

文章编号: 1000_0887(2005) 03_0293_07

损伤对粘弹性矩形板非线性动力特性的影响*

郑玉芳, 傅衣铭¹

(湖南大学 工程力学系, 长沙 410082)

(本刊编委傅衣铭来稿)

摘要: 研究了考虑损伤效应的粘弹性矩形板在横向周期载荷作用下的非线性动力学问题。基于 Von Karman 方程、Boltzmann 叠加原理和连续损伤力学理论, 建立了以中面位移表示的考虑损伤效应的粘弹性薄板的非线性动力学方程, 然后, 应用有限差分法和 Newmark 法进行求解, 并与相应的文献作出了比较。具体讨论了外载荷参数和板的几何尺寸对含损伤效应的粘弹性板非线性动力响应的影响。数值结果表明, 考虑损伤效应时, 结构的非线性动力响应会发生显著的变化。

关键词: 矩形板; 粘弹性; 损伤效应; 几何非线性

中图分类号: O345 **文献标识码:** A

引言

目前, 复合材料结构已在宇航、航空、石油、化工等现代工业中得到日益广泛的应用。但是, 这类材料一般具有粘弹性性质, 有明显的蠕变和松弛行为。而且, 在载荷、温度和环境的作用下, 结构会出现不同程度的各种损伤, 损伤将使结构在失效之前的力学性能劣化, 导致结构的刚度降低及动力学特性改变。

杨挺青^[1]就粘弹性材料的本构关系作了详细的论述; Huang^[2]采用粘弹性和拟弹性分析了具几何非线性和几何初始缺陷的正交铺设与角铺设层合板的蠕变位移响应问题。程昌钧^[3]从 von Karman 方程和 Boltzmann 叠加原理出发, 应用动力系统多种方法, 揭示了粘弹性矩形板在横向周期激励下所具有的动力学行为。Sun^[4]研究了粘弹性矩形板在面内周期载荷作用下的混沌行为, 并指出改变材料参数可提高结构的稳定性。Touati^[5]讨论了具物理非线性的粘弹性矩形板的动力稳定性问题。Kim^[6]应用有限元和尺度法研究了粘弹性复合材料层合板的动力学行为, 具体讨论了系统的振动频率及其对幅值的影响。Ladeveze^[7]和 Allix^[8]等以层合板的单层为尺度, 引入两个标量损伤变量, 应用连续介质力学方法, 建立了考虑基体开裂、纤维与基体脱胶和层间具微小分层的损伤本构关系及损伤演化方程。Chow^[9]建立了延性材料的各向异性损伤理论, 并通过实验, 验证了模型的合理性。Weitsman^[10]和 Schapary^[11]建立了含损伤

* 收稿日期: 2003_10_24; 修订日期: 2004_11_27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272024)

作者简介: 郑玉芳(1976—), 女, 福建莆田人, 博士(联系人, Tel: + 86_731_8824724; Fax: + 86_731_8822330; E_mail: zheng_yufang@163.com)。

的粘弹性材料的本构关系,以及 Akshantala^[12]建立了粘弹性复合材料层合结构的损伤演化模型。张我华^[13]研究了各向异性损伤的各向同性弹性梁在冲击载荷作用下的动力响应,得出了若干有意义的结论。然而,现有的研究成果主要涉及的是粘弹性结构的动力问题,或含损伤的复合材料结构的拉伸与压缩问题,对含损伤的具粘弹性的复合材料板壳结构的非线性动力学问题的研究成果却很少,还有待深入探讨。

本文基于 von Karman 方程和 Boltzmann 叠加原理,建立了以中面位移表示的含损伤效应的各向同性粘弹性矩形板的非线性动力学方程,应用有限差分法进行求解,且将数值结果与文献 [3] 的结果进行了比较,同时还讨论了外载荷幅值、激励频率、跨厚比和长宽比对含损伤效应的结构非线性动力响应的影响。

1 基本方程

考虑在横向载荷 $q(x, y, t)$ 作用下的一矩形薄板,其在 x 方向长为 a ,在 y 方向宽为 b ,在 z 方向上高为 h 。未变形时板的中面包含 x, y 轴,而且板的中点取为坐标系的原点。由经典薄板理论和 von Karman 假设^[14],板内任一点处在 x, y 和 z 方向上的面内位移 u_1, u_2 和横向位移 u_3 可近似地表示为

$$\begin{cases} u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t) - zw_{,x}, \\ u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t) - zw_{,y}, \\ u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t), \end{cases} \quad (1)$$

