

文章编号: 1000-0887(2005) 02_0193_08

具时滞的二维神经网络模型的分支^{*}

魏俊杰¹, 张春蕊², 李秀玲³

- (1. 哈尔滨工业大学 数学系, 哈尔滨 150001;
2. 东北林业大学 森林植物生态学教育部重点实验室, 哈尔滨 150040;
3. 长春税务学院 基础部, 长春 130022)

(我刊原编委林宗池推荐)

摘要: 研究了一类具时滞的二维神经网络模型. 通过对该模型的特征方程根的分布分析, 在适当的参数平面上给出了分支图. 得到了 pitchfork 分支曲线是一条直线, 进而研究了每个平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性. 最后, 利用规范性方法和中心流形理论, 得到了 Hopf 分支的分支方向和分支周期界的稳定性.

关键词: 神经网络; 中心流形; pitchfork 分支; Hopf 分支
中图分类号: O175.5 **文献标识码:** A

引 言

人们为了更好地理解人工神经网络的动力学性质, 研究了最简单的具时滞的无自连接(自反馈)的二维神经网络模型

$$\begin{cases} u_1'(t) = -\mu_1 u_1(t) + aF(u_2(t - \tau_2)), \\ u_2'(t) = -\mu_2 u_2(t) + bG(u_1(t - \tau_1)) \end{cases} \quad (1)$$

的稳定性与分支问题. 例如, 文献[1]利用离散的 Liapunov 函数的方法研究了(1)的缓慢振动周期解的大范围存在性问题; 文献[2]以时滞 $\tau = \tau_1 + \tau_2$ 为参数, 在 $F = G$ 的假设下, 研究了(1)的局部 Hopf 分支的存在性及分支周期解的性质; 文献[3]在 $\mu_1 = \mu_2$ 及 $F = G$ 的假设下也研究了(1)的 Hopf 分支的性质. 最近, 文献[4]经过对特征方程的仔细分析, 得到了(1)的分支图, 并且利用文献[5]的关于泛函微分方程的全局 Hopf 分支理论, 以 $abF'(0)G'(0)$ 为参数研究了(1)的全局 Hopf 分支. 文献[4]得到的分支图如图 1 所示.

在 $(0, 0)$ 是(1)的平衡解的假设下, 当 $(\mu_1 \mu_2, abF'(0)G'(0)) \in D_1$ 时, 对所有的 $\tau \geq 0$, (1)的零解是渐近稳定的; 当 $(\mu_1 \mu_2, abF'(0)G'(0)) \in D_2$ 时, 对所有的 $\tau \geq 0$, (1)的零解是不稳定的; 当 $(\mu_1 \mu_2, abF'(0)G'(0)) \in D_3$ 时, 存在 $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ 使 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, (1)的零解渐近稳定, 而 $\tau > \tau_0$ 时, (1)的零解不稳定, 且 $\tau_j (j = 0, 1, \dots)$ 是(1)的 Hopf 分支值. 当 $(\mu_1 \mu_2, abF'(0)G'(0)) \in D_2$ 时, 除了(1)的零解不稳定这一性质外, 其还有哪些动力学性质, 据我们

* 收稿日期: 2003_05_20; 修订日期: 2004_09_24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19831030)

作者简介: 魏俊杰(1954—), 男, 吉林人, 教授, 博士, 主要研究方向为泛函微分方程的理论及应用(联系人. Tel: + 86_451_86417440; E_mail: Weijj@hi. edu. cn).

所知,目前尚无人研究. 本文将证明直线 $\mu_1\mu_2 = abF'(0)G'(0)$ 是一条 pitchfork 分支曲线, 即当参数 $(\mu_1\mu_2, abF'(0)G'(0))$ 穿过该曲线, (1) 的平衡解的个数发生了变化. 更精确地说, 当 $(\mu_1\mu_2, abF'(0)G'(0))$ 从 D_1 穿过直线 $abF'(0)G'(0) = \mu_1\mu_2$ 而进入 D_2 时, (1) 的平衡点由 1 个变成 3 个, 并且新产生的平衡解是渐近稳定的. 另外, 我们还用中心流形理论和规范型方法给出了以 $v = abF'(0)G'(0)$ 为参数的 Hopf 分支性质的计算公式, 关于 (1) 的相关研究工作可参考 J. Wu 的专著^[6].

