文章编号: 1000_0887(2005) 02_0183_04

Eady 模型的非线性稳定性*

刘永明,　邱令存

(华东师范大学 数学系, 上海 200062)

(我刊原编委许政范推荐)

摘要:　Poincaré 型的积分不等式在三维准地转流的(在 Arnold 第二定理意义下的) 非线性稳定性的研究中起着重要的作用· 周期带域上 Eady 模型是该方法的应用中最重要的一种情况, 但至今所得的最好的非线性稳定性条件和线性稳定的条件不一致, 两者仅在带域的周期无限大时才一致·

为解决这个差异, 利用周期带域上的 Eady 模型的动量守衡的性质, 通过变分方法和积分的精细估计, 建立一个加强的 Poincaré 积分不等式, 从而证明了 Eady 模型的线性稳定意味着非线性稳定·

关　键　词:　Poincaré 不等式;　Eady 模型;　非线性稳定性
中图分类号:　O175.21; O178　　　文献标识码:　A

引　　言

Eady 模型是三维空间连续层结的准地转流体运动中的一个重要例子[1]· 近年来在 Eady 模型的非线性稳定性方面得到了一些结果[2,3]· 其中文献[3] 的结果改进了文献[2] 的结果, 使之在某种意义下是最好的[4]· 本文通过建立一个加强的 Poincaré 型的积分不等式, 改进了文献[3] 的结果, 证明了 Eady 模型的线性稳定意味着非线性稳定·

1　Eady 模型与非线性稳定性

三维空间连续层结的准地转流的控制方程是

$$P_t + \partial[\Phi, P] = 0, \tag{1}$$

$$P \equiv \Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \frac{1}{S}\Phi_{zz} + f, \tag{2}$$

其中 $P = P(x, y, z, t)$ 是涡度, $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ 是流函数, $\partial[a, b] = a_x b_y - a_y b_x$ 是 Jacobi 算子, S 是静态稳定度(常数), f 是 Coriolis 参数(常数)· 不失一般性, 取密度为 1, 区域 $\Omega = D \times [-H, H]$, 周期带状区域 $D = [-X, X] \times [-Y, Y]$·

在边界 $y = \pm Y$ 上边界条件是法向速度为零及环量守恒:

$$\Phi_x = 0, \ \frac{\partial}{\partial t}\int_{-X}^{X} \Phi_y \mathrm{d}x = 0· \tag{3}$$

* 收稿日期:　2002_10_25;　修订日期:　2004_09_14
基金项目:　上海市重点学科基金资助项目
作者简介:　刘永明(1950—), 男, 浙江人, 教授, 博士生导师(联系人. Tel: + 86_21_62251015; Fax: + 86_21_62232537; E_mail: ymliu@math.ecnu.edu.cn)·

在边界 $z = \pm H$ 上边界条件是:

$$\Phi_{zt} + \partial[\Phi, \Phi_z] = 0. \tag{4}$$

Eady 模型的稳态解的流函数的一般形式是

$$\Lambda(y - y_0)(z - z_0) + c, \tag{5}$$

其中 $\Lambda \neq 0$, y_0、z_0 及 c 是常数.

定义扰动为

$$q = P - f, \quad \psi = \Phi - (\Lambda(y - y_0)(z - z_0) + c). \tag{6}$$

我们的目的是在任意幅度的初始扰动下求 Eady 流(5)的非线性稳定的条件.

记 $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ 及

$$\mathscr{F}[\psi'] \equiv \int_\Omega \left[|\nabla\psi'|^2 + \frac{1}{S}\psi_z'^2 \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \frac{1}{HS}\int_D [\psi'^2(x, y, H, t) + \psi'^2(x, y, -H, t)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

则在文献[3]中的 Eady 问题的非线性稳定的充分条件归结为一个 Poincaré 型的积分不等式:

$$\mathscr{F}[\psi'] \geqslant \lambda \int_\Omega \psi'^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{7}$$

其中 ψ' 由 $\psi' = \psi - \psi(x, y, z, 0)$ 定义. 关于 ψ' 应满足的条件是从方程(1)~(4)推出,为:

$$\begin{cases} \int_D \psi' \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \\ \psi_x'(x, \pm Y, z, t) = 0, \\ \psi'(-X, y, z, t) = \psi'(X, y, z, t). \end{cases} \tag{8}$$

而 $\lambda > 0$ 就是 Eady 模型的非线性稳定的充分条件.

在文献[2]及[3]中得到的非线性稳定的充分条件分别是

$$\lambda = \lambda_2 \equiv \frac{\pi^2}{4Y^2} - \frac{5}{H^2 S} > 0, \quad \lambda = \lambda_3 \equiv \frac{\pi^2}{4Y^2} - \frac{\mu_1^2}{H^2 S} > 0, \tag{9}$$

其中 $\mu_1^2 = 1.439\,228\,839\,89\cdots$, 满足方程 $\mu_1 \tanh \mu_1 = 1$. 而在本文中将得到的非线性稳定的充分条件加强为

$$\lambda_1 \equiv \frac{\pi^2}{X^2} + \frac{\pi^2}{4Y^2} - \frac{\mu_1^2}{H^2 S} > 0, \tag{10}$$

条件(10)恰好是线性稳定的充要条件[1].

