

文章编号: 1000-0887(2005) 02\_0169\_09

# 一类不可压广义 neo\_Hookean 球体的 空穴分岔问题的定性研究\*

袁学刚<sup>1,2</sup>, 朱正佑<sup>1</sup>

(1. 上海大学 数学系, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;  
2. 烟台大学 数学与信息科学系, 山东烟台 264005)

(郭兴明推荐)

**摘要:** 研究了一类不可压的广义 neo\_Hookean 材料组成的球体的空穴分岔问题, 该类材料可以看作是带有径向摄动的均匀各向同性不可压的 neo\_Hookean 材料, 得到了球体内部空穴生成的条件与均匀各向同性的 neo\_Hookean 球体的情况相比, 证明了当摄动参数属于某些区域时, 从平凡解局部向左分岔的空穴分岔解上存在一个二次转向分岔点, 空穴生成时的临界载荷会比无摄动的材料的临界载荷小. 用奇点理论证明了, 空穴分岔方程在临界点附近等价于具有单边约束条件的正规形. 用最小势能原理分别讨论了空穴分岔解的稳定性和实际稳定的平衡状态.

**关键词:** 不可压的广义 neo\_Hookean 材料; 空穴分岔; 正规形; 稳定性和突变

**中图分类号:** O175; O343      **文献标识码:** A

## 引 言

早在 1958 年, Gent 和 Lindley 便首次在拉伸均匀密实的硫化橡胶材料的实验中, 发现了材料内部有空穴突然生成的现象. 但是直到 1982 年才由 Ball<sup>[1]</sup> 以非线性弹性理论为基础, 将空穴的生成与增长归结为一个数学模型的分岔问题. 近些年来, 这方面已经有了很多的研究成果. Chou\_Wang 和 Horgan<sup>[2]</sup> 研究了各向同性的幂率型不可压超弹性材料的空穴分岔问题; Polignone 和 Horgan<sup>[3]</sup> 研究了不可压的各向异性非线性弹性球体的空穴生成与增长; Chung<sup>[4]</sup> 等人证明了空穴只能在有限变形中才能观察到; Horgan 和 Polignone<sup>[5]</sup> 于 1995 年对此前关于不可压缩和可压缩超弹性材料中空穴分岔方面的研究结果进行了详细的综述. 此后, 任九生和程昌钧<sup>[6]</sup>、尚新春和程昌钧<sup>[7,8]</sup> 分别研究了不可压 Valanis\_Landel 材料、修正 Blatz\_Ko 材料和一类可压缩超弹性材料组成的球体的空穴分岔问题, 并且得到了分岔问题的精确解. 相关的研究还可见文献[9~13]. 本文的目的是研究一类不可压的广义 neo\_Hookean 材料的球形空穴分岔问题, 该类材料可以看作是带有径向摄动的均匀各向同性不可压的 neo\_Hookean 材料. 得到了

\* 收稿日期: 2002\_12\_20; 修订日期: 2004\_06\_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272069); 上海市重点学科基金资助项目

作者简介: 袁学刚(1971—), 男, 吉林市人, 副教授, 博士(E-mail: mengjn@ytu.edu.cn);

朱正佑, 男, 教授, 博士生导师(联系人, Tel: + 86\_21\_56331454; E-mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn).

球体在给定的表面拉伸载荷作用下,球体中心有空穴生成的空穴分岔方程。用奇点理论证明了无量纲化的空穴分岔方程在临界点附近等价于一类具有单边约束条件的正规形。参数空间可以划分为4个区域,证明了在区域1或4内,局部向左分岔的空穴分岔解支存在一个二次转向分岔点;而在区域3或4内,生成空穴时的临界载荷比无摄动的 neo\_Hookean 材料的临界载荷小。这些结论是以前文献中未曾出现的。最后利用最小势能原理讨论了解的稳定性,并得到了区域1或4内实际稳定的平衡状态。

## 1 分岔问题的数学描述

假设球体是由均匀不可压的超弹性材料组成,球体的外表面  $R = b$  受到均布径向拉伸死载荷  $p_0$  的作用。在球坐标系下,实心球体在变形前所占的区域为

$$D_0 = \left\{ (R, \Theta, \Phi) : 0 \leq R < b, 0 < \Theta \leq 2\pi, 0 \leq \Phi \leq \pi \right\}. \quad (1)$$

