应用数学和力学, 第 26 卷 第 2 期(2005 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 02_0187_06

变质量非完整系统的形式不变性与 Lie 对称性*

方建会， 陈培胜， 张 军

(石油大学 应用物理系, 山东 东营 257061)

(马兴瑞推荐)

摘要: 研究变质量非完整系统的形式不变性和 Lie 对称性• 给出变质量非完整系统在无限小变换下形式不变性和Lie 对称性的定义、判据及存在守恒量的定理, 得到形式不变性和 Lie 对称性的关系, 并举例说明结果的应用•

关 键 词: 变质量; 非完整系统; 形式不变性; Lie 对称性

中图分类号: O316 文献标识码: A

引 言

力学系统的对称性与守恒量之间有着密切的联系• 寻求力学系统守恒量的近代方法, 主要是研究Hamilton 作用量在无限小变换下不变性的Noether 对称性方法[1], 和研究运动微分方程在无限小变换下不变性的Lie 对称性方法[2]• 近十多年来, Noether 对称性理论和 Lie 对称性理论的研究取得了一系列重要成果[3~12]• 形式不变性是不同于Noether 对称性和 Lie 对称性的一种新的对称性, 它是指运动方程中出现的动力学函数在经无限小变换后仍满足原来的方程[13]• 关于常质量力学系统形式不变性的研究已取得了一些结果[14~17]• 文献[18]研究了变质量完整系统 Gibbs_Appell 方程的形式不变性与Noether 对称性• 本文研究变质量非完整系统的形式不变性与 Lie 对称性, 给出变质量非完整系统形式不变性和 Lie 对称性的定义、判据和守恒量, 得到形式不变性和Lie 对称性的关系, 并举例说明结果的应用•

1 变质量非完整系统的形式不变性

研究 N 个质点组成的力学系统• 在时刻 t, 第 i 个质点的质量为 $m_i(i = 1, 2, \ldots, N)$, 在时刻 $t + \mathrm{d}t$, 由 i 质点分离(或并入) 的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$, m_i 有一般的形式 $m_i = m_i(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$[10]• 设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s = 1, 2, \ldots, n)$ 确定, 系统的运动受到 g 个理想Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, g), \tag{1}$$

则系统运动微分方程为[10]

* 收稿日期: 2003_03_10; 修订日期: 2004_09_24
作者简介: 方建会(1957—) , 男, 兰州人, 教授, 中国数学力学物理学高新技术交叉研究学会理事, 已发表论文 60 多篇(联系人. Tel: + 86_546_8393088; E_mail: fangjh@hdpu.edu.cn)•

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + P_s + \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{2}$$

其中 L 为 Lagrange 函数, Q_s 为非势广义力, λ_β 为约束乘子, P_s 为广义反推力, 有

$$P_s = \sum_{i=1}^{N}\left[\dot{m}_i(\boldsymbol{u}_i + \dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_s}\right)\right], \tag{3}$$

$\boldsymbol{u}_i$ 为分离或并入 m_i 的微粒 $\mathrm{d}m_i$ 相对 m_i 的速度. 假设系统非奇异, 即

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k}\right) \neq 0. \tag{4}$$

在运动微分方程积分之前可由方程(1)和(2)求出 λ_β 作为$(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 的函数, 于是方程(2)可表为

$$E_s(L) = Q_s + P_s + \Lambda_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{5}$$

其中 E_s 为 Euler 算子

$$E_s = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{6}$$

$$\Lambda_s = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}. \tag{7}$$

方程(5)为与非完整系统(1)、(2)相应的完整系统的运动方程.

取无限小变换

$$t^* = t + \Delta t,\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{8}$$

在一级近似下, 其展开式为

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}),\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}), \tag{9}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0、ξ_s 为无限小单参数群变换的生成元. 在变换(9)下, L、Q_s、P_s、λ_β、f_β 和 Λ_s 变成

$$L^* = L\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right),\ Q_s^* = Q_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right),$$

$$P_s^* = P_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*2}}\right),\ \lambda_\beta^* = \lambda_\beta\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right),$$

$$f_\beta^* = f_\beta\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right),\ \Lambda_s^* = \Lambda_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right).$$

定义 1 如果在无限小变换(9)下, 方程(1)和(5)的形式保持不变, 即

$$f_\beta^* = f_\beta\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \cdots, g), \tag{10}$$

$$E_s(L^*) = Q_s^* + P_s^* + \Lambda_s^* \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{11}$$

则称这种不变性为变质量非完整系统(1)、(2)的形式不变性.

