

文章编号: 1000_0887(2005) 03_0316_09

弹性动脉血管中血液流动特性的模拟和分析*

A·克乌玛¹, C·L·范西尼¹, G·C·夏玛²

(1. 瑞·范西尼学院 数学和计算机科学系, 阿利加赫 202001, 印度;
2. 基础科学研究所, 坎大热, 阿格拉 282002, 印度)

(周哲玮推荐)

摘要: 研究了两个不同的非牛顿血液流动模型: 低粘性剪切简单幂律模型和低粘性剪切及粘弹性振荡流的广义 Maxwell 模型。同时利用这两个非牛顿模型和牛顿模型, 研究了磁场中刚性和弹性直血管中血液的正弦型脉动。在生理学条件下, 大动脉中血液的弹性对其流动性态似乎并不产生影响, 单纯低粘性剪切模型可以逼真地模拟这种血液流动。利用高剪切幂律模型模拟弹性血管中的正弦型脉动流, 发现在同一压力梯度下, 与牛顿流体相比较, 幂律流体的平均流率和流率变化幅度都更小。控制方程用 Crank-Nicolson 方法求解。弹性动脉中血液受磁场作用是产生此结果的直观原因。在主动脉生物流的模拟中, 与牛顿流体模型比较, 发现在匹配流率曲线上, 幂律模型的平均壁面剪切应力增大, 峰值壁面剪切应力减小。讨论了弹性血管横切磁场时的血液流动, 评估了血管形状和表面不规则等因素的影响。

关键词: 弹性动脉模型; Crank-Nicolson 方法; 非牛顿流体; 壁面剪切应力
中图分类号: O242.1; O357.1; R318.01 文献标识码: A

符号说明

τ	壁面剪切应力	C	波速
$\dot{\gamma}$	剪切率	M	磁场参数 (Hartmann 数)
τ_y	屈服应力	u, w	r, z 方向速度分量
η_c	Casson 粘度	P	压力
k	稠度指数	α	待定参数
n	非牛顿指数	k, R	平均参量
τ_p	p 单元剪应力	T_p	p 单元驰豫时间
ω	角速度	ρ	密度
R	脉管半径		

引言

在过去的几十年间, 粥样硬化动脉中的流动现象的重要性已愈来愈明显, 例如流动分

* 收稿日期: 2003_10_17

本文原文为英文, 由吴承平译, 张禄坤校。

离、回流、滞二次流动、低振荡壁面剪应力和长期颗粒驻留时间。研究血液流经硬化脉管的血流力学是非常重要的理论, 因为硬化的血管威胁人的健康, 是工业化国家人们生病死亡的重要原因。关于动脉血液流动已有一些研究: Thurston (1979)^[1]利用包括非牛顿粘性、粘弹性和触变性模型研究了血液的流变性质。Liesch 和 Moravec (1984)^[2]研究了稀薄血液的剪切流动, 模拟血液流经动脉分支模型时的脉动流。他观察到其速度剖面与用高粘性剪切率的牛顿流体模拟的血液有很大的不同。Rindt 等 (1987)^[3]用实验和数值两种方法研究了二维定常流和脉动流。Nazemi 等 (1990)^[4]在判定动脉硬化方面作出了重要的贡献。Rodkiewicz 等 (1990)^[5]用几个不同的非牛顿血液模型模拟了大动脉中的血液流动, 并发现血液的屈服应力对速度剖面和壁面剪切应力均无影响。Boesiger 等 (1992)^[6]利用磁共振图 (MRI) 技术研究了动脉血流动力学。Perktold 等 (1994)^[7]模拟了狭小血管中的流动即刚性脉管中不可压缩牛顿流体的流动。Sharma 和 Kapoor (1995)^[8]利用有限元法对动脉血液流动进行了数学分析。Dutta 和 Tarbell (1996)^[9]研究了两个不同的血液流变模型: 低粘性剪切模型和振荡流粘弹性模型。Lee 和 Libby (1997)^[10]对动脉中易损粥样硬化斑块, 包括纤维帽覆盖的大坏死核进行了研究。

