文章编号: 1000_0887(2005) 03_0300_09

具有时滞的双向联想记忆(BAM)的神经网络的全局动力学行为*

周　进[1,2,3], 刘曾荣[3], 向　兰[4]

(1. 河北工业大学 应用数学研究所, 天津 300130;
2. 复旦大学 数学研究所, 上海 200433;
3. 上海大学 数学系, 上海 200436;
4. 河北工业大学 应用物理系, 天津 300130)

(我刊编委刘曾荣来稿)

摘要: 在没有假定关联函数的光滑性, 单调性和有界性的条件下, 应用 Liapunov 泛函方法和矩阵代数技术, 得到具有常数传输时滞的双向联想记忆(BAM)的神经网络模型平衡点存在性和全局指数稳定性的一些新的充分条件, 这些条件可以由网络参数, 连接矩阵和关联函数的 Lipschitz 常数所表示的M 矩阵来刻化• 这些结果不仅是简单和实用的, 而且相对于已有文献的结果具有较少的限制和更易于验证•

关 键 词: 双向联想记忆(BAM); 神经网络; 全局指数稳定; Liapunov 泛函
中图分类号: O175; TN911　　文献标识码: A

引　言

考虑具有常数传输时滞的双向联想记忆(BAM)的神经网络模型[1,2]

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(y_j(t-\sigma_{ij})) + I_i, & i = 1, 2, \cdots, m, \\ \dfrac{\mathrm{d}y_j(t)}{\mathrm{d}t} = -c_j y_j(t) + \sum_{i=1}^{m} d_{ji} g_i(x_i(t-\tau_{ji})) + J_j, & j = 1, 2, \cdots, n, \end{cases} \tag{1}$$

对于 $t > 0$• 系统(1) 表示由两组神经元排列为两层, 即 I 层和 J 层, 所组成的网络• 在系统(1) 中, $x_i(\cdot)$ 和 $y_j(\cdot)$ 分别表示相应于 I 层和 J 层第 i 个神经元和第 j 个神经元的膜电位, b_{ij}、d_{ji} 分别表示神经元间互连的突触的权重, I_i、J_j 分别表示网络外部的输入, σ_{ij}、τ_{ji} 分别表示相应的神经轴突的传输时滞, a_i、c_j 分别表示来自于 I 层和 J 层相应于第 i 个神经元和第 j 个神经元与神经网络不连通并且无外部附加电压差的情况下第 i 个神经元和第 j 个神经元恢复孤立静

* 收稿日期: 2003_07_04; 修订日期: 2004_11_30
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474071, 10171061); 中国国家博士后科学基金资助项目(20040350121); 河北省教委科研计划资助项目(2003103); 河北省高校应用数学与物理重点学科建设资助项目
作者简介: 周进(1963—), 男, 重庆人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_21_55073261; Fax: + 86_22_26543322; E_mail: jinzhou@fudan.edu.cn)•

息状态的速率• $f_j(\cdot)$ 和 $g_i(\cdot)$ 分别表示相应的关联函数•

双向联想记忆(BAM)的神经网络(1)作为一种非常重要的网络, 通常用于描述借助于双向, 即前后两个方向, 储存或记忆一对类似模式的能力, 这对于在模式识别以及自动控制工程中的应用是至关重要的(见参考文献[3]至文献[6]及它们的参考文献)• 众所周知, 当网络通常应用于作为联想记忆的时候, 多个平衡点的存在性是一个重要的特征• 然而, 在应用于并行计算, 网络控制, 优化和信号处理的时候, 仍然要求对于所有的初始状态, 具有一个很好定义可以计算的解• 从数学的观点, 这意味着网络模型(1)应该具有唯一平衡点, 它是全局渐近稳定的(GAS)或者是全局指数稳定的(GES)• 从 GAS(GES)的定义: 对于具有任何初值条件的所有解将收敛(以指数的速度)到唯一的平衡点[1,2]• 因此, 研究具有双向联想记忆(BAM)的神经网络模型(1)的全局收敛的动力学性质具有非常重要的意义•