其中, u, v, w 是板的中面位移,下标 $(,)$ 表示对坐标变量求偏导。根据 von Karman 理论,板的非线性几何关系定义为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 - zw_{,xx}, \\ \varepsilon_y = v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 - zw_{,yy}, \\ \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} - 2zw_{,xy}. \end{cases} \quad (2)$$

对于考虑各向异性损伤效应的各向同性粘弹性矩形板,假设沿板的厚度方向损伤均匀分布^[7]。取一板单元,设 D_1, D_2 分别为单元板在 x, y 方向上的损伤变量,其定义为

$$D_i = (A_i - A_i)/A_i \quad (i = 1, 2),$$

其中: A_i 和 A_i 分别表示损伤前后单元的横截面面积。由载荷等效原理,假设作用在损伤截面上的内力与无损伤时相等,则有效应力与 Cauchy 应力之间的关系可表示为

$$A_i \sigma_{ij} \delta_j = A_i \sigma_j \delta_j \quad (i, j, k = 1, 2; 1 = x; 2 = y), \quad (3)$$

式中, σ_j 为 Cauchy 应力, σ_j 为有效应力。式 (3) 可改写为

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_x}{1-D_1} & \frac{\sigma_{xy}}{1-D_1} \\ \frac{\sigma_{yx}}{1-D_2} & \frac{\sigma_y}{1-D_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-D_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-D_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} = M \sigma \quad (4)$$

显然,对于各向异性损伤,其有效应力张量不是一对称阵,但 Cauchy 应力是一对称阵 ($\sigma_j = \sigma_{ji}$)。由于采用非对称张量来形成损伤演化方程以及本构方程时将遇到困难,为此,需要对这些有效应力进行对称化处理。许多学者^[15-17]对于有效应力张量的对称化,提出了不同的方法。在本文中,对称化的有效应力采用如下形式:

$$\sigma = M^{1/2} \cdot \sigma \cdot M^{1/2},$$

于是, 对称化的有效应力可写为如下的形式

$$\begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-D_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-D_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{(1-D_1)(1-D_2)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix},$$

记为

$$\sigma = \Phi \sigma \tag{5}$$

又有效弹性应变 ε 与 Cauchy 应变 ε 的关系为

$$\varepsilon = \Phi^{-1} \varepsilon \tag{6}$$

式中, $\varepsilon^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}]$, $\varepsilon^T = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}]$. 设应力-应变为线性关系, 则由 Boltzmann 叠加原理^[18], 有

$$\begin{aligned} \sigma(t) = E^* d\varepsilon = E(t) \varepsilon(0) + \int_0^t E(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau = \\ E(0) \varepsilon(t) + \int_0^t E(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{7}$$

式中上标(\cdot)表示对时间 t 求偏导, “*”为 Stieltjes 卷积运算符号. 对于各向同性粘弹性材料, 且仅考虑泊松比 ν 为常数的情形, 有

$$E(t) = \begin{bmatrix} \frac{E(t)}{1-\nu^2} & \frac{\nu E(t)}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E(t)}{1-\nu^2} & \frac{E(t)}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E(t)}{2(1+\nu)} \end{bmatrix},$$

式中, $E(t)$ 为时变松弛函数, $E(0)$ 为材料的初始弹性模量. 在本文中取粘弹性材料为标准线性固体材料^[2-6], 其松弛函数可取为 $E(t) = \alpha + \beta e^{-\gamma t}$, 其中 α, β 和 γ 为材料参数.

