

文章编号: 1000_0887(2005) 04_0411_07

复杂系统中混沌排斥子的动力学特性分析及应用研究^{*}

马军海^{1,2}, 任彪¹, 陈予恕³

(1. 天津大学 管理学院, 天津 300072;
2. 天津财经大学, 天津 300222;
3. 天津大学 机械工程学院, 天津 300072)
(我刊编委陈予恕来稿)

摘要: 研究了由一类复杂系统排斥子所生成的时间序列的分形特征、分维值, 利用相空间重构理论对排斥子所生成的混沌时序数据进行了重构, 研究了时序数据的零均值处理、傅立叶滤波对预测结果的影响, 研究了预测样本值的选取对预测的相对误差、预测长度影响等相关问题。结果表明: 该模型对于这类排斥子所生成的时序数据建模和预测都具有实用性, 且混沌排斥子样本数据的零均值处理对预测结果有一定的量的改变, 但对排斥子样本数据进行 Fourier 滤波处理会降低预测的精度, 这对于复杂系统排斥子的研究有着较为重要的理论和实际意义。

关键词: 复杂系统; 鞍点; 混沌; 排斥子; 重构技术

中图分类号: O175.14; O241.81 **文献标识码:** A

引言

近年来, 关于非线性系统的动力学行为及混沌的研究, 一直是非线性科学领域活跃的研究课题^[1~12]。混沌是非线性系统所产生的复杂的不规则行为, 这种不规则现象在自然科学和社会科学中是普遍存在的。众所周知, 在实际的工程技术中, 由各种复杂系统所生成的时间序列常表现出包括混沌在内的各种复杂现象与行为, 采用混沌的理论与方法处理则非常有效。目前已发展成熟的度量混沌的统计指标, 如吸引子的分维数^[3]、Liapunov 指数^[6]等, 可对非线性系统的动力学行为进行定量的描述, 来揭示非线性系统演化的内在规律^[13~17]。

对吸引子分维数的度量常用的方法有: 豪斯道夫维数、盒维数、关联维数、信息维数等。1996 年 Brian R. Hunt, Edward Ott, James A. Yorke 提出了计算混沌排斥子的基本方法^[8], 2000 年 David Sweet, Edward Ott 又丰富和发展了这一方法^[9], 这一方法为我们研究混沌系统的混沌排斥子奠定了工作基础。

在混沌时序建模及预测技术的研究过程中, 最近十几年里建立在混沌理论基础之上的动

* 收稿日期: 2003_05_30; 修订日期: 2005_03_17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70271071); 国家自然科学基金(重大)资助项目(19990510); 天津市教委资助课题(20041702)

作者简介: 马军海(1965—), 男, 山东青岛人, 教授, 博导, 博士(联系人, Tel: + 86_22_81782238; E_mail: Lzqslly@126.com)。

力系统相空间重构理论对混沌时序进行建模、预测和宏观调控等研究工作,提出了很多有价值的可应用的模型和建模方法^[2,7,10-14,17],都取得了良好的效果。

1 混沌排斥子维数公式

假定 Λ 是一个非吸引的、遍历的不变集。 Λ 是非吸引的是指:如果它不完全包括其非稳定流形,在这种情况下, Λ 中有些点在向后迭代时收敛于 Λ ; Λ 是不变的是指: Λ 中点的所有的向前和向后的时间演化仍然在 Λ 中。一个混沌鞍点 Λ 的稳定流形是指:所有满足初始条件的集合在向前的时间演化中仍收敛于 Λ 。 Λ 的非稳定流形是指:所有满足初始条件的集合在向后时间演化中仍收敛于 Λ 。

假设动力系统是一个离散时间系统,且混沌鞍点 Λ 包含在一个带有边界的区域 R 中,在初始条件下向前迭代 $n \gg 1$ 次,除去已不在 R 中的所有轨道。记剩余的轨道数为 $N(n)$ 。那么可以定义其逃逸的时间为 τ :

$$e^{-n/\tau} \sim N(n)/N(0), \quad (1)$$

即
$$\tau = \lim_n \lim_{N(0)} \ln[N(0)/N(n)]/n.$$

定义混沌鞍点在开集 $C \subset R$ 的自然暂态测度为

$$\mu(C) = \lim_n \lim_{N(0)} \frac{N(\xi_n, n, C)}{N(n)}, \quad (2)$$

这里 $0 < \xi < 1$, 并且 $N(m, n, C)$ 是仍处于 R 中的次数为 n 的散布轨道数,在次数 $m < n$ 时,它们也处在 C 中。在 $0 < \xi < 1$ 时,假设 $\mu(C)$ 不依赖于 ξ 的选择。