Korenaga 等 (1998)^[11]考虑了生物化学因素, 例如遗传因子的表达和硬化血管中斑块破裂时蛋白质的输运, 表明是血流动力因素激活了壁面剪应力。Rachev 等 (1998)^[12]研究了动脉的几何和力学匹配的模型。Rees 和 Thompson (1998)^[13]由层流边界层理论导出了一个简单模型, 用于研究狭窄动脉中的血液流动, 雷诺数为 1 000。Tang 等 (1999)^[14]分析认为, 血液动力学的盖帽张拉、动脉扭转弯曲是主要的触发因素。Zendeubudi 和 Moayary (1999)^[15]比较了通过狭窄动脉的生理学流和单纯脉动流。

Berger 和 Jou (2000)^[16]在轴对称狭窄血管顺流方向, 当可能造成粥样硬化斑块破裂的血流动力作用时, 观测了壁面剪切应力。Botnar 等 (2000)^[17]在 MRI 速度测量值和数值模拟一致的基础上, 利用两种方法, 详细研究了不同流动模式, 对于动脉硬化斑块的产生和发展的影响。Stroud 等 (2000)^[18]发现, 在狭窄程度相同的狭窄动脉中其流场和壁面剪切应力并不相同。Sharma 等 (2001)^[19]用 Galerkin 有限元方法对动脉血液流动进行了数学分析。

最近我们研究了, 当弹性动脉横切磁场时的血液流动, 本文拓展局部流动计算到血液非牛顿流变学, 以便利用有限差分法考查血液低粘弹性剪切对大弹性动脉在磁场中的血液流动动态的影响。

1 血液的本构方程

全血的本构方程为

$$\tau^{1/2} = \eta_c \dot{\gamma}^{1/2} + \tau_y^{1/2}; \quad |\tau| > \tau_y \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = 0, \quad |\tau| < \tau_y \quad (2)$$

其中 η_c 为 Casson 粘度, $\dot{\gamma}$ 为剪切率。当恒稳分血和蛋白质浓缩时, 该本构方程又退化为表征稀薄剪切性态的幂律方程。

$$\tau = k \dot{\gamma}^n \quad (3)$$

其中 k 为稠度指数, n 为非牛顿指数。若剪切率单位为 s^{-1} , 剪应力单位为 N/cm^2 , 则 37 °C 时 45% 的分离人血的 $k = 0.149$, $n = 0.775$ 。这时的本构方程为 (见 Thurston (1979)^[1]):

$$\tau_p + T_p \frac{\partial \tau_p}{\partial t} = \frac{\eta_{0,p}}{1 + (\dot{\gamma} T_p)^2} \dot{\gamma} \quad (4)$$

$$\tau = \sum_{p=1}^6 \tau_p + \eta_{\infty} \dot{\gamma} \quad (5)$$

其中 η_{∞} 为终端阻尼粘度, 我们利用 Walburn 和 Schneck (1976) 的高剪切率牛顿截幂律方程和 Thurston (1979)^[1] 的粘弹性模型, 研究大动脉刚性和弹性管道模型中, 低粘性剪切和粘弹性对血液流动参数的影响。

2 控制方程

本文研究在横切磁场的弹性动脉中, 非牛顿流体局部流动的公式表达。可以不计感应磁场。我们用纵向同性薄壁管道内的均匀、不可压缩流体的流动来模拟血液流动, 并且流体上作用了振荡压力梯度。用长波长近似 $|R/C| \ll 1$ 简化运动方程。在此假设下, 忽略轴向粘性输运项, 径向运动方程简化为 $\partial P / \partial r = 0$, 即是说压力沿径向不变。在柱坐标系中, 控制动量方程和连续性方程为

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau) - Mw, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{u}{r} = 0, \quad (7)$$