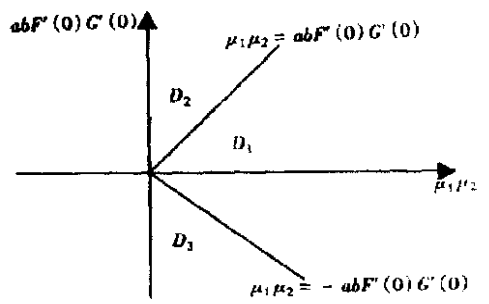


图 1 文献[4]得到的分支图 (D_1 是绝对稳定 D_2 是不稳定区域, D_3 是条件稳定区域)

2 Pitchfork 分支

对方程(1), 引入如下变换:

$$x_1(t) = u_1(t - \tau_1), \quad x_2(t) = u_2(t),$$

则(1)化为等价系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\mu_1 x_1(t) + aF(x_2(t - \tau)), \\ \dot{x}_2(t) = -\mu_2 x_2(t) + bG(x_1(t)), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

关于(2), 我们作如下的假设:

(H1) a, b 和 $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$ 都是常数, $F(x)$ 和 $G(x)$ 是二次连续可微递增函数, 且当 $x \neq 0$ 时, $x F'(x) > 0, x G'(x) > 0$.

(H2) 当 $x \neq 0$ 时, $x F''(x) < 0, x G''(x) < 0$, 且存在 $L > 0$, 使对 $x \in \mathbf{R}$ 有 $|F'(x)| \leq L, |G'(x)| \leq L$.

注 1 关于 F 和 G 的上述假设对人们构造的神经网络模型是合理的, 如取 $F(x) = G(x) = \tanh x$, 满足(H1)和(H2), 函数 $f(x) = (1 - e^{-x}) / (1 + e^{-x})$ 也满足(H1)和(H2), 参见文献[7].

定理 2.1 在(H1)和(H2)成立的条件下, 直线 $abF'(0)G'(0) = \mu_1\mu_2$ 是方程(2)的 pitchfork 分支曲线.

证明 显然, 由(H1)知 $F(0) = G(0) = 0$, 即 $(0, 0)$ 是(2)的常值解. 由 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是增函数知 $F'(x) \geq 0$ 和 $G'(x) \geq 0$. 由(H2)中的当 $x \neq 0$ 时 $x F''(x) < 0, x G''(x) < 0$ 知

$$F'(0) = \max_{x \in \mathbf{R}} F'(x), \quad G'(0) = \max_{x \in \mathbf{R}} G'(x). \quad (3)$$

(x_1^*, x_2^*) 是方程(2)的平衡解当且仅当 (x_1^*, x_2^*) 满足方程

$$\begin{cases} \mu_1 x_1 - aF(x_2) = 0, \\ \mu_2 x_2 - bG(x_1) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

即 x_1^* 要满足方程

$$x - \frac{a}{\mu_1} F\left[\frac{b}{\mu_2} G(x)\right] = 0. \quad (5)$$

令 $h(x) = x - \frac{a}{\mu_1} F\left[\frac{b}{\mu_2} G(x)\right].$

首先考虑

$$abF'(0)G'(0) < \mu_1\mu_2 \quad (6)$$

的情形

由 $h(x)$ 的定义有

$$h'(x) = 1 - \frac{ab}{\mu_1\mu_2} F' \left[\frac{b}{\mu_2} G(x) \right] G'(x), \quad (7)$$