在球对称变形的假设下,变形分量、主伸长  $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$  以及变形梯度张量  $F$  分别为

$$r = r(R) \geq 0, 0 \leq R < b; \theta = \Theta, \phi = \Phi, \quad (2)$$

$$\lambda_1 = r'(R), \lambda_2 = \lambda_3 = r(R)/R, \quad (3)$$

$$F = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (4)$$

其中  $r(R)$  是待定函数,“点”表示关于变量  $R$  的导数。

材料的不可压条件要求  $F$  的 Jacobi 行列式  $J = \det F = 1$ , 即  $r'(R)r^2(R)/R^2 = 1$ , 从而有

$$r'(R) = \frac{R^2}{r^2(R)}. \quad (5)$$

Cauchy 应力张量的各非零分量为

$$\tau_{rr}(R) = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - p(R), \tau_{\theta\theta}(R) = \tau_{\phi\phi}(R) = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - p(R), \quad (6)$$

其中  $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  为不可压超弹性材料的应变能函数,  $p(R)$  表示待定的静水压力。在忽略体积力时,球体的应力分量应满足的平衡方程为

$$\tau_r'(R) + 2 \frac{r'(R)}{r(R)} [\tau_{rr}(R) - \tau_{\theta\theta}(R)] = 0. \quad (7)$$

球体表面受死载荷作用的边界条件为

$$\tau_{rr}(b) = p_0 \left[ \frac{b}{r(b)} \right]^2, \quad (8)$$

其中  $p_0 > 0$  是给定的表面死载荷。在球体中心满足

$$r(0+) \tau_r(0+) = 0, \quad (9)$$

(9) 式表示当球体不存在空穴时,有  $r(0+) = 0$ ; 当球体内部有空穴生成时,则有  $\tau_r(0+) = 0$

均匀各向同性不可压的 neo\_Hookean 材料的应变能函数为<sup>[2]</sup>

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\mu}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3), \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1, \quad (10)$$

其中  $\mu > 0$  是无穷小变形的剪切模量。

当 neo\_Hookean 材料具有某种缺陷而产生径向摄动时,我们得到了一类广义 neo\_Hookean 材料,假设其应变能函数的形式为

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{\mu}{2} [\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3 + \varepsilon(\lambda_1^2 - 1)^2 + \eta(\lambda_1^2 - 1)^3], \quad (11)$$

其中  $\varepsilon, \eta \geq 0$  是无量纲化的摄动参数,它们的大小表示材料关于径向各向异性的程度。当  $\varepsilon = \eta = 0$  时,(11) 式便是均匀各向同性不可压的 neo\_Hookean 材料的应变能函数。

至此, 方程(5)、(7)、应变能函数(11)及边界条件(8)和(9), 构成了不可压的广义 neo-Hookean 材料组成的球体, 在表面拉伸载荷作用下球对称变形问题的控制方程组. 若把(6)代入(7)、(8)和(9), 便得到静水压力  $p(R)$  和径向变形  $r(R)$  应该满足的微分方程组和边界条件.

## 2 控制方程组的解

对(5)式直接积分, 得到

$$r(R) = (R^3 + c^3)^{1/3}, \quad (12)$$

其中  $c \geq 0$  是一个待定常数, 它代表空穴半径.  $c = 0$  表示在变形后的构形中球体仍保持为实心球体, 另一方面, 若  $c > 0$ , 则  $r(0+) = c > 0$  表示在变形后的构形中球体有一个中心在原点半径为  $c$  的空穴生成.

为了便于计算, 引入记号(参考 Ball[1])

$$v = v(R, c) = \frac{r(R)}{R} = \left[ 1 + \frac{c^3}{R^3} \right]^{1/3}. \quad (13)$$

因此(3)式可以重新记为

$$\lambda_1 = r_{,R} = v^{-2}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = r(R)/R = v. \quad (14)$$

将(11)式代入平衡方程(7), 并且利用记号(13), 得到

$$\tau_{rr}(R) + 2\mu \frac{v^{-3}}{R} \left\{ v^{-4} [1 + 2\varepsilon(v^{-4} - 1) + 3\eta(v^{-4} - 1)^2] - v^2 \right\} = 0. \quad (15)$$

将(15)式从 0 到  $R$  进行积分, 得到

$$\tau_{rr}(R) - \tau_{rr}(0) = -2K(R, c), \quad (16)$$

其中

$$K(R, c) = \mu \int_0^R \left\{ v^{-7}(s, c) [1 + 2\varepsilon(v^{-4}(s, c) - 1) + 3\eta(v^{-4}(s, c) - 1)^2] - v^{-1}(s, c) \right\} \frac{ds}{s}. \quad (17)$$