其中, u 和 w 分别为 r 和 z 方向的速度分量, P 为压力, ρ 为密度, M 为磁场分布或 Hartmann 数。一个单纯的弹性模型, 对动脉而言是足够精确的, 其关系式为 (见 Milnor (1989)^[20])

$$R = R(p) \quad (8)$$

边界条件为

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad u = 0, \quad \text{当 } r = 0, \quad (9)$$

$$w = 0, \quad u = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad \text{当 } r = R(t, z), \quad (10)$$

利用 $\xi = r / (R(t, z))$ 作坐标变换, 变换后的控制方程为 (见 Milnor (1989)^[20])

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left(\frac{u}{r} - \frac{\xi}{R} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{w}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{\xi} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{\rho R} \frac{\partial \tau}{\partial \xi} - \frac{\tau}{\rho R \xi} - Mw,$$

或
$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{\rho R} \frac{\partial \tau}{\partial \xi} - \frac{\tau}{\rho R \xi} + \left(\frac{\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{u}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{w}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{u}{\xi} \right) - Mw, \quad (11)$$

$$u = \frac{\partial R}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial z} \left[\xi w - \frac{2}{\xi} \left(\int_0^{\xi} \xi w d\xi - \int_0^1 \xi w d\xi \int_0^1 \xi |w| d\xi \right) \int_0^{\xi} \xi |w| d\xi \right] + \frac{1}{\xi} \frac{\partial R}{\partial t} \left(\int_0^{\xi} \xi |w| d\xi \int_0^1 \xi |w| d\xi \right), \quad (12)$$

其中导数 $\partial R / \partial P$ 即为动脉的弹性响应, 其值可由实验得出 (见 White (1991)^[21])。

变换后的边界条件为

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad u = 0, \quad \text{当 } \xi = 0, \quad (13)$$

$$w = 0, \quad u = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad \text{当 } \xi = 1, \quad (14)$$

对幂律流体方程 (3), 求解流动问题得

$$\tau = -k \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial w}{\partial r}, \quad (15)$$

这里, 对于某一无量纲管流, 剪切率 $\dot{\gamma}$ 被 $-\partial w / \partial r$ 所代替, 并且方程 (9) 和方程 (15) 也

变换到新的坐标系下•

$$\tau = -\frac{k}{R} \left| \frac{\partial w / \partial \xi}{R} \right|^{n-1} \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad (16)$$

方程 (4) 和方程 (5) 变换到新的坐标系下为

$$\frac{\partial \tau_p}{\partial t} = -\frac{\tau_p}{T_p} + \frac{\xi}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial \tau_p}{\partial \xi} \frac{\eta_{0,p}/T_p}{1 + (\gamma T_p)} \gamma, \quad (17)$$

$$\tau = \sum_{p=1}^6 \tau_p + \eta_{\infty} \gamma, \quad (18)$$

动量方程和连续性方程 (12) 和 (15) 可在边界条件 (13) 和 (14) 上求解, 得到磁场作用下弹性动脉中非牛顿流体流场的完全解•

在初始模拟阶段, 我们关注含有一个谐波的简单振荡函数

$$\frac{\partial P(t)}{\partial z} = K + k \cos(\omega t), \quad (19)$$

$$R(t) = R(1 + k_R \cos(\omega t - \phi)), \quad (20)$$

其中 R 和 K 为平均参量, k 和 k_R 为振幅, ϕ 为相角, ω 为频率•

$$Q(t) = Q(1 + k_\theta \cos(\omega t - \theta)), \quad (21)$$

$$\tau_w(t) = \tau(1 + k_r \cos(\omega t - \phi)), \quad (22)$$

其中 $Q(t)$ 和 $\tau_w(t)$ 分别为流率和剪应力• 在我们的模拟中, 二次谐波振幅只比一次谐波振幅小 8%, 表明只有很小的失真•

为了产生多谐波生理学流波形, 我们输入多谐波压力梯度波形模拟生理学流•

$$z = P/Q,$$

及 $Z_w = P/R,$

其中 z 为阻抗, Z_w 为壁阻抗•

3 数值方法

利用 Crank-Nicolson 格式, 我们得到控制方程的空间离散形式• C. F. D. 中, 时间指数通常以上角标形式出现, n 表征时间 t 时的条件, $n+1$ 表征时间 $t + \Delta t$ 时的条件• 对所考虑的特定范围, 上角标仅仅表示网格点的位置• 半离散控制方程可写为:

$$\begin{aligned} \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} &= \frac{1}{\rho_i^n} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta z} - \frac{1}{\rho_i^n R_i^n} \frac{\tau_i^{n+1} - \tau_i^n}{\Delta \xi} - \\ &\quad \frac{\tau_i^n}{\rho_i^n R_i^n} + \left[\frac{\xi_i^n}{R_i^n} \left(\frac{R_i^{n+1} - R_i^n}{2\Delta t} \right) - \frac{u_i^n}{R_i^n} \right] \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta \xi} + \\ &\quad \frac{w_i^n}{R_i^n} \left(\left[\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta \xi} \right] - \frac{u_i^n}{\xi_i^n} \right) - M_i w_i^n, \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x)^2$,

同时, 未知量 w_i^{n+1} 并不仅仅用时间指数为 n 的已知量表示• 网格点 i 不能单独导出 w_i^{n+1} 的解• 关于未知量 w_i^{n+1} 的代数方程组, 可以对所有的 i 联立求解, 解出 w_i^{n+1} • 由于边界条件的确定方法对整体解的精度, 有时对数值方法的收敛性, 有很大的影响, 因此应小心确定边界条件• 离散边界条件为:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_i = \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta \xi} + O(\Delta \xi)^2 = 0, \quad \text{当 } \xi = 0, \quad (24)$$

$$w = 0, u = \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)_i = \frac{R_i^{n+1} - R_i^n}{\Delta t}, \quad \text{当 } \xi = 1, \quad (25)$$

这一方法用于瞬间离散化, 以保证对流和扩散项的时空二阶精度解。代数方程组用 Gauss-Siedal 法求解。

补充适当的本构方程求解轴向动量方程 (23) 即可计算轴向速度, 而由方程 (12) 可计算出径向速度。初步选择压力梯度参数 (K, k), 产生出刚性管道内牛顿流体的流动曲线, 其振幅约等于平均值 ($k_0 = 1$), 从而求出标准状态 $Q = 7.7 \text{ L/min}$, $\alpha = 12$, $k = 18 \times 10^{-5} \text{ N/cm}^3$, $M = 2$ 时胸大动脉的平均流率特征值; 为了与半径 (R) 及流动 (Q) 曲线系统相匹配, 生理学流动的模拟要求迭代计算。算法的详细设计请参见 (文献 [22], Dutta 等 (1992))。壁阻抗用单纯弹性单元模拟, 其相角为零, 常数模数为 $(\partial R / \partial P)^{-1}$ 。狗动脉的实验表明, 该简单模型是精确的 (见文献 [23], Patel 等 (1973))。

4 结果和讨论

本文给出了所研究问题的多种参数组合的数值解。由于我们的主要目的是研究磁场对刚性和弹性动脉的作用, 因此关注的是恒稳流动情况。目前的许多数值研究都是针对生理学流动的。压力梯度使各种流体同样发生流动, 但由于各种流体的流变性质不同, 产生的流动曲线形状也不相同。设若定常流条件下幂律模型参数是已知的, 那么它们可能对振荡流同样

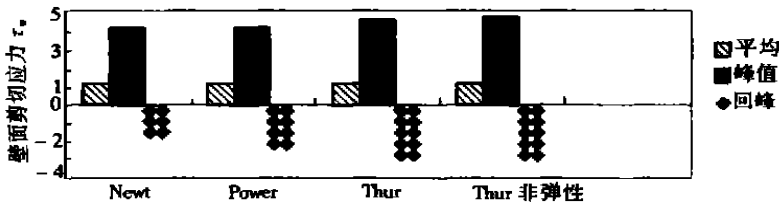
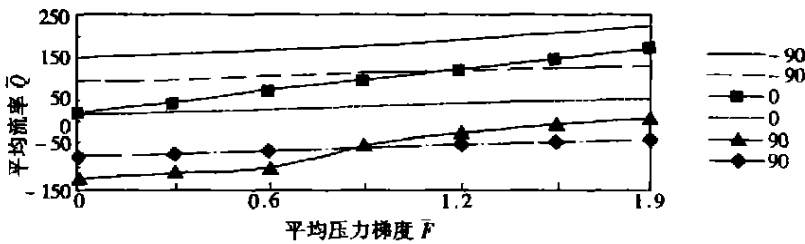