从而由(6)知 $h'(0) = 1 - (ab/(\mu_1\mu_2))F'(0)G'(0) > 0$

当 $ab \leq 0$ 时, 知 $h'(x) \geq 1$, 当 $ab > 0$ 时, 由(3)及(7)有

$$h'(x) \geq 1 - \frac{ab}{\mu_1\mu_2} F'(0)G'(0) > 0$$

总之得

$$h'(x) > 0 \quad (8)$$

已知 $(0, 0)$ 是(2)的平衡解, 故 $h(0) = 0$. 从而由(8)知只有 $x = 0$ 使 $h(0) = 0$. 故在不等式(6)下, (2)有唯一的平衡解 $(0, 0)$. 下面考虑

$$abF'(0)G'(0) > \mu_1\mu_2 \quad (9)$$

的情形, 此时

$$h'(0) = 1 - \frac{ab}{\mu_1\mu_2} F'(0)G'(0) < 0 \quad (10)$$

于是存在 $x = 0$ 的一个邻域 $N(0)$ 使当 $x \in N(0)$ 时 $h'(x) < 0$. 由于 $h(0) = 0$, 故 $x \in N(0)$ 且 $x > 0$ 时 $h(x) < 0$.

另一方面, 由 $|F(x)| < L$ 有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{a}{\mu_1} F \left[\frac{b}{\mu_2} G(x) \right] \right] = +\infty,$$

从而知存在 $x_1^0 > 0$ 使 $h(x_1^0) = 0$, 而 $x \in (0, x_1^0)$ 时 $h(x) < 0$. 于是有

$$h'(x_1^0) \geq 0 \quad (11)$$

由 (H_2) 知 $x > 0$ 时 $G'(x)$ 和 $F'(x)$ 都是递减的, 故当 $b \geq 0$ 时由 $G(x)$ 递增知 $F'((b/\mu_1)G(x))$ 也是递减的, 所以当 $x > x_1^0$ 时

$$h'(x) = 1 - \frac{ab}{\mu_1\mu_2} F' \left[\frac{b}{\mu_1} G(x) \right] G'(x) > h'(x_1^0) \geq 0 \quad (12)$$

当 $b < 0$ 时, 由 (H_2) 知 $x < 0$ 时 $F'(x)$ 递增, 从而由 $G(x)$ 的递增性知 $F'((b/\mu_1)G(x))$ 关于 $x > 0$ 是递减的. 即当 $b < 0$ 时(12)仍成立. (12)式表明再没有 $x > x_1^0$ 使 $h(x) = 0$.

令 $x_2^0 = (b/\mu_2)G(x_1^0)$, 从而 (x_1^0, x_2^0) 是(2)的平衡点. 并且再无另外满足 $x_1^* > 0$ 的平衡解 (x_1^*, x_2^*) .

同理可证明存在 $x_1^1 < 0$ 使 (x_1^1, x_2^1) 是(2)的平衡解, 其中 $x_2^1 = (b/\mu_2)G(x_1^1)$. 而且也无另外的满足 $x_1^* < 0$ 的平衡解 (x_1^*, x_2^*) . 用 (x_1^1, x_2^1) 和 (x_1^2, x_2^2) 表示(2)的两个非零常值解. 定理证毕.

推论 2.2 在假设 (H_1) 和 (H_2) 下, 有

$$\frac{ab}{\mu_1\mu_2} F'(x_2^1) G'(x_1^1) < 1 \quad (13)$$

和

$$\frac{ab}{\mu_1 \mu_2} F'(x_2^2) G'(x_1^2) < 1 \quad (14)$$

证明 由定理 2.1 的证明过程知 $h'(x_1^1) \geq 0$

假设 $h'(x_1^1) = 0$, 由于 $x \in (0, x_1^1)$ 时 $h(x) < 0$ 故一定存在 $x_0 \in (0, x_1^1)$ 使 $h'(x_0) > 0$

由 $G(x)$ 的递增性, $F'(x)$ 和 $G'(x)$ 的递减性我们有当 $x > x_0$ 时

$$h'(x) \geq 1 - \frac{ab}{\mu_1 \mu_2} F' \left[\frac{b}{\mu_2} G(x_0) \right] G'(x_0) > 0$$

从而有 $h'(x_1^1) > 0$, 即

$$1 - \frac{ab}{\mu_1 \mu_2} F' \left[\frac{b}{\mu_2} G(x_1^1) \right] G'(x_1^1) = 1 - \frac{ab}{\mu_1 \mu_2} F'(x_2^1) G'(x_1^1) > 0$$

