应用数学和力学, 第 26 卷 第 3 期(2005 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 03_0259_08

带有阻尼项的广义对称正则长波方程的指数吸引子*

尚亚东[1], 郭柏灵[2]

(1. 广州大学 数学与信息科学学院, 广州 510405;
2. 北京应用物理与计算数学研究所 非线性研究中心, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 考虑了带有阻尼项的广义对称正则长波方程的整体快变动力学• 证明了与该方程有关的非线性半群的挤压性质和指数吸引子的存在性• 对指数吸引子的分形维数的上界也进行了估计•

关 键 词: 对称正则长波方程; 渐近行为; 挤压性; 指数吸引子
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

正则长波方程的对称描述(SRLWE)

$$u_{xxt} - u_t = \rho_x + uu_x, \tag{1}$$

$$\rho_t + u_x = 0• \tag{2}$$

作为弱非线性离子声波和空间荷电波传播的模型已经提出[1]• 文献[1]获得了其双曲正割平方孤立波解, 4 个不变量和某些数值结果• 明显地, 由(1)、(2)中消去 ρ, 我们得到一个对称正则长波方程(SRLWE):

$$u_{tt} - u_{xx} + \frac{1}{2}(u^2)_{xt} - u_{xxtt} = 0• \tag{3}$$

SRLW 方程(3)关于 x 和 t 的导数明显对称, 并且与描述浅水波和等离子漂移波的正则长波方程非常类似[2, 3]• SRLW 方程(1)、(2)或(3)也出现在许多其它数学物理领域[4~6]• 数值考察揭示其孤立波的相互作用是非弹性的[7]• 因此, SRLW 方程的孤立波不是孤立子• 最近, 文献[8]研究了广义对称正则长波方程孤立波解的轨道稳定性和不稳定性• 关于该方程解的适定性和数值方法的研究也已引起越来越多的兴趣• 在文献[9]中郭柏灵研究了一类广义 SRLW 方程周期初值整体解的存在性、惟一性和正则性, 并且得到谱逼近解的误差估计• 文献[10]考虑了带有非齐次边值的对称正则长波方程的初边值问题•

在实际过程中, 粘性阻尼和色散一样起着重要作用• 因此, 研究带有阻尼项的耗散的对称正则长波方程

* 收稿日期: 2003_09_22; 修订日期: 2004_11_27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271034)
作者简介: 尚亚东(1963—), 男, 陕西周至人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_20_86232840; Fax: + 86_20_86237565; E_mail: ydshang@263.net)•

$$u_{xxt} - u_t + \nu u_{xx} = \rho_x + u u_x, \tag{4}$$

$$\rho_t + u_x + \gamma\rho = 0, \tag{5}$$

其中 γ, ν 为正常数(这是考虑耗散时反映非线性离子声波运动本质现象的合理模型)解的性态(尤其是大时间性态)更为有意义•

本文考虑下列带有阻尼项的耗散广义对称正则长波方程

$$u_t - \nu u_{xx} + \rho_x + f(u)_x - u_{xxt} = g_1(x) \qquad (x, t) \in \Omega \times \mathbf{R}^+, \tag{6}$$

$$\rho_t + u_x + \gamma\rho = g_2(x), \qquad (x, t) \in \Omega \times \mathbf{R}^+ \tag{7}$$

的快变动力学• 这里 $\nu > 0$、$\gamma > 0$ 为正常数, $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为 C^2 连续函数, $g_1(x)$、$g_2(x) \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}$ 是一有界区间• 在文献[11]和文献[12]中, 作者对系统(6)、(7)分别在 $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ 和 $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ 中建立了整体吸引子的存在性, 它们具有有限豪森道夫和分形维数• 本文的目的是对这个模型(6)、(7)证明 (V_2, V_1) 型指数吸引子的存在性•