(16)式两端乘以  $r(0+)$ , 由边界条件(9), 得到

$$r(0+) \tau_{rr}(R) = -2r(0+)K(R, c). \quad (18)$$

在(18)中, 令  $R = b$ , 由(12)、(8)及  $r(0+) = c$ , 得到

$$p_0 = -2c[v(b, c)]^2 K(b, c). \quad (19)$$

将(6)代入到(18), 得到

$$p(R, c) = c b^{-4} [1 + 2\varepsilon(v^{-4} - 1) + 3\eta(v^{-4} - 1)^2] + 2cK(R, c), \quad 0 < R < b. \quad (20)$$

显然, 对任意给定的  $p_0$ ,  $c = 0$  是(19)的解, 这时

$$p(R, c) = \mu - p_0 \quad (21)$$

是控制方程组的平凡解; 若对某个  $p_0$ ,  $c > 0$  是(19)的解, 则

$$p(R, c) = \mu^{-4} [1 + 2\varepsilon(v^{-4} - 1) + 3\eta(v^{-4} - 1)^2] + 2K(R, c) \quad (22)$$

是控制方程组的非平凡解.

(19)是表面死载荷  $p_0$  与空穴半径  $c$  之间的关系式, 它称为空穴分岔方程. 显然, (19)不仅与材料有关, 还与球体的半径  $b$  有关.

### 3 空穴分岔方程的定性分析

#### 3.1 主要结论

对于(17)式中的  $K(R, c)$ , 用  $v = v(s) = (1 + c^3/s^3)^{1/3}$  代替  $K(R, c)$  中的  $s$ , 则(19)变为

$$\varphi_0 = 2\mu c \left[ 1 + \left( \frac{c}{b} \right)^3 \right]^{2/3} \times \int_{(1+(c/b)^3)^{1/3}}^{\infty} \frac{v - v^{-5} \left\{ 1 + \frac{2\varepsilon[v^{-4} - 1] + 3\eta[v^{-4} - 1]^2}{v^3 - 1} \right\}}{v^3 - 1} dv. \quad (23)$$

为了便于应用, 引入下列无量纲记号:

$$\frac{\rho_0}{\mu} = P, \quad \frac{c}{b} = \rho. \quad (24)$$

将(23)式重新记为

$$g(P, \rho, \varepsilon, \eta) = 2\rho(1 + \rho^3)^{2/3} \times \int_{(1+\rho^3)^{1/3}}^{\infty} \frac{v - v^{-5} [1 + \frac{2\varepsilon(v^{-4} - 1) + 3\eta(v^{-4} - 1)^2}{v^3 - 1}]}{v^3 - 1} dv - \rho P = 0. \quad (25)$$

令  $\rho \rightarrow 0^+$ , 则有

$$P_{cr} = \frac{5}{2} + \left[ \frac{40\pi - 51\sqrt{3}}{30\sqrt{3}} \right] \varepsilon + \left[ \frac{53\sqrt{3} - 90\pi}{30\sqrt{3}} + 3\ln 3 \right] \eta, \quad (26)$$

其中  $P_{cr}$  对应于球体内部出现空穴时的无量纲的临界载荷。

因此, 对应于应变能函数(11)的广义 neo-Hookean 材料, 有如下结论:

**结论 1** 对于此类广义 neo-Hookean 材料, 当表面死载荷超过某个有限的临界值(由(26)给出)时, 在球体内部有空穴生成。

当  $\varepsilon = \eta = 0$  时, 得到球体发生空穴分岔时的临界载荷为  $P_{cr} = 2.5$ , 它与 Chou\_Wang 和 Horgan<sup>[2]</sup> 得到的均匀各向同性不可压的 neo-Hookean 材料的临界载荷一致。

对于(25), 显然有  $g(P_{cr}, 0, \varepsilon, \eta) = 0$ 。此外, 不难求得

$$g_P(P_{cr}, 0, \varepsilon, \eta) = 0, \quad g_{\rho\rho}(P_{cr}, 0, \varepsilon, \eta) = -1 < 0, \quad (27)$$

$$g_{\rho\varepsilon}(P_{cr}, 0, \varepsilon, \eta) = g_{\rho\eta}(P_{cr}, 0, \varepsilon, \eta) = g_{\varepsilon\varepsilon}(P_{cr}, 0, \varepsilon, \eta) = 0, \quad (28)$$

$$g_{\varepsilon\eta}(P_{cr}, 0, \varepsilon, \eta) =$$

$$24 \left[ \frac{1}{3} + \left[ \frac{40\pi - 131\sqrt{3}}{45\sqrt{3}} \right] \varepsilon + \left[ \frac{53\sqrt{3} - 90\pi}{45\sqrt{3}} + 3\ln 3 \right] \eta \right]. \quad (29)$$

根据奇点理论<sup>[14]</sup> 中对分岔方程的判别条件, 对于(25)式, 有下面的结论成立:

**结论 2** 当  $g_{\rho\rho\rho}(P_{cr}, 0, \varepsilon, \eta) \neq 0$  时,  $g(P, \rho, \varepsilon, \eta)$  在临界点  $(P_{cr}, 0, \varepsilon, \eta)$  附近等价于具有单边约束条件的正规形  $\pm x^4 - \lambda$ 。

由(25)可知, 对任意的  $P > 0, \rho = 0$  是(25)的平凡解; 当  $P > P_{cr}$  时, 若存在  $\rho > 0$  满足

$$P = 2(1 + \rho^3)^{2/3} \int_{(1+\rho^3)^{1/3}}^{\infty} \frac{v - v^{-5} [1 + \frac{2\varepsilon(v^{-4} - 1) + 3\eta(v^{-4} - 1)^2]}{v^3 - 1}}{v^3 - 1} dv = \varphi(\rho, \varepsilon, \eta), \quad (30)$$

则  $(P, \rho)$  是(25)的非平凡解, 称之为空穴分岔解。

为了研究方程(25)的解在临界点  $(P_{cr}, 0, \varepsilon, \eta)$  附近的局部的定性性质, 将  $\varphi(\rho, \varepsilon, \eta)$  在  $\rho = 0$  处泰勒展开, 当  $\rho \rightarrow 0^+$  时, 得到

$$\varphi(\rho, \varepsilon, \eta) = 2.5 + f(\varepsilon, \eta) + h(\varepsilon, \eta)\rho^3 + O(\rho^4), \quad (31)$$

其中

$$f(\varepsilon, h) = \frac{40\pi - 51\sqrt{3}}{30\sqrt{3}}\varepsilon + \left[ \frac{53\sqrt{3} - 90\pi}{30\sqrt{3}} + 3\ln 3 \right] \eta$$

$$h(\varepsilon, h) = \frac{1}{3} + \frac{40\pi - 131\sqrt{3}}{45\sqrt{3}}\varepsilon + \left[ \frac{53\sqrt{3} - 90\pi}{45\sqrt{3}} + 2\ln 3 \right] \eta$$

用两条直线  $f(\varepsilon, h) = 0$  和  $h(\varepsilon, h) = 0$  把摄动参数平面  $\varepsilon-\eta$  划分为 4 个区域, 如图 1 所示, 其中这 4 个区域表示如下:

$$\Omega_1 = \left\{ (\varepsilon, \eta) : f(\varepsilon, \eta) > 0, h(\varepsilon, \eta) < 0, \eta \geq 0 \right\};$$

$$\Omega_2 = \left\{ (\varepsilon, \eta) : f(\varepsilon, \eta) > 0, h(\varepsilon, \eta) > 0, \eta \geq 0 \right\};$$

$$\Omega_3 = \left\{ (\varepsilon, \eta) : f(\varepsilon, \eta) < 0, h(\varepsilon, \eta) > 0, \varepsilon \geq 0 \right\};$$

$$\Omega_4 = \left\{ (\varepsilon, \eta) : f(\varepsilon, \eta) < 0, h(\varepsilon, \eta) < 0, \varepsilon \geq 0 \right\}.$$

进而我们得到如下结论:

结论 3

(i) 当  $(\varepsilon, \eta)$  属于区域  $\Omega_1$  或  $\Omega_2$ (区域  $\Omega_3$  或  $\Omega_4$ ) 时,  $P_{cr} > (<) 2.5$ , 即此类材料组成的球体与各向同性的 neo-Hookean 材料相比会后(提前)生成空穴;

(ii) 当  $(\varepsilon, \eta)$  属于区域  $\Omega_2$  或  $\Omega_3$ (区域  $\Omega_1$  或  $\Omega_4$ ) 时, 空穴分岔解在临界点附近局部向右(向左)分岔; 并且局部向左分岔空穴分岔解上还存在一个二次转向分岔点

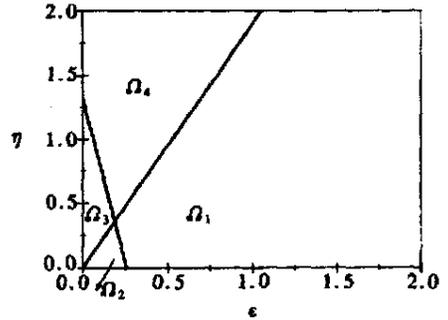


图 1 径向摄动参数  $\varepsilon, \eta$  划分的区域

注  $P_{cr}$  和 2.5 分别是不可压的广义 neo-Hookean 材料和均匀各向同性不可压的 neo-Hookean 材料发生空穴分岔时的临界载荷