从而(13)成立。(14)的证明类似, 略

定理 2.3 在条件(H₁)和(H₂)下, 平衡解 (x_1^1, x_2^1) 和 (x_2^2, x_1^2) 都是渐近稳定的

证明 只证明 (x_1^1, x_2^1) 是渐近稳定的, (x_2^2, x_1^2) 的稳定性的证明类似

方程(2)在 (x_1^1, x_2^1) 处的线性化方程是

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\mu_1 x_1(t) + aF'(x_2^1) x_2(t - \tau), \\ \dot{x}_2(t) = -\mu_2 x_2(t) + bG'(x_1^1) x_1(t), \end{cases}$$

其特征方程是

$$\lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2)\lambda + \mu_1 \mu_2 - abF'(x_2^1)G'(x_1^1)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (15)$$

当 $\tau = 0$ 时, (15)化为

$$\lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2)\lambda + \mu_1 \mu_2 - abF'(x_2^1)G'(x_1^1) = 0,$$

其根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [-(\mu_1 + \mu_2) \pm \sqrt{(\mu_1 + \mu_2)^2 - 4(\mu_1 \mu_2 - abF'(x_2^1)G'(x_1^1))}]$$

由推论中的(13)知 $\mu_1 \mu_2 - abF'(x_2^1)G'(x_1^1) > 0$, 故 $\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$

$i\omega$ ($\omega > 0$) 是(15)的根当且仅当 ω 满足

$$\omega^2 - \mu_1 \mu_2 = -abF'(x_2^1)G'(x_1^1) \cos \omega\tau,$$

$$\mu_1 + \mu_2 = abF'(x_2^1)G'(x_1^1) \sin \omega\tau.$$

将上两式平方相加得

$$\omega^4 + (\mu_1^2 + \mu_2^2)\omega^2 + [\mu_1^2 \mu_2^2 - (abF'(x_2^1)G'(x_1^1))^2] = 0$$

解之得

$$\omega^2 = \frac{1}{2} [-(\mu_1^2 + \mu_2^2) \pm \sqrt{(\mu_1^2 + \mu_2^2)^2 - 4[\mu_1^2 \mu_2^2 - (abF'(x_2^1)G'(x_1^1))^2]}] \quad (16)$$

(13)式表明(16)式没有意义, 故方程(15)没有纯虚根, 显然(13)也表明 $\lambda = 0$ 不是(15)的根

综上所述, (15)在虚轴上没有根出现, 从而由 $\tau = 0$ 时(15)的所有根具负实部知, 对所有的 $\tau \geq 0$, 其所有根具严格负实部. 所以(2)的常值解 (x_1^1, x_2^1) 是渐近稳定的. 证毕

结合图 1 和文献[4]的结果及上边的讨论, 我们可以得到分支图如图 2 所示

在图 2 中, 当 $(\mu_1 \mu_2, abF'(0)G'(0)) \in I$ 时, 系统(1)有 3 个平衡解, 其中零解是不稳定的, 另两个是绝对稳定的; 当 $(\mu_1 \mu_2, abF'(0)G'(0)) \in II$ 时, 坐标原点是唯一平衡解, 且是绝对稳定的; 当 $(\mu_1 \mu_2, abF'(0)G'(0)) \in III$ 时(1)有唯一平衡解 $(0, 0)$, 又存在 τ_0 , 当 $\tau_1 + \tau_2 < \tau_0$ 时, 它是渐近稳定的; 当 $\tau_1 + \tau_2 > \tau_0$ 时, 是不稳定的, 且 τ_0 是 Hopf 分支值.