图 1 磁场中刚性动脉在固定压力梯度作用下不同流变模型壁面剪切应力的比较

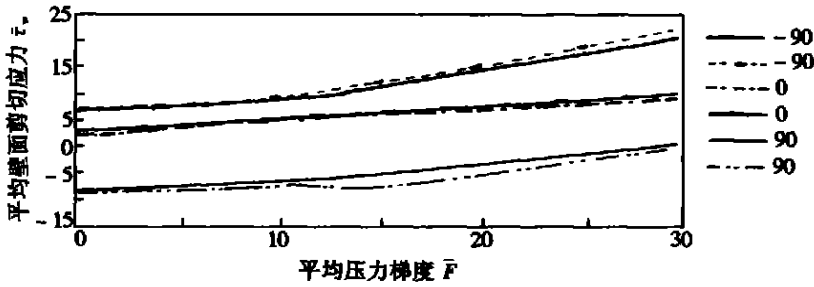


实线: 牛顿模型; 虚线: 幂律模型; $k = 18 \times 10^{-5} \text{ N/cm}^3$; $\alpha = 12$,

$R = 1.9 \text{ cm}$, $M = 2$, 阻尼相角 $(-90^\circ, 0^\circ, 90^\circ)$

图 2 弹性动脉在不同参数时的平均流率和平均压力梯度的关系

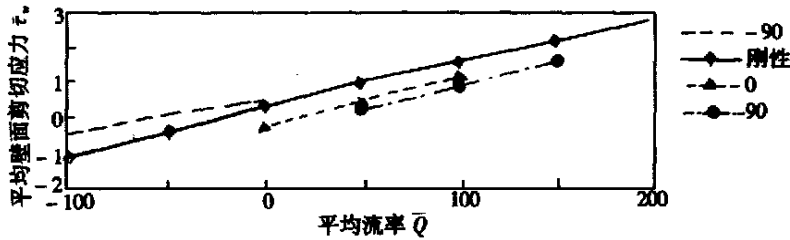
适用。图 1 表明, 对所研究的几个模型, 其平均壁面剪切应力是相同的。这反映了如下的事实: 若采用平均轴向动量方程进行时空描述时, 在横向磁场中刚性管内流体流动的平均壁面剪切应力, 与流体的流变性质无关, 仅与平均压力梯度有关。该模拟还表明, Turston 模型在考虑弹性和不考虑弹性的预测值间无实质不同, 并且该结论对 1 Hz 和 2 Hz ($\alpha = 12$) 的模拟情况仍然成立。这说明, 横向磁场中血液的弹性 (可测) 在动脉流动情况下, 并不影响直



实线: 牛顿模型; 虚线: 幂律模型; 阻尼角 ($-90^\circ, 0^\circ, 90^\circ$);

$$k = 18 \times 10^{-5} \text{ N/cm}^3; \alpha = 18, R = 1.4, M = 2$$

图3 弹性动脉在不同参数时的平均壁面剪切应力和平均压力梯度的关系



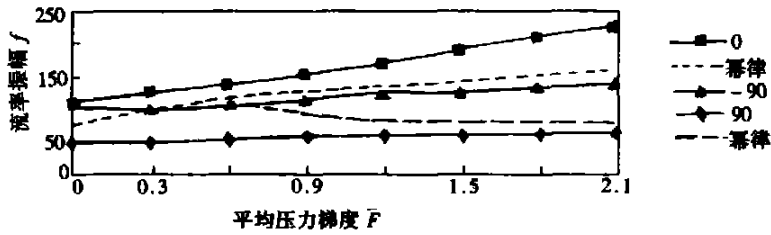
实线: 刚性动脉; 虚线: 弹性动脉; 阻尼角 ($-90^\circ, 0^\circ, 90^\circ$);