第1节回顾一些有关指数吸引子存在性及其有限分形维特征的已知结果• 在第2节, 我们提出带阻尼项的广义对称正则长波方程解的整体存在惟一性、整体吸引子存在性及有界吸收集的一些已知结果• 第3节包含我们的主要结果, 我们首先建立与(6)、(7)联系的动力系统 $S(t)$ 的 Lipschitz 连续性, 接着我们证明对方程(6)、(7)半群 $S(t)$ 满足挤压性及有限分形维指数吸引子的存在性•

1　预 备 知 识

设 V_1、V_2 是两个 Hilbert 空间, V_2 在 V_1 中稠密并且紧嵌入到 V_1 中• 设 $S(t)$ 为从 V_1、V_2 到自身的映照• 我们研究

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + Au + g(u) = f(x), \qquad t > 0, x \in \Omega, \tag{8}$$

$$u(0) = u_0(x), \tag{9}$$

Dirichlet 问题或周期问题, (10)

其中 Ω 为 R^n 中有界开集, $\partial\Omega$ 光滑• A 为具有紧致逆的正定自伴算子• 令 $\left\{w_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 记算子 A 的特征向量全体的集合, 对应的特征值为

$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \uparrow + \infty, \tag{11}$$

我们假设在(8)、(9)中定义的非线性半群 $S(t)$ 容许有 (V_2, V_1) 型紧吸引子 $\mathscr{A}$, 即在 V_1 中存在紧集 $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ 吸引所有在 V_2 中的有界子集并且在 $S(t)$ 的作用下是不变的[13]•

定义1　紧集 $\mathscr{M} \subset V_1$ 称为 $(S(t), B)$ 的 (V_2, V_1) 型指数吸引子, 如果 $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M} \subseteq B$ 且

1) $S(t)\mathscr{M} \subseteq \mathscr{M}$, 　　$\forall t \geqslant 0$,

2) $\mathscr{M}$ 有有限分形维数, $d_{\mathrm{F}}(\mathscr{M}) < +\infty$,

3) 存在正常数 c_0、c_1 使得

$$\mathrm{dist}(S(t)B, \mathscr{M}) \leqslant c_0 \mathrm{e}^{-c_1 t}, \qquad \forall t > 0,$$

其中 $\mathrm{dist}_{V_1}(A, B) = \sup\limits_{x \in A}\inf\limits_{y \in B} | x - y |_{V_1}$, B 为 V_1 中关于 $S(t)$ 的正不变集•

定义2　若对所有的 $\delta \in (0, 1/8)$ 存在阶等于 N_0 的正交投影 P_{N_0} 使得对所有 B 中的 u 和 v, 或者

$$| S(t_*)u - S(t_*)v |_{V_1} \leqslant \delta | u - v |_{V_1}, \tag{12}$$

或者

$$| Q_{N_0}(S(t_*)u - S(t_*))v |_{V_1} \leqslant | P_{N_0}(S(t_*)u - S(t_*))v |_{V_1}, \tag{13}$$

那么称 $S(t)$ 在 B 中是挤压的, 这里 $Q_{N_0}=I-P_{N_0}$•

定理 1　假设(8)、(9) 满足下列条件:

1) 存在一个 (V_2, V_1) 型紧吸引子 $\mathscr{A}$;

2) 在 V_1 中存在对于 $S(t)$ 作用正不变的紧集 B;

3) $S(t)$ 在 B 中 Lipschitz 连续且在 B 中是挤压的•

那么(8)、(9) 对 $(S(t), B)$ 容许有(V_2, V_1) 型的指数吸引子 $\mathscr{M}$

且
$$\mathscr{M}=\bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_*} S(t)\mathscr{M}_*, \tag{14}$$
这里
$$\mathscr{M}_* = \mathscr{A}\cup\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} S(t_*)^j(E^{(k)})\right), \tag{15}$$
此外,
$$d_F(\mathscr{M}) \leqslant 1+N_0\lg\left(1+\frac{\sqrt{2}l}{\delta}\right)\bigg\backslash\lg\frac{1}{\theta}, \tag{16}$$
$$\mathrm{dist}_{V_1}(S(t)B, \mathscr{M}) \leqslant c_0 e^{-c_1 t}, \tag{17}$$
其中 θ、N_0、$E^{(k)}$ 如文献[14] 中定义, l 为 $S(t_*)$ 在 B 中的 Lipschitz 常数•