证明 根据区域的划分, 不难证明结论(i)成立

(ii) 在区域  $\Omega_2$  或  $\Omega_3$  内, 由于  $h(\varepsilon, \eta) > 0$ , 得到在临界点附近空穴分岔解局部向右分岔, 对于小的  $\rho > 0$ , 容易验证  $\varphi_\rho(\rho, \varepsilon, \eta) > 0$ , 因此空穴分岔解在临界点附近单调增加。而在区域  $\Omega_1$  或  $\Omega_4$  内, 由于有  $h(\varepsilon, \eta) < 0$ , 得到在临界点附近空穴分岔解局部向左分岔。在区域  $\Omega_1$  或  $\Omega_4$  内, 由于  $\varphi_\rho(0, \varepsilon, \eta) = \varphi_{pp}(0, \varepsilon, \eta) = 0$  以及  $\varphi_{ppp}(0, \varepsilon, \eta) = 6h(\varepsilon, \eta) < 0$ , 不难验证: 对充分小的  $\rho$ , 有  $\varphi_\rho(\rho, \varepsilon, \eta) < 0$ ; 此外, 对充分大的  $\rho$ , 有  $\varphi_\rho(\rho, \varepsilon, \eta) > 0$ , 因此, 必存在一个  $\rho_n$ , 使得  $\varphi_\rho(\rho_n, \varepsilon, \eta) = 0$ 。令  $P_n = \varphi(\rho_n, \varepsilon, \eta)$ , 我们得到一个二次转向分岔点  $(P_n, \rho_n)$ 。证毕

3.2 数值例子

下面通过几个数值结果来说明摄动参数在不同区域内球体的空穴生成与增长的情况

在区域  $\Omega_1$  内, 取  $\varepsilon = 2, \eta = 1$ , 可以求得临界载荷和二次转向点的坐标分别为  $P_{cr} = 3.5597$  和  $(3.00607, 0.9220)$ 。在区域  $\Omega_2$  内, 取  $\varepsilon = 0.15, \eta = 0.1$ , 可以求得临界载荷为  $P_{cr} = 2.5699$ 。在区域  $\Omega_3$  中, 取  $\varepsilon = 0.1, \eta = 0.4$ , 可以求得临界载荷为  $P_{cr} = 2.4200$ 。在区域  $\Omega_4$  内, 取  $\varepsilon = 0.2, \eta = 1$ , 可以求得临界载荷为  $P_{cr} = 2.2639$ , 二次转向点的坐标为  $(2.2604, 0.3593)$ 。