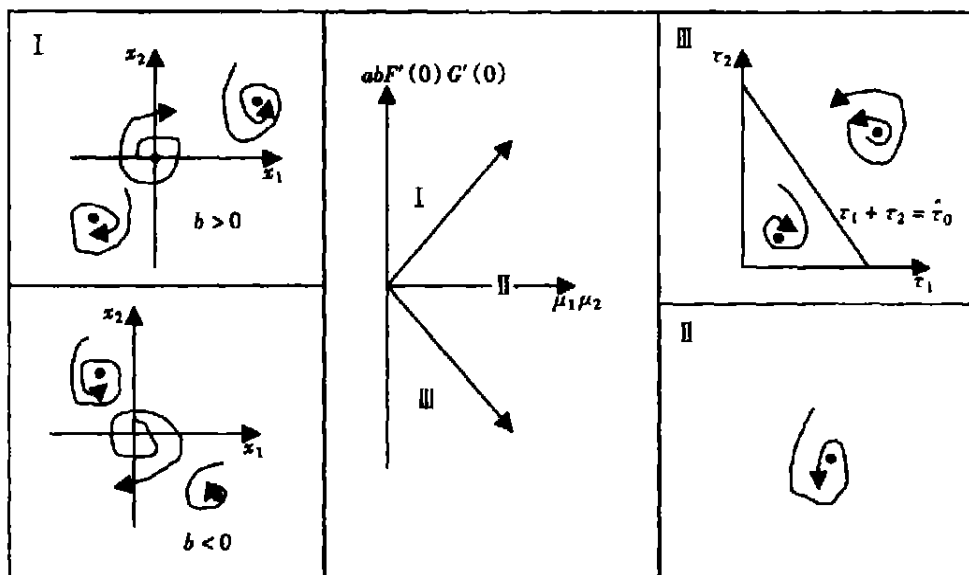


图2 本文分支图

3 以 $v = abF'(0)G'(0)$ 为参数的 Hopf 分支性质

系统(2)在(0,0)处的线性部分的特征方程为

$$\lambda^2 + (\mu_1 + \mu_2)\lambda + \mu_1\mu_2 - ve^{-\lambda\tau} = 0, \quad (17)$$

其中 $v = abF'(0)G'(0)$.

引理 3.1

$$1) \text{ 令 } \omega_j^\pm \in \left[\frac{2(j-1)\pi}{\tau}, \frac{(4j-1)\pi}{2\tau} \right], \quad j = 1, 2, \dots$$

是方程

$$\frac{(\mu_1 + \mu_2)\omega}{\omega^2 - \mu_1\mu_2} = \tan \tau\omega$$

的根,且

$$v_j^+ = -\frac{(\mu_1 + \mu_2)\omega_j^-}{\sin \omega_j^- \tau} > 0, \quad v_j^- = -\frac{(\mu_1 + \mu_2)\omega_j^+}{\sin \omega_j^+ \tau} < 0,$$

则当 $v = v_j^\pm$ 时, 方程(17)有一对简单纯虚根 $\pm i\omega_j^\pm$.

2) 令 $\lambda(v) = \alpha(v) \pm i\omega(v)$ 是方程(17)满足

$$\alpha(v_j^\pm) = 0, \quad \omega(v_j^\pm) = \pm i\omega_j^\pm$$

的根, 则 $\alpha'(v_j^+) > 0, \alpha'(v_j^-) < 0$.

3) 令 $v_0 = \min\{v_j^+\}$, 则当 $v \in (-\mu_1\mu_2, v_0)$ 时, 方程(17)的根具有严格负实部; 当 v

$\in [-\mu_1\mu_2, v_0]$ 时, 方程(17)至少存在一个具正实部的根.

定理 3.2 对系统(2), 在假设(H₁)下, 对固定的 $\tau > 0$, 有

1) 当 $v \in (-\mu_1\mu_2, v_0)$ 时, 其零解渐近稳定;

2) 当 $v \in [-\mu_1\mu_2, v_0]$ 时, 其零解不稳定;

3) $v = v_j^\pm (j = 1, 2, \dots)$ 是其 Hopf 分支值.

上述结论见文献[4].

下面我们将用中心流形理论和规范型方法给出 Hopf 分支性质的计算公式.

选取相空间为 $C = C([- \tau, 0], R^2)$, 并假设函数 F 和 G 满足:

(H₃) $F, G \in C^3(R)$. 则方程(2)可记为

$$\begin{cases} x_1'(t) = -\mu_1 x_1(t) + aF'(0)x_2(t-\tau) + \\ \quad \frac{a}{2}F''(0)x_2^2(t-\tau) + \frac{a}{6}F'''(0)x_2^3(t-\tau) + O(x_2^4), \\ x_2'(t) = -\mu_2 x_2(t) + bG'(0)x_1(t) + \\ \quad \frac{b}{2}G''(0)x_1^2(t) + \frac{b}{6}G'''(0)x_1^3(t) + O(x_1^4). \end{cases} \quad (18)$$