命题 1　存在 $t_0(B_0)$ 使得
$$B=\overline{\bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_0(B_0)} S(t)B_0} \tag{18}$$
是 V_1 中紧的正不变集, 并且吸收 V_2 中的所有有界子集, 其中 B_0 是 $S(t)$ 在 V_2 中的闭吸收集•

命题 2　设 B_0, B_1 分别为(8)、(9) 在 V_2、V_1 中的有界闭吸收集•　那么存在(V_2, V_1) 型紧吸引子 $\mathscr{A}$•

关于命题 1 和命题 2 的证明, 参见文献[15]•

2　解的性质及有界吸收集

本节, 考虑下列带阻尼项的广义对称正则长波方程
$$u_t-\nu u_{xx}+\rho_x+f(u)_x-u_{xxt}=g_1(x),\qquad (x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+, \tag{19}$$
$$\rho_t+u_x+\gamma\rho=g_2(x),\qquad (x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}^+, \tag{20}$$
具初始条件
$$u(x,0)=u_0(x),\ \rho(x,0)=\rho_0(x),\qquad x\in\Omega \tag{21}$$
和周期边界条件
$$\Omega=(0,L)\qquad 且\ u、\rho\ 是\ \Omega\_周期的, \tag{22}$$
其中 $\nu>0$ 为正常数, f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为 C^2 连续函数, $g_1(x), g_2(x)\in L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$•

在下文中, 将记 $H=L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$, 赋与其以通常内积$(\cdot,\cdot)$ 和范数 $\|\cdot\|$, 而对所有 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 用 $\|\cdot\|_p$ 表示$L^p_{\mathrm{per}}(\Omega)$ 中的范数$(\|\cdot\|_2=\|\cdot\|)$•　通常, $\|\cdot\|_X$ 表示任意 Banach 空间 X 的范数•

根据 Galerkin 方法, 易推出下列存在性结果•

定理 2　假设 $g_1(x)\in L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$, $g_2(x)\in H^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$, 则对$(u_0,\rho_0)\in H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^{k-1}_{\mathrm{per}}(\Omega)$, $k=1,2$, 问题(19)、(20) 拥有定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的惟一解$(u(t),\rho(t))$ 使得
$$u(t)\in C([0,\infty), H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)),\ \frac{\partial u}{\partial t}\in L^\infty(0,T,H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)),\qquad \forall T>0,$$

$$\rho(t) \in C([0,\infty), H^{k-1}_{\mathrm{per}}(\Omega)), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} \in L^{\infty}(0,T,H^{k-1}_{\mathrm{per}}(\Omega)), \qquad \forall T > 0.$$

这一结果建立了映射$H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^{k-1}_{\mathrm{per}}(\Omega)$到$H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^{k-1}_{\mathrm{per}}(\Omega)$的动力系统$\left\{S(t)\right\}_{t\geqslant 0}$的存在性,它使得$S(t)(u_0,\rho_0)=(u(t),\rho(t))$为问题(19)、(20)的解. 在文献[11]及文献[12]中对$k=1,2$,建立了$S(t)$对于初始数据的弱连续性,即有下面命题.

命题3 假设$g_1(x),g_2(x)\in L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)$则对$k=1,2$和$t\geqslant 0$, $S(t)$:

$$H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^{k-1}_{\mathrm{per}}(\Omega)\to H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^{k-1}_{\mathrm{per}}(\Omega)$$

是连续的.