这 4 个区域内无量纲的死载荷与空穴半径的曲线分别在图 2~ 图 5 中给出

4 解的稳定性和突变的分析

为了检验(25)的解的稳定性, 下面给出能量分析

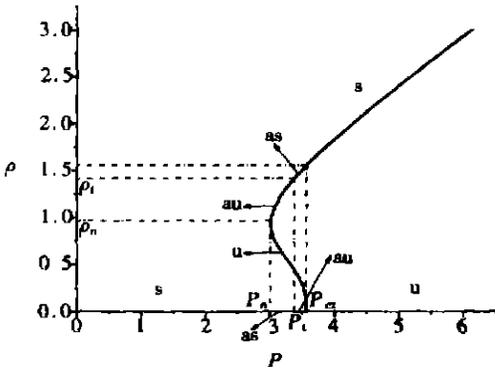


图2 区域  $\Omega_1$  中  $P$  和  $\rho$  的关系曲线

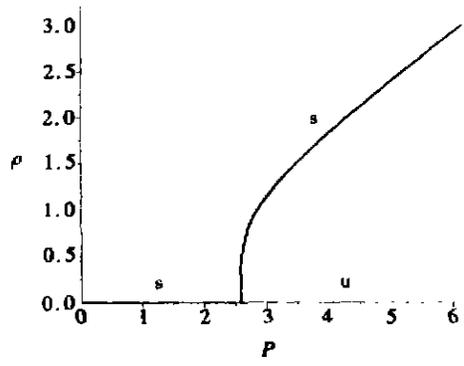


图3 区域  $\Omega_2$  中  $P$  和  $\rho$  的关系曲线

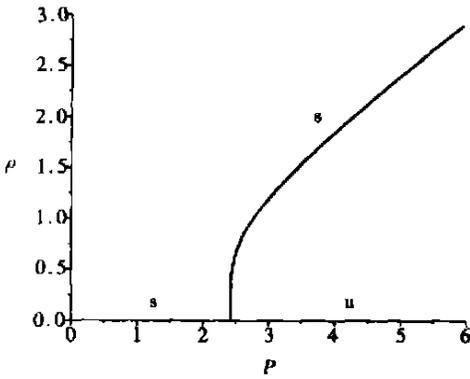


图4 区域  $\Omega_3$  中  $P$  和  $\rho$  的关系曲线

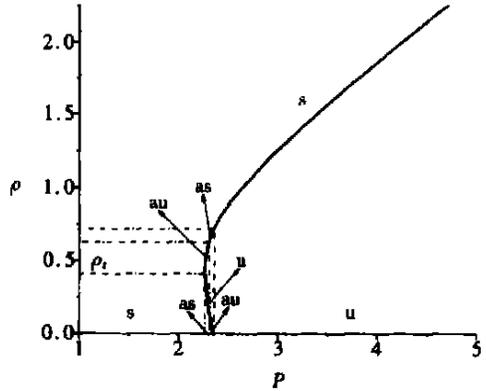


图5 区域  $\Omega_4$  中  $P$  和  $\rho$  的关系曲线

对应于应变能函数(11)的不可压的广义 neo-Hookean 材料,球体的任意平衡构形的总能量为

$$E(c) = 4\pi \int_0^b WR^2 dR - 4\pi b^2 p_0 [r(b) - b] = 4\pi c^3 \int_{[1+(c/b)^3]^{1/3}}^\infty \frac{v^2 W(v)}{(v^3 - 1)^2} dv - 4\pi b^2 p_0 [(b^3 + c^3)^{1/3} - b] \quad (32)$$

(32) 中的第一项是总的应变能,第二项表示表面死载荷所做的功. 将(32)式无量纲化,得到

$$\Lambda(\rho) = \frac{E(\rho)}{(4/3)\pi b^3 \mu} = \alpha(\rho) + P\beta(\rho), \quad (33)$$

其中

$$\alpha(\rho) = \frac{3\rho^3}{\mu} \int_{[1+\rho^3]^{1/3}}^\infty \frac{v^2 W(v)}{(v^3 - 1)^2} dv, \quad (34)$$

$$\beta(\rho) = -3[(1 + \rho^3)^{1/3} - 1]. \quad (35)$$

由(33)可得,  $\Lambda(0) = 0$  以及

$$\Lambda'(0+) = \Lambda''(0+) = 0, \quad \Lambda'(0+) = 6(P_{cr} - P), \quad (36)$$

其中  $\Lambda'$  表示对  $\rho$  的导数. 当  $P < P_{cr}$  时,  $\Lambda(0)$  是一个局部极小值,所以这时的平凡解是稳定的;当  $P > P_{cr}$  时,  $\Lambda(0)$  是一个局部极大值,所以这时的平凡解是不稳定的.

将(33)在  $\rho = 0$  处泰勒展开,得到,当  $\rho \rightarrow 0$  时有

$$\Lambda(\rho) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{40\pi - 131\sqrt{3}}{45\sqrt{3}} \varepsilon + \left( \frac{53\sqrt{3} - 90\pi}{45\sqrt{3}} + 2\ln 3 \right) \eta \right] \rho^6 + (\rho^9). \quad (37)$$

由结论 3 可知, (25) 的平凡解曲线在点  $\rho = 0, P = P_{cr}$  处发生分岔. (37) 说明, 若分岔方向向左(即参数  $(\varepsilon, \eta)$  位于区域  $\Omega_1$  或  $\Omega_4$  内), 则在  $\rho = 0, P = P_{cr}$  附近, 在空穴分岔解曲线上  $\Lambda(\rho) > 0$ , 且总能量取局部极大值, 因而, 此时的空穴分岔解是不稳定的; 类似地, 若分岔方向向右(区域  $\Omega_2$  或  $\Omega_3$  内), 则有  $\Lambda(\rho) < 0$ , 此时的空穴分岔解是稳定的. 区域  $\Omega_1$  和  $\Omega_3$  内的能量与空穴半径之间的关系曲线的例子分别如图 6 和图 7 所示. 区域  $\Omega_2$  和区域  $\Omega_4$  内的能量曲线分别与区域  $\Omega_3$  和区域  $\Omega_1$  的类似.

综上所述, 若参数  $(\varepsilon, \eta)$  在区域  $\Omega_2$  或  $\Omega_3$  内, 当  $p < P_{cr}$  时, (25) 的平凡解  $\rho = 0$  是稳定的; 当  $P > P_{cr}$  时, 平凡解是不稳定的. 空穴生成后, 空穴分岔解是局部单调上升的, 且是稳定的.