根据文献[8]中的中心流形理论和规范型方法,按文献[2]的计算步骤,可得确定 Hopf 分支方向及分支周期解的稳定性的参量如下:

$$g_{20} = D[aF''(0)M_1M_2^2e^{-2i\tau\omega_0} + bG''(0)],$$

$$g_{11} = D[aF''(0)M_1|M_2|^2 + bG''(0)],$$

$$g_{02} = D[aF''(0)M_1M_2^2e^{2i\tau\omega_0} + bG''(0)],$$

$$g_{21} = D[aF''(0)M_1(W_{20}^{(2)}(-\tau)M_2e^{i\tau\omega_0} + 2W_{11}^{(2)}(-\tau)M_2e^{-i\tau\omega_0}) + \\ aF'''(0)M_1|M_2|^2M_2e^{-i\tau\omega_0} + bG'''(0)(W_{20}^{(1)}(0) + 2W_{11}^{(1)}(0)) + bG'''(0)],$$

其中

$$M_1 = \frac{bG'(0)}{\mu_1 + i\omega_0}, \quad M_2 = \frac{bG'(0)}{\mu_2 + i\omega_0},$$

$$W_{20}(\theta) = -\frac{g_{20}}{i\omega_0}q(0)e^{i\omega_0\theta} - \frac{g_{20}}{3i\omega_0}q(0)e^{-i\omega_0\theta} + E_1e^{2i\omega_0\theta},$$

$$W_{11}(\theta) = \frac{g_{11}}{i\omega_0}q(0)e^{i\omega_0\theta} - \frac{g_{11}}{i\omega_0}q(0)e^{-i\omega_0\theta} + E_2,$$

$E_1 = (E_1^{(1)}, E_1^{(2)})$ 和 $E_2 = (E_2^{(1)}, E_2^{(2)})$ 的分量为,

$$E_1^{(1)} = \frac{aF''(0)M^2(\mu_2 + 2i\omega_0) + aF'(0)bG''(0)e^{-2i\tau\omega_0}}{(\mu_1 + 2i\omega_0)(\mu_2 + 2i\omega_0) - v_0e^{-2i\tau\omega_0}},$$

$$E_1^{(2)} = \frac{aF''(0)bG'(0)M^2 + bG''(0)(\mu_1 + 2i\omega_0)}{(\mu_1 + 2i\omega_0)(\mu_2 + 2i\omega_0) - v_0e^{-2i\tau\omega_0}},$$

$$E_2^{(1)} = \frac{aF''(0)\mu_2|M_2|^2 + aF'(0)bG''(0)}{\mu_1\mu_2 - v_0},$$

$$E_2^{(2)} = \frac{aF''(0)bG'(0)|M_2|^2 + bG''(0)\mu_1}{\mu_1\mu_2 - v_0}.$$

根据前面的分析,我们可以看出每一个 g_{ij} 都是由(2)中的参数和滞量决定的.因此我们可以计算下列各量

$$c_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left[g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right] + \frac{g_{21}}{2},$$

$$\nu_2 = -\frac{\text{Re}c_1(0)}{\text{Re}\lambda'(v_0)},$$

$$T_2 = -\frac{\text{Im}c_1(0) + \nu_2\text{Im}\lambda'(v_0)}{\omega_0},$$

$$\beta_2 = 2\text{Re}c_1(0).$$

我们知道(见文献[8]) ν_2 决定 Hopf 分支的方向: 若 $\nu_2 > 0 (< 0)$, 则 Hopf 分支是上(下)临界的, 即分支周期解在 $\nu > \nu_0 (< \nu_0)$ 时存在; β_2 决定分支周期解的稳定性: 若 $\beta_2 < 0 (> 0)$, 则分支周期解是轨道渐近稳定(不稳定)的; T_2 决定分支周期解的周期: 若 $T_2 > 0 (< 0)$ 则周期是增加(减少)的。

对系统(2), 我们假设 $F = G$, $\mu_1 = \mu_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mu$, 且根据函数 $\tanh(x)$ 的性质, 假设函数 F 满足 (H4) $F'(0) \neq 0$, $F''(0) = 0$, $F \ominus(0) \neq 0$ 。