贯穿全文中,总假设

$$g_1(x)\in L^2_{\mathrm{per}}(\Omega), \quad \int_\Omega g_1(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{23}$$

在Ω上积分(19)并且应用(23),发现$u(t)$在Ω上的平均值守恒,即,对所有$t>0$:

$$\theta(u(t)) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0(x)\,\mathrm{d}x = \theta(u_0). \tag{24}$$

这表明问题(19)、(20)在整个空间$H\times H$上没有有界吸收集. 为了克服此困难,我们引入$H\times H$的子集:

$$H_\alpha = \left\{(u,\rho)\in L^2_{\mathrm{per}}(\Omega)\times L^2_{\mathrm{per}}(\Omega): |\theta(u)|\leqslant \alpha\right\}.$$

(24)暗示H_α在与系统(19)、(20)相关的半群$S(t)$作用下是不变的.

现在回顾下面有界吸收集存在性结果.

定理3[12] 假设(23)成立, $g_2(x)\in H^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$, $(u_0,\rho_0)\in(H^k_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^{k-1}_{\mathrm{per}}(\Omega))\cap H_\alpha$, $k=1,2$,那么存在依赖于数据$(\nu,\gamma,\alpha,f,g_1,g_2,\Omega)$的常数$E_k$使得

$$\|u\|_{H^k}\leqslant E_k,\quad \|\rho\|_{H^{k-1}}\leqslant E_k, \qquad \forall t\geqslant t_k.$$

其中t_k依赖于数据$(\nu,\gamma,\alpha,f,g_1,g_2,\Omega)$和$R$,当$\|u_0\|_{H^k}\leqslant R$, $\|\rho_0\|_{H^{k-1}}\leqslant R$.

定理3的证明参见文献[12].

我们注意到定理3表明球

$$B_j = \left\{(u,\rho)\in H^j_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^{j-1}_{\mathrm{per}}(\Omega): \|u\|_{H^j}\leqslant E_j,\ \|\rho\|_{H^{j-1}}\leqslant E_j\right\} \tag{25}$$

是$S(t)$在$(H^j_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^{j-1}_{\mathrm{per}}(\Omega))\cap H_\alpha$, $j=1,2$中的吸收集. 让

$$V_2 = (H^2_{\mathrm{per}}(\Omega)\times H^1_{\mathrm{per}}(\Omega))\cap H_\alpha,\quad V_1 = (H^1_{\mathrm{per}}(\Omega)\times L^2_{\mathrm{per}}(\Omega))\cap H_\alpha.$$

由命题1,

$$B = \overline{\bigcup_{0\leqslant t\leqslant t_0(B_2)} S(t)B_2} \tag{26}$$

是$S(t)$在V_1中的紧正定不变集并且吸收V_2中的所有有界子集. 由文献[15]中第五章命题5.1,知道由问题(19)、(20)定义的非线性半群$S(t)$拥有(V_2,V_1)_型紧吸引子

$$\mathscr{A} = \bigcup_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s} S(t)B_2}, \tag{27}$$

这里闭包在V_1中取. $\mathscr{A}$在V_2中有界.

为了建立指数吸引子的存在性,我们需要证明动力系统$S(t)$在B中的Lipschitz连续性和挤压性.

3 指数吸引子

本节,我们证明(19)、(20)容许有一个(V_2,V_1)型指数吸引子. 我们首先证明与(19)、(20)联系的动力系统$S(t)$在B上的Lipschitz连续性,准确地,我们有:

定理4 假设(23)成立, $g_2(x)\in H^1_{\mathrm{per}}(\Omega)$, $(u_1(t),\rho_1(t))$和$(u_2(t),\rho_2(t))$为问题(19)、

(20) 的具初值 (u_{10}, ρ_{10})、$(u_{20}, \rho_{20}) \in B$ 的两个解, 那么有

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^1} + \|\rho_1(t) - \rho_2(t)\|_{L^2} \leqslant \mathrm{e}^{Ct}(\|u_{10} - u_{20}\|_{H^1} + \|\rho_{10} - \rho_{20}\|_{L^2}), \tag{28}$$

其中 C 为只依赖于 $(\nu, \gamma, \alpha, f, g_1, g_2, \Omega)$ 的常数.