近年来, 具有时滞或没有时滞双向联想记忆(BAM)的神经网络模型(1)的稳定性问题的研究已经引起不断的注意(见参考文献[1]和[2]、[6]和[7]及它们的参考文献)• 在大多数从前研究网络(1)的全局收敛的动力学性质时, 都是假定关联函数是可微, 单调增加和有界的[6~8]• 然而, 在设计和实施一些人工神经网络模型时, 关联函数的光滑性, 单调性和有界性往往并不满足[9~15]• 最近, 对于双向联想记忆神经网络模型(1)平衡点存在性和唯一性都是在具有有界的, 非单调和非光滑的条件下得到[1,2]• 此外, 应该注意到: 从前的研究都是使用有界的关联函数来得到平衡点的存在性和解轨道的有界性• 然而, 在通常的人工神经网络, 比如在二次规划的神经网络和细胞神经网络(CNNs)的模型中, 关联函数的有界性往往并不是必要的[11]• 因此, 在没有假定关联函数的有界性, 单调性和光滑性的条件下, 研究双向联想记忆神经网络的全局动力学性质, 从理论和应用两个方面都是相当重要的•

本文的主要目的是在不假定关联函数的有界性, 单调性和光滑性的条件下, 应用 Liapunov 泛函方法和矩阵代数技术, 在相应于网络外部的输入为常数 I_i、J_j 的条件下, 得到具有时滞的双向神经网络模型(1)平衡点的存在性和全局指数稳定性的一些新的充分条件• 这些条件可以由网络参数, 连接矩阵和关联函数的 Lipschitz 常数所表示的 M 矩阵来刻化• 这些结果不仅是简单和实用的, 而且相对于已有文献的结果具有较少的限制和更易于验证•

1　预 备 知 识

本文假设 a_i、$c_j \in \mathbf{R}^+ = (0, \infty)$, b_{ij}、d_{ji}、I_i, $J_j \in \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$, σ_{ij}, $\tau_{ji} \in [0, \infty)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, ; $j = 1, 2, \cdots, n$• 这里假定关联函数 $f_j(\cdot)$ 和 $g_i(\cdot)$ 满足下面的性质:

(A_1) 存在实数 $A_j \geqslant 0$, $B_i \geqslant 0$ 和 $L_j \geqslant 0$, $M_i \geqslant 0$, 使得对于 $x \in \mathbf{R}$,

$$|f_j(x)| \leqslant L_j |x| + A_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$$
$$|g_i(x)| \leqslant M_i |x| + B_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, m•$$

(A_2) $f_j(\cdot)$、$g_i(\cdot)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上全局 Lipschitz 连续的函数, 即存在实数 $L_j > 0$, $M_i > 0$, 使得对于任意两个不同的实数 x_1、$x_2 \in \mathbf{R}$,

$$|f_j(x_1) - f_j(x_2)| \leqslant L_j |x_1 - x_2|, \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$$
$$|g_i(x_1) - g_i(x_2)| \leqslant M_i |x_1 - x_2|, \qquad i = 1, 2, \cdots, m•$$

注释 1　容易证明: 如果条件(A_2)满足, 则条件(A_1)自然满足• 应该注意到一个全局 Lipschitz 的关联函数可以是非光滑的, 非单调的, 甚至是无界的• 很清楚, 在通常人工神经网络模型中, 一般的关联函数, 如 Hopfield 神经网络中的通常 sigmoid 类型函数和 CNN 细胞神经网络模型中的逐段线性函数, 都包含在条件(A_1)和

(A_2)中•

关于泛函微分方程理论的基本概念,稳定性定义和相关的结果参见文献[16]• 考虑相对于网络(1)的初值形式为

$$x_i(s)=\phi_i(s),\quad s\in[-\tau,0],\quad \tau=\max_{1\leqslant i\leqslant m,\,1\leqslant j\leqslant n}\{\tau_{ji}\},\qquad i=1,2,\cdots,m, \tag{2a}$$

$$y_j(s)=\psi_j(s),\quad s\in[-\sigma,0],\quad \sigma=\max_{1\leqslant i\leqslant m,\,1\leqslant j\leqslant n}\{\sigma_{ij}\},\qquad j=1,2,\cdots,n, \tag{2b}$$