已知在条件(8)下, 当 $\lambda = \lambda_3$ 时不等式(7)是最好可能的. 但在文献[3]中推导 Poincaré 型的积分不等式(7)时没有利用一个由动量守恒推得的条件:

$$\iint_D [\psi'(x, Y, z, t) - \psi'(x, -Y, z, t)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0. \tag{11}$$

因此, 考虑条件(8)和(11)时, 不等式(7)还可以得到加强. 从而非线性稳定性条件也得以加强.

2 加强的 Poincaré 不等式

定义 $\varphi(x, y, z) = \psi'(x, y, z, t)$, 并令

$$v(x, z) = \frac{1}{2X}\int_{-X}^{X} \varphi(x, y, z)\,\mathrm{d}x, \quad u(x, y, z) = \varphi(x, y, z) - v(y, z). \tag{12}$$

于是由条件(8)、(10)及关系式(12)可得到 u 和 v 应满足的条件:

$$\int_{-X}^{X} u\,\mathrm{d}x = 0,\quad u(x, \pm Y, z) = 0,\quad u(-X, y, z) = u(X, y, z); \tag{13}$$

$$\int_{-Y}^{Y} v\,\mathrm{d}y = 0,\quad \int_{-H}^{H}[v(Y, z) - v(-Y, z)]\,\mathrm{d}z = 0. \tag{14}$$

由条件(13)可得不等式:

$$\mathscr{F}[u] \geqslant \lambda_1 \int_{\Omega} u^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{15}$$

其中 λ_1 由(10)式左边等式定义.

由条件(14)经过精细的积分估计可得不等式:

$$\mathscr{F}[v] \geqslant \lambda_0 \int_{\Omega} v^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{16}$$

其中

$$\lambda_0 = \frac{5\pi^2}{8Y^2} - \frac{1}{2H^2S} - \sqrt{\left(\frac{3\pi^2}{8Y^2} - \frac{1}{2H^2S}\right)^2 + \frac{\mu_1^2(\mu_1^2 - 1)}{H^4S^2}}. \tag{17}$$

从而由 u 和 v 的积分正交性,综合不等式(15)~(16)得到加强的 Poincar 不等式:

$$\mathscr{F}[\psi'] = \mathscr{F}[\psi] \geqslant \min(\lambda_1, \lambda_0)\int_{\Omega} \varphi^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$\min(\lambda_1, \lambda_0)\int_{\Omega} \psi'^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tag{18}$$

其中 λ_0 由(17)式定义.

3 结　　论

由于对于周期区域 D,有 $X/Y \geqslant 2$, 因此当

$$\frac{2\pi^2H^2S}{X^2} \leqslant \mu_1^2 + 1 \tag{19}$$

时,得 $\lambda_0 \geqslant \lambda_1$; 而当 $2\pi^2H^2S/X^2 > \mu_1^2 + 1$ 时, $\lambda_1 > 1/(H^2S) > 0$, $\lambda_0 > 1/(H^2S) > 0$. 因此,不管条件(19)成立与否,当条件(10)成立时,(18)式的右边系数 $\min(\lambda_1, \lambda_0) > 0$.

这样,我们证明了

定理　若 Eady 模型的稳态流(5)满足线性稳定的充要条件(10):

$$\lambda_1 \equiv \frac{\pi^2}{X^2} + \frac{\pi^2}{4Y^2} - \frac{\mu_1^2}{H^2S} > 0,$$

其中 $\mu_1^2 = 1.439\ 228\ 839\ 89\cdots$, 满足方程 $\mu_1 \tanh \mu_1 = 1$; 则这稳态流也是非线性稳定的.

[参 考 文 献]

[1] Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics [M]. 2nd ed. New York: Springer, 1987, 1—624.

[2] MU Mu, Shepherd T G. Nonlinear stability theorem of Eady's model[J]. J Atmos Sci, 1994, **51**(23): 3427—3436.

[3] L U Yong_ming, MU Mu. Nonlinear stability theorem for Eady's model of quasigeostrophic baroclinic flow[J]. J Atmos Sci, 1996, **53**(10): 1459—1463.

[4] L U Yong_ming, MU Mu, Shepherd T G. Nonlinear stability of continuously stratified quasi_geostrophic flow[J]. J Fluid Mech, 1996, **325**(1): 419—439.

Nonlinear Stability for Eady' s Model

L U Yong_ming, Q U Ling_cun
(Deptartment of Mathematics , East China Normal University ,
Shanghai 200062, P. R . China)

Abstract: Poincar type integral inequality plays an important role in the study of nonlinear stability (in the sense of Arnold' s second theorem) for three_dimensional quasi_geostophic flow. The nonlinear stability of Eady' s model is one of the most important cases in the application of the method. But the best nonlinear stability criterion obtained so far and the linear stability criterion are not coincident. The two criteria coincide only when the period of the channel is infinite.

To fill this gap, the enhanced Poincar inequality was obtained by considering the additional conservation law of momentum and by rigorous estimate of integral inequality. So the new nonlinear stability criterion was obtained, which shows that for Eady' s model in the periodic channel, the linear stable implies the nonlinear stable.

Key words: Poincar inequality; Eady' s model; nonlinear stability