$$k = 18 \times 10^{-5} \text{ N/cm}^3; \alpha = 12, R = 1.9 \text{ cm}, M = 2$$

图4 不同参数时幂律模型平均壁面剪切应力和平均流率的关系

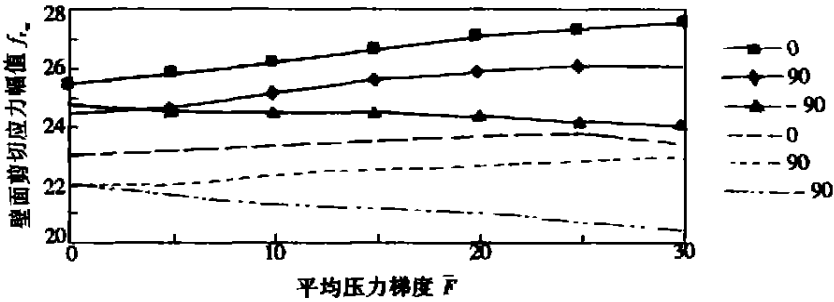
血管中的血液流动状态。图2显示了 $\alpha = 12, R = 1.9 \text{ cm}$ 时,对不同的 P_Q 相角,平均流率和平均压力梯度的函数关系。在低剪切率区域,高阻力流动的幂律流体比高粘性牛顿流体,在相同压力梯度下有更低的流率。就是说,在 0° 到 -90° 范围,在流动方向的对流加速度可能最小。在 P_Q 相角为 $+90^\circ$ 时,对流加速度的作用方向与平均压力梯度方向相反,出现反向的平均流动,特别是在平均压力梯度值小时,我们观察到 α 值较高时,剪切率也高,并且此时幂律流体的粘性接近于牛顿流体。图3显示牛顿性质对平均流动的影响是显著的,而对稀薄剪切流体的平均壁面剪应力影响非常小。图4显示了平均壁面剪切应力和平均流率。我们宁可利用平均流率而不是平均压力梯度,来估计横向磁场中弹性动脉的平均壁面剪切应力。实线表示磁场中刚性血管的结果。图5给出了流率的一阶谐波的振幅与平均压力梯度的关系曲线。对于牛顿流体,由于平均分量与振荡分量间的非线性关系,非牛顿流率振荡幅度会随着平均压力梯度的增加而显著增大,即使压力梯度的振荡幅度保持为常值仍然如此。图6示出了,对固定的压力梯度幅值,壁面剪切应力幅值与平均压力梯度的关系。比较幂律流体和牛顿流体时,不稳定参数 α 较小时,较低的剪切率反映了较高的粘性。不稳定参数 α 较大时,剪切率较高并且幂律模型表现得更象牛顿流体。

图7示出了,当流动曲线形状不变时,流变性质对壁面剪切应力曲线形状的影响。平均壁面剪切应力增大时,幂律流体与横向磁场作用下刚性血管中的牛顿流体相当。非牛顿流体平均壁面剪切应力的增大缘于较高的平均压力梯度。这与我们的正弦流动模拟一致,这里我们看到,在相同压力梯度下,幂律流体的壁面剪切应力幅值小于牛顿流体(图6)。



实线: 牛顿模型; 虚线: 幂律模型; $k = 18 \times 10^{-5} \text{ N/cm}^3$; $\alpha = 12$,
 $R = 1.9 \text{ cm}, M = 2$

图5 弹性动脉在磁场作用下流率振幅和平均压力梯度的关系



实线: 牛顿模型; 虚线: 幂律模型; $k = 40.5 \times 10^{-5} \text{ N/cm}^3$; $\alpha = 18$,
 $R = 1.4 \text{ cm}, M = 2$