这里 $\phi_i(\cdot)$、$\psi_j(\cdot)$ 分别表示定义在区间$[-\tau,0]$ 和$[-\sigma,0]$ 上连续的实函数• 让 $\Phi(\cdot)=(\phi_1(\cdot),\ \phi_2(\cdot),\ \cdots,\ \phi_m(\cdot))^{\mathrm T}$, $\Psi(\cdot)=(\psi_1(\cdot),\ \psi_2(\cdot),\ \cdots,\ \psi_n(\cdot))^{\mathrm T}$, $\lambda=\max\{\sigma,\tau\}$ 和 $C\overset{\text{def}}{=}C([-\lambda,0],R^{(m+n)})$ 表示由区间$[-\lambda,0]$ 到 $R^{(m+n)}$ 上所有连续映射在具有通常定义的范数下为 Banach 空间[12]• 对于任意给定的 $\Lambda=(\Phi^{\mathrm T},\ \Psi^{\mathrm T})^{\mathrm T}\in C$ 和$t_0\in\mathbf{R}$,我们用$\boldsymbol{z}(t)=(\boldsymbol{x}(t)^{\mathrm T},\boldsymbol{y}(t)^{\mathrm T})^{\mathrm T}$ 表示(1)的一个解,这里

$$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t))^{\mathrm T}=(x_1(t,\Lambda),x_2(t,\Lambda),\cdots,x_m(t,\Lambda))^{\mathrm T},$$

$$\boldsymbol{y}(t)=(y_1(t),y_2(t),\cdots,y_n(t))^{\mathrm T}=(y_1(t,\Lambda),y_2(t,\Lambda),\cdots,y_n(t,\Lambda))^{\mathrm T},$$

对于 $t>0$, 其中T表示矩阵的转置•

2 平衡点存在性

定理 1 假设(A_1)成立,存在$(m+n)$个正数$p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_n$和两个正数$r_1\in[0,1]$, $r_2\in[0,1]$, 使得

$$\begin{cases} a_ip_i>\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(|b_{ij}|p_iL_j^{2r_1}+|d_{ji}|q_jM_i^{2(1-r_2)}), & i=1,2,\cdots,m,\\ c_jq_j>\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(|d_{ji}|q_jM_i^{2r_2}+|b_{ij}|p_iL_j^{2(1-r_1)}), & j=1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{3}$$

则方程(1)至少存在一个平衡点•

证明 考虑一个映射 $\boldsymbol{T}:R^{(m+n)}\rightarrow R^{(m+n)}$, 这个映射被定义为

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})^{\mathrm T},\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})^{\mathrm T})^{\mathrm T},\ \text{对于}\ \boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x}^{\mathrm T},\boldsymbol{y}^{\mathrm T})^{\mathrm T}\in R^{(m+n)},$$

这里 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm T}$ 和 $\boldsymbol{F}(y)=(F_1(y),F_2(y),\cdots,F_m(y))^{\mathrm T}$, $\boldsymbol{G}(x)=(G_1(x),G_2(x),\cdots,G_n(x))^{\mathrm T}$ 并且

$$\begin{cases} F_i(y)=\dfrac{1}{a_i}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(y_j)+I_i\right), & i=1,2,\cdots,m,\\ G_j(x)=\dfrac{1}{c_j}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}d_{ji}g_i(x_i)+J_j\right), & j=1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{4}$$

这表明

$$-a_iF_i(y)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(G_j(x))+I_i=0,\qquad i=1,2,\cdots,m, \tag{5}$$

$$-c_jG_j(x)+\sum_{j=1}^{m}d_{ji}g_i(F_i(y))+J_i=0,\qquad j=1,2,\cdots,n• \tag{6}$$