在横向载荷 $q(x, y, t)$ 作用下, von Kaman 板的运动控制方程为^[14]

$$\begin{cases} N_{x,x} + N_{xy,y} = 0, & N_{xy,x} + N_{y,y} = 0, \\ M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + q = \rho w_{,tt} \end{cases} \tag{8}$$

式中 ρ 为板单位体积的质量, 且

$$[N_x, N_y, N_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}] dz, \quad [M_x, M_y, M_{xy}] = \int_{-h/2}^{h/2} [\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}] z dz \tag{9}$$

应用式(2)、(5)~(7)和(9), 且引入如下的无量纲参数:

$$\begin{aligned} \xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad \lambda = a/b, \quad k^2 = 12(1-\nu^2), \quad \tau = t/t_1, \\ Q = qk^3 a^4 / (E(0) h^4), \quad p = \rho k^2 a^4 / (t_1^2 E(0) h^2), \quad U = ak^2 u / h^2, \\ V = ak^2 v / h^2, \quad W = kw / h, \quad e(\tau) = E(\tau) / E(0). \end{aligned}$$

由式(8), 则得到考虑各向异性损伤效应的以无量纲中面位移 U, V 和 W 表示的粘弹性矩形板的运动控制方程为

$$(1-D_1)(U_{,\xi\xi} + W_{,\xi W_{,\xi\xi}}) + \nu \lambda (1-D_2)(V_{,\xi\eta} + \lambda W_{,\eta W_{,\xi\eta}}) +$$

$$\frac{(1-\nu)\lambda}{2}(1-D_2)(\mathcal{N}_{,\eta} + V_{,\xi\eta} + \mathcal{N}W_{,\eta}W_{,\xi\eta} + \mathcal{N}W_{,\xi}W_{,\eta\eta}) = 0, \quad (10a)$$

$$\frac{(1-\nu)}{2}(1-D_1)(\mathcal{N}_{,\xi\eta} + V_{,\xi\xi} + \mathcal{N}W_{,\eta}W_{,\xi\xi} + \mathcal{N}W_{,\xi}W_{,\xi\eta}) + \nu\lambda(1-D_1)(U_{,\xi\eta} + W_{,\xi}W_{,\xi\eta}) + \lambda^2(1-D_2)(V_{,\eta\eta} + \mathcal{N}W_{,\eta}W_{,\eta\eta}) = 0, \quad (10b)$$

$$(1-D_1)[e^* d(1-D_1)(U_{,\xi} + 0.5W_{,\xi}^2)]W_{,\xi\xi} + \nu\lambda(1-D_1) \times [e^* d(1-D_2)(V_{,\eta} + 0.5\mathcal{N}W_{,\eta}^2)]W_{,\xi\xi} + \lambda(1-\nu) \sqrt{(1-D_1)(1-D_2)} \times [e^* d \sqrt{(1-D_1)(1-D_2)}(\mathcal{N}_{,\eta} + V_{,\xi} + \mathcal{N}W_{,\xi}W_{,\eta})]W_{,\xi\eta} + \nu\lambda^2(1-D_2)[e^* d(1-D_1)(U_{,\xi} + 0.5W_{,\xi}^2)]W_{,\eta\eta} + \lambda^3(1-D_2)[e^* d(1-D_2)(V_{,\eta} + 0.5\mathcal{N}W_{,\eta}^2)]W_{,\eta\eta} - (1-\nu^2)(1-D_1)[e^* d(1-D_1)W_{,\xi\xi\xi}] - \lambda^2\nu(1-\nu^2)(1-D_1)[e^* d(1-D_2)W_{,\xi\eta\eta}] - 2\lambda^2(1-\nu)(1-\nu^2) \sqrt{(1-D_1)(1-D_2)}[e^* d \sqrt{(1-D_1)(1-D_2)}W_{,\xi\eta\eta}] - \lambda^2\nu(1-\nu^2)(1-D_2)[e^* d(1-D_1)W_{,\xi\eta\eta}] - \lambda^4(1-\nu^2)(1-D_2)[e^* d(1-D_2)W_{,\eta\eta\eta}] + (1-\nu^2)Q - (1-\nu^2)pW_{,\eta\eta} = 0 \quad (10c)$$

且设横向载荷取如下形式

$$Q = f(\tau) \cos(\pi\xi) \cos(\pi\eta), \quad f(\tau) = f_0 \sin(\theta\tau) \quad (11)$$

本文中,考虑边界切线不可动的简支板,其边界条件如下

$$\begin{cases} \xi = \pm 1/2: V = 0, W = 0, W_{,\xi\xi} = 0, N_x a^2 / (E(0)h^3) = 0, \\ \eta = \pm 1/2: U = 0, W = 0, W_{,\eta\eta} = 0, N_y a^2 / (E(0)h^3) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