证明　令 $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, $\rho(t) = \rho_1(t) - \rho_2(t)$, 那么由(19)、(20), 发现

$$u_t - \nu u_{xx} - u_{xxt} + \rho_x + (f(u_1) - f(u_2))_x = 0, \tag{29}$$

$$\rho_t + u_x + \gamma\rho = 0, \tag{30}$$

分别取(29) 同 u, (30) 同 ρ 在 H 中作内积, 然后将其相加得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2 + \|u_x\|^2 + \|\rho\|^2) + \nu\|u_x\|^2 + \gamma\|\rho\|^2 \leqslant (f(u_1) - f(u_2), u_x), \tag{31}$$

由 B 的构造, 有 $(u_1(t), \rho_1(t)), (u_2(t), \rho_2(t)) \in B$ 对所有 $t > 0$ 成立, 由于

$$\left|\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))u_x \mathrm{d}x\right| = \left|\int_\Omega f'(\xi)uu_x \mathrm{d}x\right|, \tag{32}$$

这里 $\xi = \tau u_1 + (1 - \tau)u_2 \in B$, $\tau \in (0, 1)$. 由 Agmon 不等式

$$\|u\|_\infty \leqslant C_1\|u\|^{1/2}\|u\|_H^{1/2}, \qquad \forall u \in H^1_{\mathrm{per}}(\Omega), \tag{33}$$

推得 $\|\xi\|_\infty \leqslant C_1E_1$. 注意到 f 为 C^2 光滑函数, 由(31)、(32) 推得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|^2 + \|u_x\|^2 + \|\rho\|^2) \leqslant 2C(\|u\|^2 + \|u_x\|^2 + \|\rho\|^2), \tag{34}$$

由 Gronwall 不等式, 我们得

$$(\|u\|^2 + \|u_x\|^2 + \|\rho\|^2) \leqslant (\|u_0\|^2 + \|u_{0x}\|^2 + \|\rho_0\|^2)\mathrm{e}^{2Ct}, \tag{35}$$

定理证明完毕.

现在我们引入由 $D(A)$ 到 H 的算子 $A = -\partial_{xx}$, 具有定义域:

$$D(A) = \left\{u \in H^2(\Omega): u(x, t) = u(x + L, t)\right\},$$

明显地, A 是无界自伴正定算子并且其逆 A^{-1} 为紧的. 因此存在 H 的一组正交基底 $\left\{w_i\right\}_{i=1}^\infty$ 构成 A 的特征向量, 使得

$$Aw_i = \lambda_i w_i,\ 0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_i \leqslant \dots \uparrow +\infty, \text{ 当 } i \to \infty$$

对 $\forall N$, 用 $P = P_N: H \to \mathrm{span}\left\{w_1, w_2, \dots, w_N\right\}$ 表示正交投影算子, $Q = Q_N = I - P_N$.

下面, 我们要利用

$$\|A^{1/2}u\| = \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|, \qquad u \in H^1(\Omega), \tag{36}$$

$$\|A^{1/2}u\| \geqslant \lambda_{N+1}^{1/2}\|u\|, \qquad u \in Q_NH, \tag{37}$$

$$\|Q_Nu\| \leqslant \|u\|, \qquad u \in H, \tag{38}$$

$$\|AQ_Nu\| = \|Q_NAu\| \leqslant \|Au\|, \qquad u \in D(A). \tag{39}$$

现在证明半群 $S(t)$ 的挤压性. 为此首先陈述下面结果:

定理 5　假设 $(u_1(t), \rho_1(t))$ 和 $(u_2(t), \rho_2(t))$ 是问题 (19)、(20) 具有初始值 (u_{10}, ρ_{10})、$(u_{20}, \rho_{20}) \in B$ 的两个解, 则 $(q, \eta) = Q_N(u_1 - u_2, \rho_1 - \rho_2)$ 满足

$$\|q\|_{H^1}^2 + \|\eta\|^2 \leqslant \left[\mathrm{e}^{-\bar{C}t} + \frac{C\lambda_{N+1}^{-1}}{\bar{C} + 2C}\mathrm{e}^{2Ct}\right](\|u_0\|_{H^1}^2 + \|\rho_0\|^2),$$

其中 C、$\bar{C}$ 和 C 只依赖于数据 $(\nu, \gamma, \alpha, f, g_1, g_2, \Omega)$.

证明　设 $(u(t), \rho(t)) = (u_1(t) - u_2(t), \rho_1(t) - \rho_2(t))$, $(q, \eta) = Q_N(u_1 - u_2, \rho_1 -$

$\rho_2)$, 对(29)、(30) 作用 Q_N, 得到

$$q_t - \nu q_{xx} - q_{xxt} + \eta_x + Q_N[(f(u_1) - f(u_2)_x] = 0, \tag{40}$$

$$\eta_t + q_x + \gamma\eta = 0, \tag{41}$$

取(40)同 q 作内积, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|q\|^2 + \|q_x\|^2) + \nu\|q_x\|^2 = - (\eta_x, q) - (Q_N[(f(u_1) - f(u_2))_x], q), \tag{42}$$

对(42)右边第 2 项, 我们有

$$\begin{aligned} &- (Q_N[(f(u_1) - f(u_2))_x], q) \leqslant \left|\int_\Omega Q_N[(f(u_1) - f(u_2))_x] q\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \\ &\|Q_N[(f(u_1) - f(u_2))_x]\| \|q\| \leqslant \|(f(u_1) - f(u_2))_x\| \|q\| \leqslant \\ &[\|f'(u_1)\|_\infty \|u_x\| + \|f''(\bar\xi)\|_\infty \|u_{2x}\|_\infty \|u\|] \|q\| \leqslant \\ &[\|f'(u_1)\|_\infty \|u_x\| + \|f''(\bar\xi)\|_\infty \|u_{2x}\|_\infty \|u\|] \lambda_{N+1}^{-1/2} \|q_x\| \leqslant \\ &C_2\lambda_{N+1}^{-1}(\|u\|^2 + \|u_x\|^2) + (\nu/2)\|q_x\|^2, \end{aligned} \tag{43}$$

其中 C_2 只依赖于$(\nu, \gamma, \alpha, f, g_1, g_2, \Omega)$• 结合(42)与(43)得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|q\|^2 + \|q_x\|^2) + \frac{\nu}{2}\|q_x\|^2 \leqslant C_2\lambda_{N+1}^{-1}(\|u\|^2 + \|u_x\|^2) + \int_\Omega \eta q_x\,\mathrm{d}x, \tag{44}$$

取(41)同 η 在H 中作内积, 有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta\|^2 + \gamma\|\eta\|^2 = -(q_x, \eta), \tag{45}$$

(44)与(45)相加, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|q\|^2 + \|q_x\|^2 + \|\eta\|^2) + \nu\|q_x\|^2 + \gamma\|\eta\|^2 \leqslant C\lambda_{N+1}^{-1}(\|u\|^2 + \|u_x\|^2 + \|\rho\|^2), \tag{46}$$

由于

$$\|q_x\|^2 \geqslant \frac{1}{2}\|q_x\|^2 + \frac{1}{2}\lambda_{N+1}\|q\|^2 \geqslant \bar{C}(\|q\|^2 + \|q_x\|^2),$$