假设系统为 M 维的且带有 U 个正的、 S 个负的 Liapunov 指数 ($U + S = M$), 其满足

$$h_U^+ \geq h_{U-1}^+ \geq \dots \geq h_1^+ > 0 > -h_1^- \geq \dots \geq h_{S-1}^- \geq h_S^-. \quad (3)$$

定义向前熵为

$$H = \sum_{i=1}^U h_i^+ - \tau^{-1}. \quad (4)$$

在稳定流形上定义一个自然暂态测度 μ_S , 在非稳定流形上定义一个自然暂态测度 μ_U 。则有

$$\mu_S(C) = \lim_n \lim_{N(0)} \frac{N(0, n, C)}{N(n)}, \quad (5)$$

$$\mu_U(C) = \lim_n \lim_{N(0)} \frac{N(n, n, C)}{N(n)}. \quad (6)$$

因此,考虑迭代次数为 n 时一直在 R 内的 $N(n)$ 个轨道,在 C 中最初开始的那些轨道的分维产生 $\mu_S(C)$, 而最后时间 n 在 C 中结束的分维给出 $\mu_U(C)$ 。我们使用测度(2)、(5)、(6)式分别来定义不变集的、稳定的及不稳定流形的信息维数。

排斥子的不稳定流形维数定义为

$$D_U = U + I + \frac{H - (h_1^- + \dots + h_I^-)}{h_{I+1}^-}, \quad (7)$$

这里 I 定义为

$$h_1^- + \dots + h_I^- + h_{I+1}^- \geq H \geq h_1^- + \dots + h_I^-,$$

排斥子的稳定流形维数定义为:

$$D_S = S + J + \frac{H - (h_1^+ + h_2^+ + \dots + h_J^+)}{h_{J+1}^+}, \quad (8)$$

这里 J 定义为

$$h_1^+ + \dots + h_J^+ + h_{J+1}^+ \geq H \geq h_1^+ + \dots + h_J^+.$$

考虑到混沌鞍点将成为其稳定和不稳定流形的一般交点, 一般交点的公式给出了鞍点的维数

$$D_{\Lambda} = D_U + D_S - M \quad (9)$$

在混沌吸引子的情况下, 不变集就是吸引子本身, 稳定流形是吸引盆, 我们用吸引子来辨别不稳定流形. 即 $D_S = M, D_{\Lambda} = D_U$. 因为吸引子附近的点从不离去, 我们有 $\tau = \infty$, 那么由公式(7) 导出了开普兰_约克(Kaplan_Yorke) 公式为

$$D_{\Lambda} = U + I + \frac{(h_1^+ + \dots + h_U^+) - (h_1^- + \dots + h_I^-)}{h_{I+1}^-}, \quad (10)$$

这里 I 是使 $(h_1^+ + \dots + h_U^+) - (h_1^- + \dots + h_I^-)$ 为正时的最大整数.

在二维映射带有一正 Liapunov 指数 h_1^+ 和一负 Liapunov 指数 h_1^- , 且指数满足 $h_1^+ - h_1^- - 1/\tau \leq 0$ 情况下, 公式(7) 和(8) 给出了相应的结果:

$$D_U = 1 + \frac{h_1^+ - 1/\tau}{h_1^-}, \quad D_S = 1 + \frac{h_1^+ - 1/\tau}{h_1^+}. \quad (11)$$

另外一种情况是一维映射的一个非吸引混沌不变集. 在这种情况下 $S = 0, U = 1$. 不变集的不稳定流形具有 1 维, $D_U = 1$. 研究表明可以利用不变集本身来识别稳定流形. 除非这些点精确地落在不变集上, 不变集领域内的点会被其排斥. 在这种情况下 $D_S = D_{\Lambda}$ 并且由公式(8) 和(9) 可以得到: $D_S = D_{\Lambda} = H/h_1^+$, 这里 $H = h_1^+ - 1/\tau$.

2 本文所采用的混沌排斥子数据

本文采用由下面一类复杂系统(12) 在混沌鞍点所生成的混沌时序作为样本数据^[15, 16]. 混沌系统的微分方程组模型为

$$\dot{x} = z + (y - a)x, \quad \dot{y} = 1 - by - x^2, \quad \dot{z} = -x - cz \quad (12)$$

当(12) 式中参数满足 $c - b - abc < 0, c + a - 1/b < 0$ 时系统的平衡点 $P = (0, 1/b, 0)$ 是混沌鞍点.