用 $F_i(y)$ 乘以(5)并利用(A_1)和不等式 $ab\leqslant 0.5(a^2+b^2)$ 得到

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{m}p_i\Big\{-a_iF_i^2(y)+$$

$$\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}||F_i(y)|(L_j|(G_j(x))|+A_j)+|I_i||F_i(y)|\Big\}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m}p_i\Big\{-a_iF_i^2(y)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|(F_i^2(y)L_j^{2r_1}+G_j^2(x)L_j^{2(1-r_1)})+$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{m}|b_{ij}|A_j+|I_i|\Big)|F_i(y)|\Big\}\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m}\Big\{\Big(-a_ip_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|p_iL_j^{2r_1}\Big)F_i^2(y)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|p_iL_j^{2(1-r_1)}G_j^2(x)+$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|A_j+|I_i|\Big)p_i|F_i(y)|\Big\}. \tag{7}$$

用 $G_j(x)$ 乘以方程(6)并采用上面相同的分析过程可以得到

$$0\leqslant\sum_{j=1}^{n}\Big\{\Big(-c_jq_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|d_{ji}|q_jM_i^{2r_2}\Big)G_j^2(x)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|d_{ji}|q_jM_i^{2(1-r_2)}F_i^2(y)+$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{m}|d_{ji}|B_i+|J_j|\Big)q_j|G_j(x)|\Big\}. \tag{8}$$

由条件(3), 让

$$\alpha_i=a_ip_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|b_{ij}|p_iL_j^{2r_1}+|d_{ji}|q_jM_i^{2(1-r_2)})>0,\qquad i=1,2,\cdots,m,$$

$$\alpha_j'=c_jq_j-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(|d_{ji}|q_jM_i^{2r_2}+|b_{ij}|p_iL_j^{2(1-r_1)})>0,\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

和

$$\beta_i=\Big(\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|A_j+|I_i|\Big)p_i>0,\qquad i=1,2,\cdots,m,$$

$$\beta_j'=\Big(\sum_{i=1}^{m}|d_{ji}|B_i+|J_j|\Big)q_j>0,\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

从(7)和(8)得到

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Big(|F_i(y)|-\frac{\beta_i}{2\alpha_i}\Big)^2+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j'\Big(|G_j(x)|-\frac{\beta_j'}{2\alpha_j'}\Big)^2\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\beta_i}{2\alpha_i}\Big)^2+\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\beta_j'}{2\alpha_j'}\Big)^2. \tag{9}$$

定义集合

$$\Omega=\Big\{z=(x^{\mathrm T},y^{\mathrm T})^{\mathrm T}\in R^{(m+n)}\ \Big|\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\Big(|x_i|-\frac{\beta_i}{2\alpha_i}\Big)^2+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j'\Big(|y_j|-\frac{\beta_j'}{2\alpha_j'}\Big)^2\leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\beta_i}{2\alpha_i}\Big)^2+\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\beta_j'}{2\alpha_j'}\Big)^2\Big\},$$

则 Ω是一个有界的闭凸集, 并且映射 $\boldsymbol T$ 映 Ω成自身. 应用 Brouwer 不动点定理, 则 $\boldsymbol T$ 在 Ω内有一个不动点 $\boldsymbol z^*=(\boldsymbol x^{*\mathrm T},\boldsymbol y^{*\mathrm T})^{\mathrm T}$, 这个不动点就是(1)的平衡点, 这样就完成了定理 1 的证明.

定理 2　假设($\mathrm A_1$)成立, 存在 $(m+n)$ 个正数 $p_1,\cdots,p_m,q_1,\cdots,q_n$, 使得

$$\begin{cases} a_ip_i>M_i\sum_{j=1}^{n}|d_{ji}|q_j, & i=1,2,\cdots,m,\\ c_jq_j>L_j\sum_{i=1}^{m}|b_{ij}|p_i, & j=1,2,\cdots,n, \end{cases} \tag{10}$$

则方程(1)至少存在一个平衡点•

证明 同定理1的证明一样,让

$$\gamma_i = a_i p_i - M_i \sum_{j=1}^{n} |d_{ji}| q_j > 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\gamma_j' = c_j q_j - L_j \sum_{i=1}^{m} |b_{ij}| p_i > 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n,$$