参数  $(\varepsilon, \eta)$  在区域  $\Omega_1$  或  $\Omega_4$  内, 由于空穴分岔解的解支上出现了二次转向点, 解的稳定性发生了变化. 平衡解的个数与  $P$  的取值有关: 当  $0 < P < P_n$  时, (25) 只有一个稳定的平凡解; 当  $P_n < P < P_{cr}$  时, (25) 除有一个稳定的平凡解  $\rho = 0$  外还有两个空穴分岔解  $\rho_1$  和  $\rho_2$ , 其中  $0 < \rho_1 < \rho_c, \rho_c < \rho_2$ , 容易求得  $\rho_1$  和  $\rho_2$  分别使得总能量达到局部极大和极小, 因此解  $\rho_1$  和  $\rho_2$  分别是不稳定

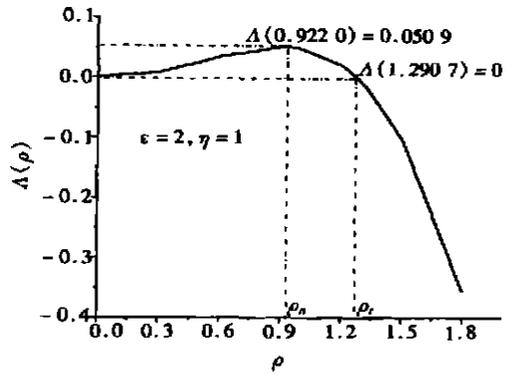


图 6 区域  $\Omega_1$  和  $\Omega_4$  中球体的能量曲线的例子

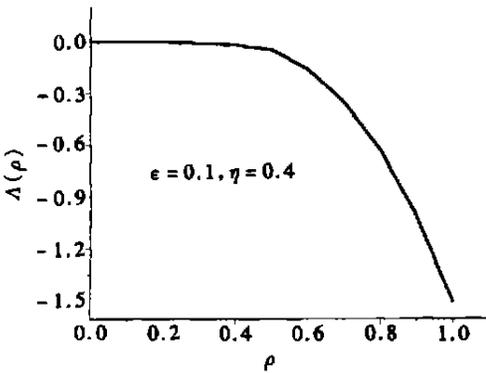


图 7 区域  $\Omega_2$  和  $\Omega_3$  中球体的能量曲线的例子

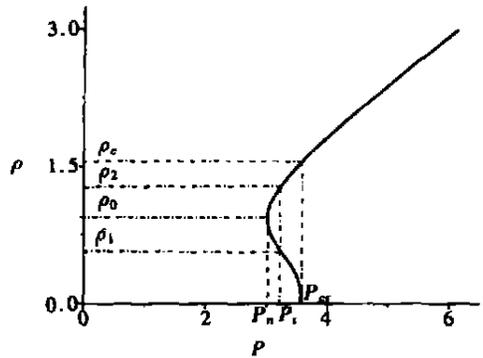


图 8 区域  $\Omega_1$  和  $\Omega_4$  中空穴分岔方程的稳定性和突变的例子

的和稳定的; 当  $P > P_{cr}$  时, (25) 有一个不稳定的平凡解  $\rho = 0$  和一个稳定的空穴分岔解  $\rho > \rho_c$ . 如图 8 所示. 特别地, 当  $P_n < P < P_{cr}$  时, (25) 有两个稳定的平衡状态. 容易求得, 当  $P_n < P < P_t$  时, 平凡解使得总能量达到最小值, 此时平凡解是实际稳定的平衡状态. 当  $P_t < P < P_{cr}$  (即  $\rho_c < \rho$ ) 时, 空穴分岔解使总能量达到最小值, 此时的空穴分岔解是实际稳定的平衡状态.

因此, 当参数  $(\varepsilon, \eta)$  在区域  $\Omega_1$  或  $\Omega_4$  内时, 空穴分岔方程可以发生突变: 若死载荷  $P$  拟静态由小变大, 则当  $P < P_t$  时, 球体内部没有空穴生成; 而当  $P$  超过  $P_t$  时, 此时球体内部发生了

突变, 有一个相对较大的空穴生成。反之, 若表面死载荷  $P$  拟静态由大变小时, 只有当  $P$  减少到小于  $P_c$  时, 球体内部空穴半径才会突变到 0, 如图 8 所示。