取无限小变换的生成元向量

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n}\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{12}$$

它的一次扩展

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{s=1}^{n}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \tag{13}$$

二次扩展

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \sum_{s=1}^{n}(\ddot{\xi}_s - 2\ddot{q}_s\dot{\xi}_0 - \dot{q}_s\ddot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_s}. \tag{14}$$

将 L^*、Q_s^*、P_s^*、Λ_s^* 和 f_β^* 展开, 有

$$L^* = L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon[X^{(1)}(L)] + O(\varepsilon^2), \tag{15}$$

$$Q_s^* = Q_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon[X^{(1)}(Q_s)] + O(\varepsilon^2), \tag{16}$$

$$P_s^* = P_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon[X^{(2)}(P_s)] + O(\varepsilon^2), \tag{17}$$

$$\Lambda_s^* = \Lambda_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon[X^{(1)}(\Lambda_s)] + O(\varepsilon^2), \tag{18}$$

$$f_\beta^* = f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon[X^{(1)}(f_\beta)] + O(\varepsilon^2). \tag{19}$$

判据 1　对变质量非完整系统(1)、(2), 如果无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s 满足如下等式

$$X^{(1)}(f_\beta(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})) = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, g), \tag{20}$$

$$E_s(X^{(1)}(L)) - X^{(1)}(Q_s + \Lambda_s) - X^{(2)}(P_s) = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{21}$$

则系统在无限小变换(9)下是形式不变的.

证明　将式(19)代入式(10), 去掉 ε^2 及更高阶项, 并注意到式(1)便可得式(20). 将式(15)~(18)代入式(11), 去掉 ε^2 及更高阶项, 并注意到式(5)便可得式(21).

系统的形式不变性在一定条件下可导致守恒量.

定理 1　在无限小变换(9)下, 如果变质量非完整系统(1)、(2)是形式不变的, 且存在规范函数 $G_F = G_F(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)(Q_s + P_s + \Lambda_s) = -\dot{G}_F, \tag{22}$$

则系统存在如下守恒量

$$I = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_F = \mathrm{const}. \tag{23}$$

证明　式(23)对 t 求导后将式(22)代入并注意到式(5)便可得证.

2　变质量非完整系统的 Lie 对称性

方程(5)可写为

$$F_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) = E_s(L) - Q_s - P_s - \Lambda_s = 0. \tag{24}$$

Lie 方法的基本思想是使运动微分方程(24)在无限小变换(9)下保持不变.

定义 2　如果运动微分方程(24)在无限小变换(9)下保持不变, 即

$$F_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*2}}\right) = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{25}$$

则称这种不变性为运动微分方程(24)的 Lie 对称性.

展开 F_s 有

$$F_s\left(t^*, \boldsymbol{q}^*, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^{*2}}\right) = F_s(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \ddot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon X^{(2)}(F_s) + O(\varepsilon^2)$$

$$(s = 1, 2, \cdots, n). \tag{26}$$

判据 2　对变质量非完整系统(1)、(2), 如果无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s 满足式(20)和等式

$$X^{(2)}(E_s(L)) - X^{(1)}(Q_s + \Lambda_s) - X^{(2)}(P_s) = 0, \tag{27}$$

则相应的不变性是系统的 Lie 对称性.

证明　将式(26)和(24)代入式(25), 去掉 ε^2 及更高阶项, 便可得到式(27).

系统 Lie 对称性导致的守恒量由下述定理给出.

定理 2 在无限小变换(9)下，如果变质量非完整系统(1)、(2)是 Lie 对称性的，且存在规范函数 $G_L = G_L(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ 满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0 + X^{(1)}(L) + \sum_{s=1}^{n}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)(Q_s + P_s + \Lambda_s) = -\dot{G}_L, \tag{28}$$

则系统存在如下守恒量

$$I = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_L = \mathrm{const}. \tag{29}$$

证明 式(29)对 t 求导后将式(28)代入，并注意到式(5)便可得证。

3 形式不变性与 Lie 对称性的关系

由式(21)和式(27)可知，变质量非完整力学系统的形式不变性与 Lie 对称性一般来说是不同的。关于变质量非完整力学系统的形式不变性与 Lie 对称性之间的关系有如下定理：

定理 3 如果变质量非完整系统(1)、(2)在无限小变换(9)下是形式不变的，则当无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s 满足式(27)时，形式不变性也是 Lie 对称性，否则，形式不变性不是 Lie 对称性。

定理 4 如果变质量非完整系统(1)、(2)在无限小变换(9)下是 Lie 对称性的，则当无限小变换的生成元 ξ_0、ξ_s 满足式(21)时，Lie 对称性也是形式不变性，否则，Lie 对称性不是形式不变性。

变质量非完整力学系统的形式不变性和 Lie 对称性导致的守恒量，分别由定理 1 和定理 2 给出。如果变质量非完整力学系统在给定无限小变换(9)下，既具有形式不变性又具有 Lie 对称性，由定理 1 和定理 2 知，形式不变性和 Lie 对称性导致相同的守恒量。

4 算 例

一变质量质点的质量为 $m(t) = m_0(1-t)$（m_0 是常数），Lagrange 函数为

$$L = m_0(1-t)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)/2; \tag{30}$$

非势广义力为

$$Q_1 = -m_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)/(t(1+t^2)),\quad Q_2 = -m_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)/(1+t^2); \tag{31}$$