且在本文中,应用如下的损伤演化方程^{[13],[19]}

$$\frac{dD_i}{d\tau} = \begin{cases} A \left(\frac{\langle \sigma_i \rangle_+}{1-D_i} \right)^n, & \langle \sigma_i \rangle_+ \geq \sigma_D \\ 0, & \langle \sigma_i \rangle_+ < \sigma_D \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (13)$$

式中, A 、 n 为材料常数, σ_D 为损伤应力的门槛值,且

$$\sigma_1 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad \sigma_2 = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad \langle \sigma_i \rangle_+ = \begin{cases} \sigma_i, & \sigma_i \geq 0 \\ 0, & \sigma_i < 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2) \quad (14)$$

2 求解方法

本文中,对整个问题采用数值方法求解。由于荷载和结构对称,只取板的四分之一进行计算。所考虑的域为 $0 \leq \xi \leq 1/2, 0 \leq \eta \leq 1/2$, 且将这个域用方形网格分成 $m \times m$ 个部分。在空间上和时间上,对控制方程(10)和边界条件(12)分别采用有限差分法和Newmark方法离散,同时,将时间 τ 分成 N 等分,每一时间步长为 $\Delta\tau = \tau/N$ 。假设初始时刻材料没有损伤,则各点的损伤变量值为零,即 $D_1^0 = 0, D_2^0 = 0$ 。在任一时间迭代步 J , 利用方程(10)和(12)求得板内任一点的位移后,在继续后一时间迭代步之前,必须判断板内任一点的损伤是否增长。为此,首先通过式(2)和有限差分格式求得板内任一点的应变,再利用式(7)和(14)可求得 σ_1 和 σ_2 ,最后利用式(13)来判断损伤是否增长。假设 $D_i^{(J)}$ 为在 $J\Delta\tau$ 时刻板内任一点的损伤值,若 $\langle \sigma_i \rangle_+ \geq \sigma_D$, 则在 $J\Delta\tau$ 时刻的损伤值可表示为

$$D_i^{(J)} = D_i^{(J-1)} + D_{\tau}(D_i^{(J-1)}, \langle \sigma_i \rangle_+) \Delta\tau \quad (i = 1, 2),$$

若 $\langle \sigma_i \rangle_+ < \sigma_D$, 则 $D_i^{(J)} = D_i^{(J-1)}$ ($i = 1, 2$)。

3 数值结果

为验证本文方法的正确性,首先考虑不含损伤的各向同性粘弹性矩形板,取参数如下:

$$m = 5, \nu = 0.25, \lambda = 1, p = 100, f_0 = 1000, \theta = 0.5, e(\tau) = 0.1 + 0.9e^{-0.1\tau}$$

图1中将板中点挠度 W_0 与时间 t 的响应曲线与文献[3]进行了比较。从图1中看出,两条曲线非常吻合,说明了本文方法的正确性。由于粘弹性材料具有一种耗散性能,在动力问题中,材料的粘性性质使得粘弹性结构的响应幅值比相应的弹性结构的响应幅值要小;同时,它可提高结构振动的稳定性,使结构的振动行为从混沌运动向多周期运动,进而从多周期运动向周期运动转化(如图2所示),这一结论与文献[4]和文献[5]中所述相同。

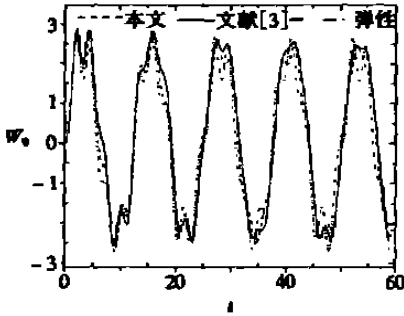


图1 板中点挠度与时间 t 的响应曲线

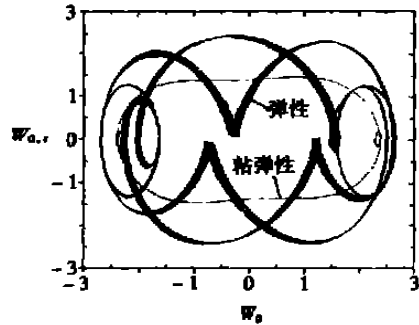


图2 板中点的相平面图

对于考虑损伤效应的粘弹性矩形板的非线性时程响应问题,其粘弹性参数取值与图1中的相同,损伤参数取为: $A = 1.223 \times 10^{-41} \text{MPa}^{-15}/\text{h}$, $n = 15$ 。算例中,具体讨论了外载荷参数和板的几何尺寸对板非线性振动的影响,如图3至图6所示。从图中可以看出,由损伤引起的板挠度的增加是不容忽略的。

