1,\ 2$$

其中
$$H_i=-\sigma_{(i)}^2g_iv/\sqrt{1+\sigma_{(1)}^2g_1^2+\sigma_{(2)}^2g_2^2},\qquad i=1,\ 2$$

类似地有
$$\tilde{g}_{ijt}=\tilde{H}_1\tilde{g}_{1ij}+\tilde{H}_2\tilde{g}_{ij2}+\tilde{J}_{ij},\qquad i,\ j=1,\ 2$$

由(3.6)
$$\|J_{ij}-\tilde{J}_{ij}\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\mu\times[0,\ T])}\leqslant c\|g-\tilde{g}\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,T])}$$
$$\|(H_1-\tilde{H}_1)\tilde{g}_{1ij},\ (H_2-\tilde{H}_2)\tilde{g}_{ij2}\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\mu\times[0,\ T])}$$
$$\leqslant c\|g-\tilde{g}\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,\ T])},\qquad i,\ j=1,\ 2$$

记$g^*=g-\tilde{g}$，因此

$$g_{ijt}^*=H_1g_{1ij}^*+H_2g_{ij2}^*+(H_1-\tilde{H}_1)g_{1ij}^*+(H_2-\tilde{H}_2)g_{ij2}^*+(J_{ij}-\tilde{J}_{ij}),$$
$$i,\ i=1,\ 2\tag{3.9}$$

$$\|g_{ijt}^*-H_1g_{1ij}^*-H_2g_{ij2}^*\|_{C^{\alpha,\alpha/2}(\mu\times[0,\ T])}\leqslant c\|g^*\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,T])}$$
$$\|H_i\|_{C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\mu\times[0,T])}\leqslant c,\qquad i,\ j=1,\ 2$$

引特征线

$$\partial\xi_i/\partial t=-H_i(\xi,\ t),\quad \xi_i(\omega,\ 0)=\omega_i,\qquad i=1,\ 2$$

存在$\sigma>0$，使$0\leqslant t\leqslant\sigma$时，$1/2\leqslant\det[\partial(\xi_1,\ \xi_2)/\partial(\omega_1,\ \omega_2)]\leqslant2$，将以上讨论关于$t$都限制在$[0,\ \sigma]$上。$\forall t\in[0,\ \sigma]$沿特征线方向对(3.9)在$[0,\ t]$上积分，得

$$\|g^*_{ij}\|_{L^\infty}(t),\ [g^*_{ij}]_{C^\alpha(\mu)}(t)\leqslant ct\|g^*\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,\sigma])},\qquad i,j=1,2 \tag{3.10}$$

类似可证

$$\|g^*\|_{L^\infty}(t),\ \|g^*_i\|_{L^\infty}(t)\leqslant ct\|g^*\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,\sigma])},\qquad i=1,\ 2 \tag{3.11}$$

利用(3.7)、(3.11)不难得到

$$\|g^*_i\|_{L^\infty}(t)\leqslant ct\|g^*\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,\sigma])},\ [g^*_i](\omega,\ \cdot)]_{C^{\alpha/2}([0,\sigma])}$$
$$\leqslant c\sigma^{1-\alpha/2}\|g^*\|_{C^{2+\alpha,1+1/2}(\mu\times[0,T])} \tag{3.12}$$

综合(3.10)～(3.12)得

$$\|g^*\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,\sigma])}\leqslant c\sigma^{1-\alpha/2}\|g^*\|_{C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\mu\times[0,T])}$$

让σ充分小，则

$$g(\omega,\ t)=\tilde{g}(\omega,\ t),\qquad 0\leqslant t\leqslant\sigma$$

我们一步一步地继续上述讨论，即可证得

$$g(\omega,\ t)=\tilde{g}(\omega,\ t),\qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

从而对一切$0\leqslant t\leqslant T$,

$$u^1(x,\ t)=\tilde{u}^1(x,\ t),\ u^2(x,\ t)=\tilde{u}^2(x,\ t)$$

参 考 文 献

[1] S. Luckhaus, Solutions of the two-phase stefan problem with the Gibbs-Thomson low for melting temperature, *Eur. J. Appl. Math.*, 1 (1990), 101—110.

[2] O. A. Ladyženskaaja, Linear and quasi-linear equations of parabolic type, *Translation of Mathematical Monographs*, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, Translated from the Russian by S. Smith., 23 (1968).

[3] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, New York (1964).

[4] X. Chen and F. Reith, Local existence and uniqueness of solutions of the stefan problem with surface tension and kinetic undercooling, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 164 (1992), 350—362.

A Verigin Problem with Kinetic Condition

Xu Longfeng

(Tongling Institute of Finance and Economics, Tongling, Anhui 244000, P. R. China)

Abstract

In this paper a Verigin problem with kinetic condition is considered. The existence and uniqueness of a classical solution locally in time of this problem are obtained.

Key words kinetic condition, Verigin problem, classical solution