因此由定理4, 我们推出

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|q\|^2 + \|q_x\|^2 + \|\eta\|^2) + \bar{C}(\|q\|^2 + \|q_x\|^2 + \|\eta\|^2) \leqslant \\ &C\lambda_{N+1}^{-1}(\|u\|^2 + \|u_x\|^2 + \|\rho\|^2) \leqslant \\ &C\lambda_{N+1}^{-1}(\|u_0\|^2 + \|u_{0x}\|^2 + \|\rho_0\|^2)\mathrm{e}^{2Ct}, \end{aligned} \tag{47}$$

由 Gronwall 不等式, 得到

$$\begin{aligned} &\|q\|^2 + \|q_x\|^2 + \|\eta\|^2 \leqslant (\|q(0)\|^2 + \|q_x(0)\|^2 + \|\eta(0)\|^2)\mathrm{e}^{-\bar{C}t} + \\ &\frac{C\lambda_{N+1}^{-1}}{\bar{C} + 2C}(\|u_0\|^2 + \|u_{0x}\|^2 + \|\rho_0\|^2)\mathrm{e}^{2Ct} \leqslant \\ &\left(\mathrm{e}^{-\bar{C}t} + \frac{C\lambda_{N+1}^{-1}}{\bar{C} + 2C}\mathrm{e}^{2Ct}\right)(\|u_0\|^2 + \|u_{0x}\|^2 + \|\rho_0\|^2), \end{aligned} \tag{48}$$

定理 5• 证毕•

现在我们证明半群 $S(t)$ 的挤压性质•

定理 6　与问题(19)、(22)联系的半群 $S(t)$ 在 B 中满足挤压性质•

证明　让 $t_* > 0$ 固定并且假设

$$\|P_N u\|_{H^1}^2 + \|P_N\rho\|^2 \leqslant \|Q_N u\|_{H^1}^2 + \|Q_N\rho\|^2, \tag{49}$$

则我们可以导出

$$\begin{aligned}&\|u(t_*)\|^2 + \|u_x(t_*)\|^2 + \|\rho(t_*)\|^2 \leqslant \\ &\quad \|P_N u(t_*)\|_{H^1}^2 + \|P_N\rho(t_*)\|^2 + \|Q_N u(t_*)\|_{H^1}^2 + \|Q_N\rho(t_*)\|^2 \leqslant \\ &\quad 2(\|Q_N u(t_*)\|_{H^1}^2 + \|Q_N\rho(t_*)\|^2) \leqslant \\ &\quad 2\left(\mathrm{e}^{-Ct_*} + \frac{C\lambda_{N+1}^{-1}}{\bar{C} + 2C}\mathrm{e}^{2Ct_*}\right)(\|u_0\|^2 + \|u_{0x}\|^2 + \|\rho_0\|^2) \leqslant \\ &\quad (\|u_0\|^2 + \|u_{0x}\|^2 + \|\rho_0\|^2)/64,\end{aligned} \tag{50}$$

只要让 $t_* > 0$ 足够大使得

$$\mathrm{e}^{-Ct_*} \leqslant 1/256, \tag{51}$$

并且选取 N_0 足够大使得

$$(C\lambda_{N+1}^{-1}/(C + 2C))\mathrm{e}^{2Ct_*} \leqslant 1/256, \tag{52}$$

定理 6 证毕•

现在给出我们的主要结果:

定理 7　假定(23)成立, $g_2(x) \in H_{\mathrm{per}}^1(\Omega)$, $(u_0, \rho_0) \in (H_{\mathrm{per}}^k(\Omega) \times H_{\mathrm{per}}^{k-1}(\Omega)) \cap H_\alpha$, $k = 1, 2$, 那么问题(19)、(20) 拥有(V_2, V_1) 型指数吸引子 $\mathscr{M}$且

$$d_{\mathrm{F}}(\mathscr{M}) \leqslant 1 + 16^{1+C/C}C_4\sqrt{\tilde{C}/(\bar{C} + 2C)}, \tag{53}$$

$$\mathrm{dist}_{V_1}(S(t)B, \mathscr{M}) \leqslant C_5\mathrm{e}^{-C_6 t}, \tag{54}$$