图3显示了外载荷幅值对板中点挠度时程响应的影响。图中虚线表示无损情况,实线表示考虑了损伤演化的情况(以下相同)。由图3可知,随着时间的增长和损伤的演化,损伤对结构非线性动力响应的影响越显著;同时,随着外载荷幅值的加大,结构的振动越激烈,损伤的影响也越大。图4显示了外激励频率对板中点挠度时程响应的影响。由图3与图4可知,外激励频率对板中点挠度的影响与外载荷幅值的影响基本相同,可见,考虑结构的损伤及其演化是很必要的。

图5显示了跨厚比对板中点挠度时程响应的影响。从图中可以看出,跨厚比对板的振动幅值的影响是很显著的,随着跨厚比的增加,即板的厚度变薄,板中点的振动幅值越大;且随着损伤累积的增加,考虑损伤效应的粘弹性矩形板与无损粘弹性板的振动幅值相差越大,最终可能导致结构的破坏。图6表示了长宽比对板中点挠度时程响应的影响。随着长宽比的增大,即在长度不变的情况下,宽度缩小时,板的刚度增大,从而导致板的振动幅值下降,损伤的影响也越小。同样地,随着时间的延长,由损伤引起的板中点挠度的增量也越来越大。

4 结论

本文研究了在横向周期载荷作用下考虑损伤效应的各向同性粘弹性矩形板的非线性动力响应问题。具体讨论了外载荷幅值、外激励频率、跨厚比和长宽比等因素对板非线性振动幅值的影响。从分析可知,考虑损伤效应的结构与无损伤效应的结构相比,两者之间的非线性动力

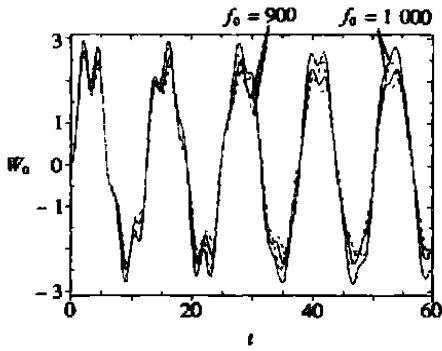


图3 外载荷幅值对板中点挠度
时程响应的影响

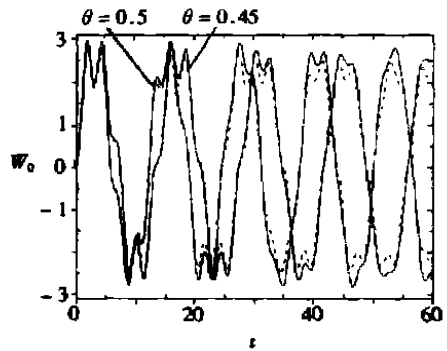


图4 外激励频率对板中点挠度
时程响应的影响

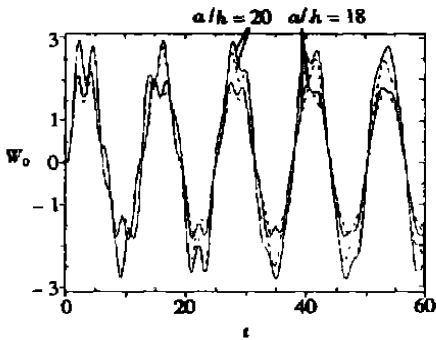


图5 跨厚比对板中点挠度
时程响应的影响

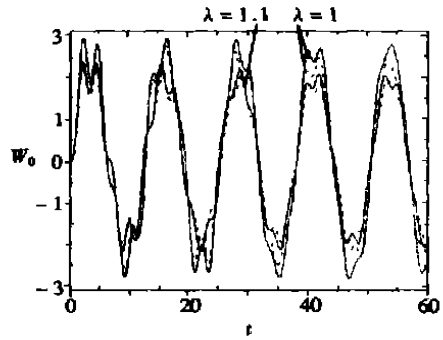


图6 长宽比对板中点挠度
时程响应的影响

响应相差很大。在损伤演化过程中,由损伤引起的板的挠度的增加是不容忽视的,结构的非线性动力响应随损伤的增长而发生显著的变化。

[参 考 文 献]