由(5)、(6)并利用(A_1)得到

$$\sum_{i=1}^{m} \gamma_i |F_i(y)| + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j' |G_j(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j', \tag{11}$$

其余的证明类似于定理1的证明,这里从略•

注释2 很清楚,当所有的 $M_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)$ 和所有的 $L_j = 0\ (j = 1, 2, \cdots, n)$, 条件(3)和(10)自然成立• 从定理1和定理2得到:如果(1)中的每一个关联函数都是有界的,则方程(1)至少存在一个平衡点•这是以前大多数文献中的一个典型结果[1,2],[7~10]•

让

$$\boldsymbol{K} = (k_{ij})_{(m+n)\times(m+n)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times m} & (b_{ij})_{m\times n} \\ (d_{ji})_{n\times m} & \boldsymbol{O}_{n\times n} \end{bmatrix},$$

这里 $\boldsymbol{O}_{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{O}_{n\times n}$ 是 $m \times m$ 和 $n \times n$ 零矩阵,相应地,让

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_m, c_1, \cdots, c_n), \quad \boldsymbol{N} = \mathrm{diag}(M_1, \cdots, M_m, L_1, \cdots, L_n)•$$

由定理2和非奇异的M矩阵的等价定义(见文献[12]中定义2的条件3),我们有如下的简单和实用的判别法则:

推论1 假设(A_1)成立,且矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{KN}$ 是一个非奇异的M矩阵,则方程(1)至少有一个平衡点•

同样由非奇异的M矩阵的等价定义不难证明[12]: $\boldsymbol{A}$ 是一个非奇异的M矩阵当且仅当 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{EN}^{-1} - \boldsymbol{K}$ 是一个非奇异的M矩阵• 从推论1得到

推论2 假设(A_1)成立,且以下条件之一满足,则方程(1)至少有一个平衡点•

1) 存在 $(m+n)$ 个正数 $p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_n$, 使得

$$\begin{cases} a_i p_i > \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| L_j q_j, & i = 1, 2, \cdots, m, \\ c_j q_j > \displaystyle\sum_{i=1}^{m} |d_{ji}| M_i p_i, & j = 1, 2, \cdots, n• \end{cases} \tag{12}$$

2) 存在 $(m+n)$ 个正数 $p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_n$ 使得

$$\begin{cases} a_i p_i > \dfrac{1}{2} M_i \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (|b_{ij}| p_i + |d_{ji}| q_j), & i = 1, 2, \cdots, m, \\ c_j q_j > \dfrac{1}{2} L_j \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (|d_{ji}| q_j + |b_{ij}| p_i), & j = 1, 2, \cdots, n• \end{cases} \tag{13}$$

3 平衡点的稳定性

定理3 假设(A_2)和(3)成立,则方程(1)有唯一的全局指数稳定的平衡点•

证明 平衡点的存在性可由定理1和注释1容易得到,以下证明平衡点的指数稳定性•让 $\boldsymbol{z}^* = (\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}}, \boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 是方程(1)的平衡点,这里 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \cdots,$

$y_n^*)^{\mathrm{T}}$• 通过变换 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{v}(t)=\boldsymbol{y}(t)-\boldsymbol{y}^*$, 这里 $\boldsymbol{u}(t)=(u_1(t),u_2(t),\cdots,u_m(t))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}(t)=(v_1(t),v_2(t),\cdots,v_n(t))^{\mathrm{T}}$, 方程(1)将被写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_i(t)}{\mathrm{d}t}=-a_iu_i(t)+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f'_j(v_j(t-\sigma_{ij})), & i=1,2,\cdots,m,\\ \dfrac{\mathrm{d}v_j(t)}{\mathrm{d}t}=-c_jv_j(t)+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}d_{ji}g'_i(u_i(t-\tau_{ji})), & j=1,2,\cdots,n,\end{cases}\tag{14}$$