其中 C、C、C、C_4、C_5 和 C_6 为与方程的解无关的常数•

证明　由定理 1, 定理 4 及定理 6 知道问题(19)、(22) 拥有 (V_2, V_1) 型指数吸引子 $\mathscr{M}$• 注意到 $\lambda_N \sim N^2$ 且让 δ、θ 固定, 从(52)我们得到指数吸引子分形维数的估计(53)因此定理 7 证毕•

[参　考　文　献]

[1] Seyler E C, Fanstermacler D C. A symmetric regularized long wave equation[J]. Phys Fluids, 1984, **27**(1): 4—7.

[2] Albert J. On the decay of solutions of the generalized BBM equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1989, **141**(2): 527—537.

[3] Amick C J, Bona J L, Schonbek M E. Decay of solutions of some nonlinear wave equations[J]. Journal of Differential Equations, 1989, **81**(1): 1—49.

[4] Ogino T, Takeda S. Computer simulation and analysis for the spherical and cylindrical Ion_acoustic solitons[J]. Journal of Physics Society of Japan, 1976, **41**(1): 257—264.

[5] Makhankov V G. Dynamics of classical solitons (in non_integrable systems)[J]. Physics Reports, A review section of physics letters (section C), 1978, **35**C(1): 1—128.

[6] Clarkson P A. New similarity reductions and Painleve analysis for the symmetric regularized long wave and modified Benjamin_Bona_Mahoney equations[J]. J Phys A: Math Gen, 1989, **22**(18): 3821—3848.

[7] Bogolubsky J L. Some examples of inelastic soliton interaction[J]. Computer Physics Communications, 1977, **13**(1): 149—155.

[8] CHEN Lin. Stability and instability of solitary wave for generalized symmetric regularized long wave equations[J]. Physica D, 1998, **118**(1/2): 53—68.
[9] GUO Bo_ling. The spectral method for symmetric regularized wave equations[J]. Journal of Computational Mathematics, 1987, **5**(4): 297—306.
[10] MIAO Chen_xia. The initial boundary value problem for symmetric long wave equations with non_homogeneous boundary value[J]. Northeastern Mathematics Journal, 1994, **10**(4): 463—472.
[11] SHANG Ya_dong, GUO Bo_ling, FANG Shao_mei. Long time behavior of the dissipative generalized symmetric regularized long wave equations[J]. Journal of Partial Differential Equations, 2002, **15**(1): 21—35.
[12] SHANG Ya_dong, GUO Bo_ling. Finite dimensional behavior for the dissipative generalized symmetric regularized long wave equations[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2003, **16**(2): 236—248.
[13] Babin A V, Vishik M I. Regular attractors of semigroup and evolution equations[J]. Journal of Mathematics Pure and Applications, 1983, **62**(5): 441—491.
[14] Eden A, Foias C, Nicolaenko B, et al. Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations [M]. New York: Masson, Paris, Wiely, 1994, 36—48.
[15] 戴正德, 郭柏灵. 惯性流形和近似惯性流形[M]. 北京: 科学出版社, 2000, 226—242.

Exponential Attractor for the Generalized Symmetric Regularized Long Wave Equation With Damping Term

SHANG Ya_dong, GUO Bo_ling
(1. School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510405, P. R. China;
2. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, P. O. Box 8009, Beijing 100088, P. R. China)

Abstract: The global fast dynamics for the generalized symmetric regularized long wave equation with damping term is considered. The squeezing property of the nonlinear semi_group associated with this equation and the existence of exponential attractor are proved. The upper bounds of its fractal dimension are also estimated.

Key words: symmetric regularized long wave equation; asymptotic behavior; squeezing property; exponential attractor