微粒分离的相对速度为

$$\boldsymbol{u} = -\dot{\boldsymbol{r}} = -(\dot{q}_1\boldsymbol{i} + \dot{q}_2\boldsymbol{j}); \tag{32}$$

所受的非完整约束为

$$f = \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 = 0, \tag{33}$$

试研究其形式不变性和 Lie 对称性。

由式(3)可知

$$P_1 = P_2 = 0. \tag{34}$$

方程(5)给出

$$\begin{cases} m_0(1-t)\ddot{q}_1 - m_0\dot{q}_1 = -m_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)/(t(1+t^2)) - \lambda t, \\ m_0(1-t)\ddot{q}_2 - m_0\dot{q}_2 = -m_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)/(1+t^2) + \lambda. \end{cases} \tag{35}$$

由式(33)和(35)可解得

$$\lambda = m_0(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)/(1+t^2), \tag{36}$$

故有

$$Q_1+P_1+\Lambda_1=-m_0(\dot{q}_1-\dot{q}_2)/t,\quad Q_2+P_2+\Lambda_2=0. \tag{37}$$

取无限小变换生成元

$$\xi_0=0,\quad \xi_1=0,\quad \xi_2=1, \tag{38}$$

则式(20)、(21)满足,故对(38)系统具有形式不变性. 由于无限小变换生成元(38)也满足式(27),根据定理3,这个形式不变性也是 Lie 对称性. 由式(22)或(28)可求出 $G_F=G_L=0$,因此系统具有守恒量

$$I=m_0(1-t)\dot{q}_2=\mathrm{const}. \tag{39}$$

若取无限小变换生成元

$$\xi_0=0,\quad \xi_1=1,\quad \xi_2=0, \tag{40}$$

则式(20)、(21)、(27)也都能满足,故它是系统的形式不变性又是系统的 Lie 对称性. 但对(40)找不到相应的规范函数,故它不能导致守恒量.

[参 考 文 献]

[1] Noether A E. Invariant variantions problem[J]. Nachr Akad Wiss Göttingen Math Phys, 1918, (2): 235－257.

[2] Lutzky M. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. J Phys A, 1979, **12**(7): 973－981.

[3] 刘端. 非完整非保守动力学系统的 Noether 定理及其逆定理[J]. 中国科学, A 辑, 1990, **20**(11): 1189－1197.

[4] 李子平. 经典和量子约束系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1993.

[5] 赵跃宇, 梅凤翔. 关于力学系统的对称性与不变量[J]. 力学进展, 1993, **23**(3): 360－372.

[6] 梅凤翔. Birkhoff 系统的 Noether 理论[J]. 中国科学, A辑, 1993, **23**(7): 709－717.

[7] 赵跃宇. 非保守力学系统的 Lie 对称性和守恒量[J]. 力学学报, 1994, **26**(3): 380－384.

[8] 梅凤翔, 吴润衡, 张永发. 非Четаев型非完整系统 Lie 对称性与守恒量[J]. 力学学报, 1998, **30**(4): 468－474.

[9] 梅凤翔. 变质量完整系统的 Lie 对称性与守恒量[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(6): 592－596.

[10] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[11] 方建会. 二阶非Четаев 非完整系统的守恒律[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(7): 755－758.

[12] 方建会. 事件空间中二阶非Четаев 型非完整系统的守恒律[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(1): 82－86.

[13] MEI Feng_xiang. Form invariance of Appell equations[J]. Chinese Physics, 2001, **10**(3): 177－180.

[14] WANG Shu_yong, MEI Feng_xiang. On the form invariance of Nielsen equations[J]. Chinese Physics, 2001, **10**(5): 373－375.

[15] 陈向炜, 罗绍凯, 梅凤翔. 约束 Birkhoff 系统的形式不变性[J]. 应用数学和力学, 2002, **23**(1): 47－51.

[16] WANG Shu_yong, MEI Feng_xiang. Form invariance and Lie symmetry of equations of non_holonomic systems[J]. Chinese Physics, 2002, **11**(1): 5－8.

[17] 方建会, 薛庆忠, 赵嵩卿. 非保守力学系统 Nielsen 方程的形式不变性[J]. 物理学报, 2002, **51**(10): 2183－2185.

[18] 李仁杰, 乔永芬, 孟军. 变质量完整系统 Gibbs_Appell 方程的形式不变性[J]. 物理学报, 2002, **51**(1): 1－5.

Form Invariance and Lie Symmetry of Variable Mass Nonholonomic Mechanical System

FANG Jian_hui, CHEN Pei_sheng, ZHANG Jun
(Department of Applied Physics, University of Petroleum,
Dongying, Shangdong 257061, P. R. China)

Abstract: The form invariance and Lie symmetry of a variable mass nonholonomic mechanical system is studied. The definition and the criterion and the conserved quantity of form invariance and Lie symmetry for the variable mass nonholonomic mechanical system are given. The relation between the form invariance and Lie symmetry is obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Key words: variable mass; nonholonomic system; form invariance; Lie symmetry