这里$f'_j(v_j(t))=f_j(v_j(t)+y_j^*)-f_j(y_j^*)$, $g'_i(u_i(t))=f_i(u_i(t)+x_i^*)-f_i(x_i^*)$• 因此, 方程(1) 在 $\boldsymbol{z}^*=(\boldsymbol{x}^{*\mathrm{T}},\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 的稳定性相应于方程(14) 在平衡点 $\boldsymbol{w}=(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 的稳定性, 所以只考虑系统(14)• 按照条件(A_2), f'_i, g'_i 具有下面的性质:

$$|f'_j(v_j)|\leqslant L_j|v_j|,\quad |g'_i(u_i)|\leqslant M_i|u_i|,\tag{15}$$

从条件(3)得, 存在一个实数 $\varepsilon>0$, 使得

$$\begin{cases}\left(-a_i+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)p_i+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(|b_{ij}|p_iL_j^{2r_1}+|d_{ji}|q_jM_i^{2(1-r_2)}e^{\varepsilon\tau_{ji}})<0,\\ \qquad\qquad i=1,2,\cdots,m,\\ \left(-c_j+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)q_j+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{m}(|d_{ji}|q_jM_i^{2r_2}+|b_{ij}|p_iL_j^{2(1-r_1)}e^{\varepsilon\sigma_{ij}})<0,\\ \qquad\qquad j=1,2,\cdots,n•\end{cases}\tag{16}$$

现在构造 Liapunov 泛函 $W=U(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(t)+V(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(t)$, 这里

$$U(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}p_i\left\{u_i^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|L_j^{2(1-r_1)}\int_{t-\sigma_{ij}}^{t}v_j^2(s)\mathrm{e}^{\varepsilon(s+\sigma_{ij})}\mathrm{d}s\right\},\tag{17}$$

$$V(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(t)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}q_j\left\{v_j^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\sum_{i=1}^{m}|d_{ji}|M_i^{2(1-r_2)}\int_{t-\tau_{ji}}^{t}u_i^2(s)\mathrm{e}^{\varepsilon(s+\tau_{ji})}\mathrm{d}s\right\},\tag{18}$$

或者写为

$$\begin{aligned}U(t,\Phi,\Psi)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}p_i\Big\{&\phi_i^2(0)\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\\ &\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|L_j^{2(1-r_1)}\int_{t-\sigma_{ij}}^{t}\psi_j^2(s-t)\mathrm{e}^{\varepsilon(s+\sigma_{ij})}\mathrm{d}s\Big\},\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}V(t,\Phi,\Psi)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}q_j\Big\{&\psi_j^2(0)\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\\ &\sum_{i=1}^{m}|d_{ji}|M_i^{2(1-r_2)}\int_{t-\tau_{ji}}^{t}\phi_i^2(s-t)\mathrm{e}^{\varepsilon(s+\tau_{ji})}\mathrm{d}s\Big\}•\end{aligned}\tag{20}$$

按照f'_i和g'_i 的性质, 沿着方程(14) 的解计算 U, V 关于时间变量全导数相应得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\Big\{&\left(-a_i+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|L_j^{2r_1}\right)p_iu_i^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\\ &\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}p_i|b_{ij}|L_j^{2(1-r_1)}v_j^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon(t+\sigma_{ij})}\Big\},\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant\sum_{j=1}^{n}\Big\{&\left(-c_j+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}|d_{ji}|M_i^{2r_2}\right)q_jv_j^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\\ &\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}q_j|d_{ji}|M_i^{2(1-r_2)}u_i^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon(t+\tau_{ji})}\Big\}•\end{aligned}\tag{22}$$

由(21),(22)和(16)得到

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\left(-a_i+\frac{\varepsilon}{2}\right)p_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(|b_{ij}|p_iL_j^{2r_1}+|d_{ji}|q_jM_i^{2(1-r_2)}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_{ji}}\right)\right)u_i^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}\right\}+\sum_{j=1}^{n}\left\{\left(\left(-c_j+\frac{\varepsilon}{2}\right)q_j+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left(|d_{ji}|q_jM_i^{2r_2}+|b_{ij}|p_iL_j^{2(1-r_1)}\mathrm{e}^{\varepsilon\sigma_{ij}}\right)\right)v_i^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}\right\}\leqslant 0.$$