注 图 2~ 图 5 中, “s”、“u”、“as” 和 “au” 分别表示“稳定的”、“不稳定的”、“实际稳定的”和“实际不稳定的”。

## 5 结 论

本文考虑当 neo-Hookean 材料具有某种缺陷时得到的一类广义 neo-Hookean 材料。在结论 1 中证明了在表面拉伸死载荷作用下, 由这种材料组成的实心球可以发生空穴分岔, 并且得到了空穴分岔方程; 在结论 2 中用奇点理论的方法证明了在临界点的邻域内空穴分岔方程等价于具有单边约束条件的正规形; 当摄动参数属于不同区域时, 在结论 3 中得到了空穴分岔方程的定性性质, 证明了在区域 3 或 4 内会提前发生空穴分岔, 在区域 1 或 4 内空穴分岔方程出现二次转向分岔现象。这说明 neo-Hookean 材料经过某些摄动后, 解的局部的定性性质会发生很大变化, 这些是以前文献中没有的。最后利用最小势能原理分析了解的稳定性和实际稳定的平衡状态。

### [参 考 文 献]

- [1] Ball J M. Discontinuous equilibrium solutions and cavitations in nonlinear elasticity[J]. Philos Trans Roy Soc Lond Ser A, 1982, **306**(3): 557—610.
- [2] Chou Wang M\_S, Horgan C O. Void nucleation and growth for a class of incompressible nonlinear elastic materials[J]. International Journal of Solids and Structures, 1989, **25**(11): 1239—1254.
- [3] Polignone D A, Horgan C O. Cavitation for incompressible nonlinearly elastic spheres[J]. Journal of Elasticity, 1993, **33**(1): 27—65.
- [4] Chung, D\_T, Horgan C O, Abeyaratne R. A note on a bifurcation problem in finite plasticity related to void nucleation[J]. International Journal of Solids and Structures, 1987, **23**(8): 983—988.
- [5] Horgan C O, Polignone D A. Cavitation in nonlinear elastic solids: A review[J]. Applied Mechanics Review, 1995, **48**(8): 471—485.
- [6] 任九生, 程昌钧. 不可压超弹性材料中的空穴分叉[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(8): 783—789.
- [7] 尚新春, 程昌钧. 超弹性材料中的球形空穴分岔[J]. 力学学报, 1996, **28**(6): 751—755.
- [8] SHANG Xin\_chun, CHENG Chang\_jun. Exact Solution for cavitated bifurcation for compressible hyperelastic materials[J]. International Journal of Engineering Science, 2001, **39**(11): 1101—1117.
- [9] REN Jiu\_sheng, CHENG Chang\_jun, SHANG Xin\_chun. The growth of a void in a rubber rectangular plate under uniaxial extension[J]. Journal of Shanghai University (English Edition), 2001, **5**(3): 177—182.
- [10] HOU Hang\_sheng. A study of combined asymmetric and cavitated bifurcation in neo-Hooke material under symmetric dead loading[J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, **60**(1): 1—7.
- [11] REN Jiu\_sheng, CHENG Chang\_jun. Cavitated bifurcation for composed compressible hyperelastic materials[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2002, **15**(3): 208—213.
- [12] REN Jiu\_sheng, CHENG Chang\_jun. Cavitation for incompressible anisotropic hyperelastic materials[J]. Journal of Shanghai University (English Edition), 2002, **6**(3): 185—190.
- [13] YUANG Xue\_gang, ZHU Zheng\_you, CHENG Chang\_jun. Void formation and growth for a class of compressible hyperelastic materials[J]. Journal of Shanghai University (English Edition), 2004, **8**(1): 13—18.
- [14] Golubitsky M, Schaeffer D G. Singularities and Groups in Bifurcation Theory [M]. New York:

Springer-Verlag, 1985, 463.

## Qualitative Study of Cavitated Bifurcation for a Class of Incompressible Generalized neo-Hookean Spheres

YUAN Xue\_gang<sup>1,2</sup>, ZHU Zheng\_you<sup>1</sup>

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Department of Mathematics,  
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China;

2. Department of Mathematics and Informational Science, Yantai University,  
Yantai, Shandong 264005, P. R. China)

**Abstract:** The problem of spherical cavitated bifurcation was examined for a class of incompressible generalized neo-Hookean materials, in which the materials may be viewed as the homogeneous incompressible isotropic neo-Hookean material with radial perturbations. The condition of void nucleation for this problem was obtained. In contrast to the situation for a homogeneous isotropic neo-Hookean sphere, it is shown that not only there exists a secondary turning bifurcation point on the cavitated bifurcation solution which bifurcates locally to the left from trivial solution, and also the critical load is smaller than that for the material with no perturbations, as the parameters belong to some regions. It is proved that the cavitated bifurcation equation is equivalent to a class of normal forms with single-sided constraints near the critical point by using singularity theory. The stability of solutions and the actual stable equilibrium state were discussed respectively by using the minimal potential energy principle.

**Key words:** incompressible generalized neo-Hookean material; cavitated bifurcation; normal form; stability and catastrophe