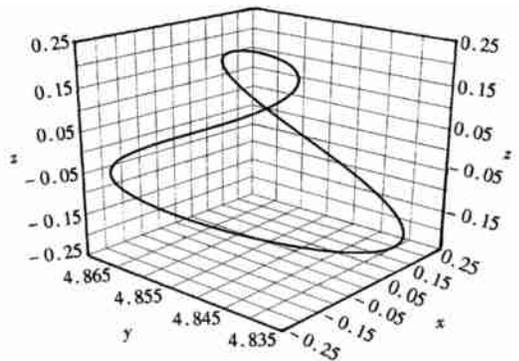
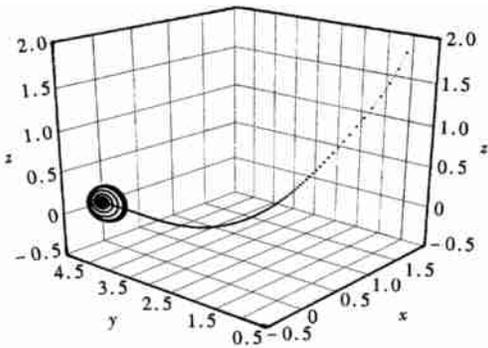


图 1(a) $a = 4.5, b = 0.2, c = 0.4, t = 0.05$
起始点 $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 2$
4 096 点重构图

图 1(b) $a = 4.5, b = 0.2, c = 0.4, t = 0.05$
起始点 $x_0 = 0.188\ 025, y_0 = 4.838\ 378,$
 $z_0 = -0.210\ 642$ 的 4096 点重构图

样本数据 1 是当参数 $a = 4.5, b = 0.2, c = 0.4, t = 0.05$ 时在混沌鞍点所生成的时间序列共 8 192 点, 根据混沌时序的相空间重构理论^[1, 2, 7] 可得到其前 4 096 点(起始点 $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 2$) 的相空间重构图如图 1(a), 其后 4 096 点(起始点 $x_0 = 0.188\ 025, y_0 = 4.838\ 378, z_0 = -0.210\ 642$) 的相空间重构图如图 1(b); 根据公式(7)~(10) 可求得混沌排斥子(后 4 096 点)的分维数为: $D = 2.073\ 23$.

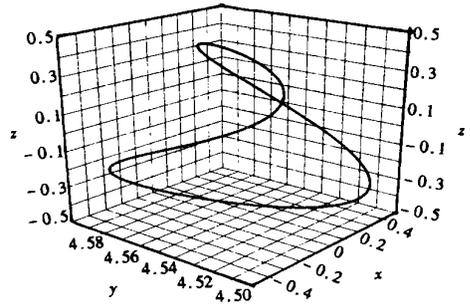
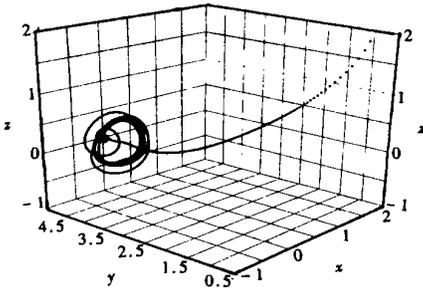


图 2(a) $a = 4.5, b = 0.2, c = 0.1, t = 0.05$ 图 2(b) $a = 4.5, b = 0.2, c = 0.1, t = 0.05$
 起始点 $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 2$ 起始点 $x_0 = 0.028\ 211, y_0 = 4.556\ 765,$
 4 096 点重构图 $z_0 = 0.414\ 781$ 的 4096 点重构图

样本数据 2 是当参数 $a = 4.5, b = 0.2, c = 0.1, t = 0.05$ 时在混沌鞍点所生成的时间序列共 12 288 点, 其前 4 096 点 (起始点 $x_0 = 2, y_0 = 1, z_0 = 2$) 的相空间重构图如图 2(a), 其后 4 096 点 (起始点 $x_0 = 0.028\ 211, y_0 = 4.556\ 765, z_0 = 0.414\ 781$) 的相空间重构图如图 2(b); 可算得混沌排斥子 (后 4 096 点) 的分维数为: $D = 2.015\ 23$ 。

3 混沌排斥子时序的小波神经网络学习算法

假设 $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ 是我们所得到的时间序列, 经相位随机化方法^[4, 5] 的检验其是混沌时间序列。 $x_n = G[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-m}] + k \varepsilon_n$, 设函数 $\Psi(\cdot)$ 满足容许性条件:

$$\int_{\mathbf{R}} (|\Psi(w)| / |w|) dw < \infty,$$

那么可数集合 $\Phi = \left\{ \sqrt{a_k} \Psi(\mathbf{a}_k^T \mathbf{x} - b_k) : a_k \in \mathbf{R}_+, b_k \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z} \right\}$ 满足框架性质, 即存在两个常数 $A > 0$ 和 $B < \infty$, 使得对任意的 $f \in L^2(\mathbf{R})$, 可得

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{\Psi \in \Phi} |\langle \Psi, f \rangle|^2 \leq B \|f\|^2. \quad (13)$$

上式表明框架 Φ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 中是稠密的, 即框架 Φ 中元素的所有线性组合的集合

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^L w_i \Psi(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i), \quad \Psi \in \Phi \quad (14)$$