图6 弹性动脉在磁场作用下壁面剪切应力幅值与平均压力梯度的关系

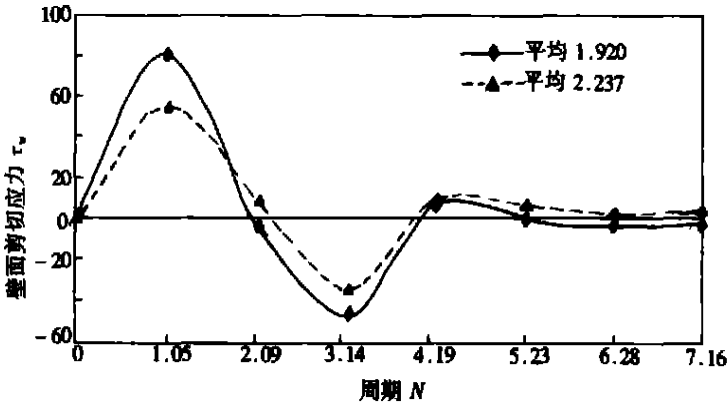


图7 牛顿流体模型 (实线) 和幂律流体模型 (虚线) 升主动脉的弹性动脉模型壁面剪切应力的曲线

5 结 论

本文中, 我们找到两个不同的血液流变模型。一个是低粘性剪切简单幂律模型, 另一个是横向磁场作用下低粘性剪切和粘弹性振荡流动的广义 Maxwell 模型。我们发现磁场对流动性态有显著的影响。本研究表明, 我们提出的模型完全可以处理流变性质对血液流动和血流

动力性能的影响。这一点对医生诊断病情非常重要, 医生可以根据横向磁场中弹性动脉的血流图形对每个病人作出判断。磁场作用可以控制血液流动, 这对某些高血压病等是有用的。

[参 考 文 献]

- [1] Thurston G B. Rheological parameters for the viscosity, viscoelasticity and thixotropy of blood [J]. *Biorheology*, 1979, **16**: 149—155.
- [2] Liepsch D, Moravec S. Pulsatile flow of non-Newtonian fluid in distensible models of human arteries [J]. *Biorheology*, 1984, **21**: 571—583.
- [3] Rindt C C M, Van de Vosse F N, Van Steenhoven A A, et al. A numerical and experimental analysis of the human carotid bifurcation [J]. *J Biomechanics*, 1987, **20**: 499—509.
- [4] Nazemi M, Kleinstreuer C, Archie J P. Pulsatile two-dimensional flow and plaque formation in a carotid artery bifurcation [J]. *J Biomechanics*, 1990, **23** (10): 1031—1037.
- [5] Rodkiewicz C M, Sinha P, Kennedy J S. On the application of a constitutive equation for whole human blood [J]. *J Biomechanical Engg*, 1990, **112**: 198—204.
- [6] Boesiger P, Maier S E, Kecheng L, et al. Visualisation and quantification of the human blood flow by magnetic resonance imaging [J]. *J Biomechanics*, 1992, **25**: 55—67.
- [7] Perktold K, Thurner E, Kenner T. Flow and stress characteristics in rigid walled compliant carotid artery bifurcation models [J]. *Medical and Biological Engg and Computing*, 1994, **32**: 19—26.
- [8] Sharma G C, Kapoor J. Finite element computations of two-dimensional arterial flow in the presence of a transverse magnetic field [J]. *International J for Numerical Methods in Fluid Dynamics*, 1995, **20**: 1153—1161.
- [9] Dutta A, Tarbell J M. Influence of non-Newtonian behavior of blood on flow in an elastic artery model [J]. *ASME J Biomechanical Engg*, 1996, **118**: 111—119.
- [10] Lee R, Libby P. The unstable atheroma [J]. *Arteriosclerosis Thrombosis Vascular Biology*, 1997, **17**: 1859—1867.
- [11] Korenaga R, Ando J, Kaniya A. The effect of laminar flow on the gene expression of the adhesion molecule in endothelial cells [J]. *Japanese J Medical Electronics and Biological Engg*, 1998, **36**: 266—272.
- [12] Rachev A, Stergiopoulos N, Meister J J. A model for geometric and mechanical adaptation of arteries to sustained hypertension [J]. *J Biomechanical Engg*, 1998, **120**: 9—17.
- [13] Rees J M, Thompson D S. Shear stress in arterial stenoses: a momentum integral model [J]. *J Biomechanics*, 1998, **31**: 1051—1057.
- [14] Tang D, Yang C, Huang Y, et al. Wall stress and strain analysis using a three-dimensional thick wall model with fluid-structure interactions for blood flow in carotid arteries with stenoses [J]. *Computers and Structures*, 1999, **72**: 341—377.
- [15] Zendehebudi G R, Moayary M S. Comparison of physiological and simple pulsatile flows through stenosed arteries [J]. *J Biomechanics*, 1999, **32**: 959—965.
- [16] Berger S A, Jou L D. Flows in stenotic vessels [J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2000, **32**: 347—384.
- [17] Botnar R, Rappich G, Scheidegger M B, et al. Hemodynamics in the carotid artery bifurcation: a comparison between numerical simulation and in vitro MRI measurements [J]. *J Biomechanics*, 2000, **33**: 137—144.
- [18] Stroud J S, Berger S A, Saloner D. Influence of stenosis morphology on flow through severely stenotic vessels: implications for plaque rupture [J]. *J Biomechanics*, 2000, **33**: 443—455.