于是我们有如下结果:

定理 3.3 系统(2)在 $\nu = \nu_0$ 时其 Hopf 分支的方向和分支周期解的稳定性由 $F \ominus(0)/F'(0)$ 的符号来确定: 若 $F \ominus(0)/F'(0) < 0 (> 0)$, 则 Hopf 分支是上(下)临界的, 且分支周期解是轨道渐近稳定(不稳定)的。

证明 因 $F''(0) = 0$, 则由前面分析有 $g_{11} = g_{20} = g_{02} = 0$,

$$g_{21} = DF \ominus(0)(a | M |^2 M^2 e^{-i\tau_0 \omega_0} + b),$$

其中

$$D = \frac{(\mu - i\omega_0)^2}{bF'(0)[2(\mu - i\omega_0) + \tau_0 e^{i\tau_0 \omega_0}] e^{i\tau_0 \omega_0}} = \frac{(\mu - i\omega_0)^2}{\nu_0},$$

$$M = \frac{bF'(0)}{\mu + i\omega_0}.$$

经计算得:

$$\text{Re}c_1(0) = \frac{1}{2} \text{Re}g_{21} = \frac{1}{2} \frac{F \ominus(0)}{F'(0)} \cdot \frac{1 + |M|^2}{(2 + \tau_0 \mu)^2 + \tau_0^2 \omega_0^2} (2 + \tau_0 \mu) \mu + \omega_0^2.$$

由引理 3.1 知

$$\text{Re} \lambda'(v_0) > 0,$$

故当 $F \ominus(0)/F'(0) < 0 (> 0)$ 时,

$$\nu_2 = \frac{\text{Re}c_1(0)}{\text{Re} \lambda'(v_0)} > 0 (< 0)$$

及

$$\beta_2 = 2\text{Re}c_1(0) < 0 (> 0).$$

于是由[8]的结论可得此定理, 证毕。

[参 考 文 献]

- [1] Chen Y, Wu J. Slowly oscillating periodic solutions for a delayed frustrated network of two neurons [J]. J Math Anal Appl, 2001, **259**(1): 188—208.
- [2] Wei J, Ruan S. Stability and bifurcation in a neural network model with two delays [J]. Physica D, 1999, **130**(3/4): 255—272.
- [3] Faria T. On a planar system modelling a neuron network with memory [J]. J Differential Equations, 2000, **168**(1): 129—149.
- [4] Wei J, Velarde M, Makarov V. Oscillatory phenomena and stability of periodic solutions in a simple neural network with delay [J]. Nonlinear Phenomena in Complex Systems, 2002, **5**(4): 407—417.
- [5] Wu J. Symmetric functional differential equations and neural networks with memory [J]. Trans Amer Math Soc, 1998, **350**(12): 4799—4838.
- [6] Wu J. Introduction to Neural Dynamics and Signal Transmission Delay [M]. Berlin, New York:

- Walter de Gruyter, 2001, 120—150.
- [7] Babcock K L, Westervelt R M. Dynamics of simple electronic neural networks[J]. *Physica D*, 1987, **28**(4): 305—359.
- [8] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

Bifurcation in a Two Dimensional Neural Network Model With Delay

WEI Jun_jie¹, ZHANG Chun_rui², LI Xiu_ling³

(1. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology,
Harbin 150001, P. R. China;

2. Key Laboratory of Forestry Plant Ecology of Ministry of Education, Northeast
Forestry University, Harbin 150040, P. R. China;

3. Department of Basic Science and Art, Changchun Taxation College,
Changchun 130022, P. R. China)

Abstract: A kind of 2-dimensional neural network model with delay is considered. By analyzing the distribution of the roots of the characteristic equation associated with the model, a bifurcation diagram was drawn in an appropriate parameter plane. It is found that a line is a pitchfork bifurcation curve. Furthermore, the stability of each fixed point and existence of Hopf bifurcation were obtained. Finally, the direction of the Hopf bifurcation and the stability of the bifurcating periodic solutions were determined by using the normal form method and centre manifold theory.

Key words: neural network; centre manifold; pitchfork bifurcation; Hopf bifurcation