- [1] 杨挺青. 粘弹性力学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990, 8—42.
- [2] Huang N N. Viscoelastic analysis of creep response for uniaxially compressed laminates with initial deflection including the effect of physical aging[J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, 35(4): 1515—1532.
- [3] 程昌钧, 张能辉. 粘弹性矩形板的混沌和超混沌行为[J]. 力学学报, 1998, 30(6): 690—699.
- [4] Sun Y X, Zheng S Y. Chaotic dynamic analysis of viscoelastic plates[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2001, 43(5): 1195—1208.
- [5] Touati D, Cederbaum G. Dynamic stability of nonlinear viscoelastic plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 1994, 31(17): 2367—2376.
- [6] Kim T W, Kim J H. Nonlinear vibration of viscoelastic laminated composite plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(10): 2857—2870.
- [7] Ladeveze P, Dantec E L. Damage modeling of the elementary ply for laminated composites[J]. Composites Science and Technology, 1992, 43(2): 257—267.
- [8] Allix O, Ladeveze P. Interlaminar interface modeling for the prediction of delamination[J]. Composite Structures, 1992, 22(3): 235—242.

- [9] Chow C L, Wang J. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1987, 27(5): 547—558.
- [10] Weitsman Y. A continuum damage model for viscoelastic materials[J]. Journal of Applied Mechanics, 1988, 55(4): 773—780.
- [11] Schapary R A, Sicking D L. On nonlinear constitutive equations for elastic and viscoelastic composites with growing damage[A]. In: Seventh International Conference on Mechanical Behaviour of Materials [C]. Delft: Delft University Press, 1995: 45—76.
- [12] Akshantala N V, Brinson L C. A damage evolution model for viscoelastic composite laminates[J]. Journal of Composites Technology and Research, 2001, 23(10): 3—14.
- [13] 张我华, 金萸, 陈云敏. 损伤材料的动力响应特性[J]. 振动工程学报, 2000, 13(3): 413—425.
- [14] Chia C Y. Nonlinear Analysis of Plates [M]. New York: McGraw_Hill, 1980.
- [15] Chow C L, Wang J. An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics[J]. International Journal of Fracture, 1987, 33(1): 3—16.
- [16] Murakami S. Mechanical modeling of material damage[J]. Journal of Applied Mechanics, 1988, 55(2): 280—286.
- [17] Geoge Z, Voyiadjis G, Teoayo P. Local and interfacial damage analysis of metal matrix composites using the finite element method[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1997, 56(4): 483—511.
- [18] Pipkin A C. Lectures on Viscoelasticity Theory [M]. New York: Springer_Verlag, 1986.
- [19] Kachanov L M. Introduction to Continuum Damage Mechanics [M]. Dordrecht: Martinus Nijhoff, 1986.

Effect of Damage on Nonlinear Dynamic Properties of Viscoelastic Rectangular Plates

ZHENG Yu_fang, FU Yi_ming

(Department of Engineering Mechanics, Hunan University,
Changsha 410082, P. R. China)

Abstract: The nonlinear dynamic behaviors of viscoelastic rectangular plates including the damage effects under the action of a transverse periodic load were studied. Using the von Karman equations, Boltzmann superposition principle and continuum damage mechanics, the nonlinear dynamic equations in terms of the mid-plane displacements for the viscoelastic thin plates with damage effect were derived. By adopting the finite difference method and Newmark method, these equations were solved. The results were compared with the available data. In the numerical calculations, the effects of the external loading parameters and geometric dimensions of the plate on the nonlinear dynamic responses of the plate were discussed. Research results show that the nonlinear dynamic response of the structure will change remarkably when the damage effect is considered.

Key words: rectangular plate; viscoelasticity; damage effect; geometric nonlinearity