从而

$$W(t)\leqslant W(0),\qquad 对于所有\ t\geqslant 0. \tag{23}$$

从Liapunov泛函中 U、V 的构造可知

$$\frac{1}{2}\min_{1\leqslant i\leqslant m}\{p_i\}\mathrm{e}^{\varepsilon t}\sum_{i=1}^{m}u_i^2(t)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2}p_iu_i^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}\leqslant U(t), \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{q_j\}\mathrm{e}^{\varepsilon t}\sum_{j=1}^{n}v_j^2(t)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}q_jv_j^2(t)\mathrm{e}^{\varepsilon t}\leqslant V(t), \tag{25}$$

又由(19)、(20)得到

$$U(0)\leqslant\frac{1}{2}\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{p_i\}\|\phi\|^2+\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}p_i|b_{ij}|L_j^{2(1-r_1)}\mathrm{e}^{\varepsilon\sigma_{ij}}\sigma\right\}\|\phi\|^2, \tag{26}$$

$$V(0)\leqslant\frac{1}{2}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{q_j\}\|\phi\|^2+\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}q_j|d_{ji}|M_i^{2(1-r_2)}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_{ji}}\tau\right\}\|\phi\|^2. \tag{27}$$

综合不等式(23)、(24)、(25)、(26)和(27),我们有

$$|w(t)|=\left(\sum_{i=1}^{m}u_i^2(t)+\sum_{j=1}^{n}u_j^2(t)\right)^{1/2}\leqslant\rho\|\varphi\|\mathrm{e}^{-(\varepsilon/2)t},$$

这里

$$\rho=\max\left\{1,\left[\min\left\{\min_{1\leqslant i\leqslant m}\{p_i\},\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{q_j\}\right\}^{-1}\left(\max\{\rho_1,\rho_2\}\right)\right]^{1/2}\right\},$$

$$\rho_1=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{p_i\}+\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left\{\sum_{j=1}^{n}q_j|d_{ji}|M_i^{2(1-r_2)}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau_{ji}}\tau\right\},$$

$$\rho_2=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{q_j\}+\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\sum_{i=1}^{m}p_i|b_{ij}|L_j^{2(1-r_1)}\mathrm{e}^{\varepsilon\sigma_{ij}}\sigma\right\},$$

这样就完成了定理3的证明.

定理4 假设(A_2)和(10)成立,则方程(1)有唯一的全局指数稳定的平衡点.

证明 同定理3的证明一样,构造Liapunov泛函 $W=U(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(t)+V(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(t)$,这里

$$U(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(t)=\sum_{i=1}^{m}p_i\left\{|u_i(t)|\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\int_{t-\sigma_{ij}}^{t}|f_j'(v_j(s))\mathrm{e}^{\varepsilon(s+\sigma_{ij})}\mathrm{d}s\right\}, \tag{28}$$

$$V(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})(t)=\sum_{j=1}^{n}q_j\left\{|v_j(t)|\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\sum_{j=1}^{m}|d_{ji}|\int_{t-\tau_{ji}}^{t}|g_i'(u_i(s))|\mathrm{e}^{\varepsilon(s+\tau_{ji})}\mathrm{d}s\right\}, \tag{29}$$

其余的证明类似于定理3的证明,这里从略.

相应于推论1和推论2,由定理4我们有

推论3 假设(A_2)成立,且矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{KN}$ 是一个非奇异的M矩阵,则方程(1)有唯一的全局指数稳定的平衡点.