- [19] 夏玛 G C, 马德胡 J, 克乌玛 A. 动脉血管流动计算的伽辽宁省金有限元法研究 [J]. 应用数学和力学, 2001, **22** (9): 911—917.
- [20] Milnor W R. Hemodynamics [M]. 2nd edition. Baltimore: Williams and Wilkins, 1989.
- [21] White K C. Hemodynamics and wall shear rate measurements in the abdominal aorta of dogs [D]. Ph D Thesis. The Pennsylvania State University.
- [22] Dutta A, Wang D M, Tarbell J M. Numerical analysis of flow in an elastic artery model [J]. ASME J Biomechanical Engg, 1992, **114**: 26—32.
- [23] Patel D J, Janicki J S, Vaishnav R N, et al. Dynamic anisotropic viscoelastic properties of the aorta in living dogs [J]. Circulation Research, 1973, **32**: 93—98.

Performance Modeling and Analysis of Blood Flow in Elastic Arteries

Anil Kumar¹, C. L. Varshney¹, G. C. Sharma²

(1. Department of Post Graduate Studies and Research in Mathematics & Computer Science, S. Varshney College, Aligarh_202001, India;

2. Institute of Basic Science, Khandari, Agra_282002, India)

Abstract: Two different non-Newtonian models for blood flow are considered, first a simple power law model displaying shear thinning viscosity, and second a generalized Maxwell model displaying both shear thinning viscosity and oscillating flow viscous elasticity. These models are used along with a Newtonian model to study sinusoidal flow of blood in rigid and elastic straight arteries in the presence of magnetic field. The elasticity of blood does not appear to influence its flow behavior under physiological conditions in the large arteries, purely viscous shear thinning model should be quite realistic for simulating blood flow under these conditions. On using the power law model with high shear rate for sinusoidal flow simulation in elastic arteries, the mean and amplitude of the flow rate were found to be lower for a power law fluid compared to Newtonian fluid for the same pressure gradient. The governing equations have been solved by Crank-Nicolson scheme. The results are interpreted in the context of blood in the elastic arteries keeping the magnetic effects in view. For physiological flow simulation in the aorta, an increase in mean wall shear stress, but a reduction in peak wall shear stress were observed for power law model compared to a Newtonian fluid model for matched flow rate wave form. Blood flow in the presence of transverse magnetic field in an elastic artery is investigated and the influence of factors such as morphology and surface irregularity is evaluated.

Key words: elastic artery model; Crank-Nicolson scheme; non-Newtonian fluid; wall shear stress