推论 4　假设(A_2)成立, 且条件(12)和(13)之一满足, 则方程(1)有唯一的全局指数稳定的平衡点•

注释 3　对于 $i = j = 1, 2, \cdots, m$, 当所有的 $p_i = 1$ 和所有的 $q_j = 1$ 时, 定理 3 和推论 4 实际上是文献[1]中的主要结果(见文献[1]中的定理 2.1 和定理 2.3), 这里关联函数为有界的条件实际上被去掉, 很清楚, 定理 3 和推论 4 是文献[1]中的主要结果一个重要的推广和改进•

注释 4　应该注意到定理 3, 推论 3 和推论 4 大大地改进了文献[2]中的主要结果(见文献[2]中的定理 1 和定理 2), 在那里假定每一个关联函数是单调不减并且是有界的•　在这里仅仅假定关联函数是全局 Lipschitz 连续的•　关联函数为有界的条件实际上被略去, 并且平衡点的全局指数稳定性被证明•　此外, 上面的分析表明: 在文献[2]中定理 1 和定理 2 并不是独立的•

[参　考　文　献]

[1] Mohamad S. Global exponential stability in continuous_time and discrete_time delayed bidirectional neural networks[J] Physica D, 2001, **159**(3): 233—251.

[2] Liao X F, Yu J B, Chen G. Novel stability criteria for bidirectional associative memory neural networks with time delays [J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 2002, **30**(3): 519—546.

[3] Kosko B. Bidirectional associative memories[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, **18**(1): 49—60.

[4] Kosko B. Unsupervised learning in noise[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1990, **1**(1): 44—57.

[5] Kosko B. Structural stability of unsupervised learning in feedback neural networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1991, **36**(5): 785—790.

[6] Maundy B, Masry E. A switched capacitor bidirectional associative memory[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1990, **37**(12): 1568—1572.

[7] Gopalsamy K, He X Z. Delay_independent stability in bidirectional associative memory networks[J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 1994, **5**(7): 998—1002.

[8] Liao X F, Wong K W, Yu J B. Novel stability conditions for cellular neural networks with time delay [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2001, **11**(12): 1835—1864.

[9] Morita M. Associative memory with non_monotone dynamics [J]. Neural Networks, 1993, **6**(1): 115—126.

[10] Yoshizawa S, Morita M, Amari S. Capacity of associative memory using a non_monotonic neuron networks[J]. Neural Networks, 1993, **6**(2): 167—176.

[11] Kennedy M P, Chua L O. Neural networks for nonlinear programming[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1988, **35**(4): 554—562.

[12] ZHOU Jin, LIU Zeng_rong, CHEN Guan_rong. Dynamics of delayed periodic neural networks[J]. Neural Networks, 2004, **16**(1): 87—101.

[13] ZHOU Jin, CHEN Tian_ping, XIANG Lan. Robust synchronization of coupled delayed recurrent neural networks, Advances in Neural Networks_ISNN[A]. Lecture Notes in Computer Science[C]. Berlin Heidelberg, New York: Springer_Verlag, 2004, **3173**(1): 144—149.

[14] CHEN Guan_rong, ZHOU Jin, LIU Zeng_rong. Global synchronization of coupled delayed neural networks and applications to chaotic CNN models [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2004, **14**(7): 2229—2240.

[15] 向兰, 周进, 刘曾荣, 等. 具有周期输入 Hopfield 型神经网络的全局渐近性质[J]. 应用数学和力学,

2002, **23**(12): 1220—1226.

[16] Hale J K. Introduction to Functional Differential Equations [M]. 2nd Edition. New York: Berlin Heidelberg: Springer_Verlag, 1977.

Global Dynamics of Delayed Bidirectional Associative Memory (BAM) Neural Networks

ZHOU Jin[1,2,3], LIU Zeng_rong[3], XIANG Lan[4]

(1. Institute of Applied Mathematics, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, P. R. China;

2. Institute of Mathematics, Fudan University, Shanghai, 200433, P. R. China;

3. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P. R. China;

4. Department of Physics, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, P. R. China)

Abstract: Without assuming the smoothness, monotonicity and boundedness of the activation functions, some novel criteria on the existence and global exponential stability of equilibrium point for delayed bidirectional associative memory (BAM) neural networks are established by applying the Liapunov functional methods and matrix_algebraic techniques. It is shown that the new conditions presented in terms of a nonsingular M matrix described by the networks parameters, the connection matrix and the Lipschitz constant of the activation functions, are not only simple and practical, but also easier to check and less conservative than those imposed by similar results in recent literature.

Key words: bidirectional associative memory (BAM); neural network; global exponential stability; Liapunov function