在 $L^2(\mathbf{R})$ 中是稠密的, 其中 \mathbf{a}_i 为任意的伸缩参数, b_i 为任意的平移参数。 上式即为小波神经网络结构, 它与传统的人工神经网络的区别在于隐层节点激励函数不是 Sigmoid 函数, 而是小波函数。 随着节点数 N 的增加, 网络 (14) 式能充分逼近任意的函数 $f(\mathbf{x}) \in L^2(\mathbf{R})$ 。 由于小波函数 $\Psi(\mathbf{x})$ 是零均值的, 为了便于用小波网络逼近非零均值函数, 在小波网络 (14) 式右端加入一个参数 g , 即为:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^L w_i \Psi[\mathbf{D}_i(\mathbf{t} - \mathbf{t}_i)] + g, \quad (15)$$

其中 \mathbf{t}_i 是一平移向量, \mathbf{D}_i 是对角矩阵, $\mathbf{D}_i = \text{diag}(d_i)$, g 为函数 $g(\mathbf{x})$ 的均值的估计值, 这里 L 的值取为最佳嵌入维数, 小波函数 Ψ 是几个“墨西哥草帽”的乘积

$$w(s) = (1 - s^2) e^{-s^2/2}. \quad (16)$$

经计算混沌排斥子序列 $x_i (i = 1, 2, 3, \dots, N)$ 的维数为 d , 并取 (15) 式中的 $L = [2d + 1] = m$, 令

$$a = \min\{x(i), 1 \leq i \leq N\}, b = \min\{x(i), 1 \leq i \leq N\}, g = \left[\sum_{i=1}^N x(i) \right] / N$$

则我们选择小波函数 Ψ 为:

$$\Psi(\mathbf{x}) = w(x_1)w(x_2) \dots w(x_m) \quad (17)$$

设有 M 个学习样本对 $\{(x_m, y_m): y_m = f(x_m), m = 1, 2, \dots, M\}$, 记 θ 为所有参数 w_i, a_i 及 $b_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 组成的参数向量, $g_\theta(x)$ 为网络(15)中的表达式, 网络目标函数为

$$E(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M (g_\theta(x_m) - y_m)^2 \quad (18)$$

用梯度下降算法极小化上述目标函数可得到相应的最优参数 θ^* , 其迭代过程为:

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \lambda \cdot \nabla E(\theta(k)), \quad (19)$$

其中 $\lambda > 0$ 为学习步长, $\nabla E(\theta)$ 是目标函数 $E(\theta)$ 关于参数 θ 的梯度, 即

$$\nabla E(\theta) = \sum_{m=1}^M (g_\theta(x_m) - y_m) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} g_\theta(x_m) \quad (20)$$

采用小波神经网络方法计算模型中的各参数, 数据模型见(21)式. 研究发现本文所采用的混沌鞍点数据模型的阶即(15)式中的 $L = 5$.

$$\begin{aligned} x_n = & a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-1}^2 + a_3 x_{n-1}^3 + a_4 x_{n-2} + a_5 x_{n-2}^2 + a_6 x_{n-2}^3 + a_7 x_{n-3} + a_8 x_{n-3}^2 + \\ & a_9 x_{n-3}^3 + a_{10} x_{n-4} + a_{11} x_{n-4}^2 + a_{12} x_{n-5} + a_{13} x_{n-5}^2 + a_{14} x_{n-2} x_{n-1} + \\ & a_{15} x_{n-3} x_{n-1} + a_{16} x_{n-3} x_{n-2} + a_{17} x_{n-4} x_{n-1} + a_{18} x_{n-4} x_{n-2} + a_{19} x_{n-4} x_{n-3} + \\ & a_{20} x_{n-5} x_{n-1} + a_{21} x_{n-5} x_{n-2} + a_{22} x_{n-5} x_{n-3} + a_{23} x_{n-5} x_{n-4} \end{aligned} \quad (21)$$

4 计算结果

数值研究结果表明, 对数据 1 取其样本数据在 80~ 120 时其预测的相对误差较小且较稳定, 这里给出模型的阶为 5, 样本数据为 100 点时的计算结果. 算得模型(21)中的各参数值见表 1. 预测模型最后一组数据的样本值、数据真值、数据预测值及其预测值的相对误差值见表 2, 从表 2 中可以看出用本文的模型所得到的数据的预测值的相对误差较少, 预测长度 26 点以前的预测值相对误差均小于 15%, 其数据真值与数据预测值相对误差之间的关系图见图 3.

表 1 样本数据 1 的预测模型参数值

| | | | | | | | |
|-------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|
| a_1 | 0.230 600 | a_7 | 0.861 432 | a_{13} | 0.046 033 | a_{19} | 0.051 342 |
| a_2 | - 0.195 165 | a_8 | 0.034 558 | a_{14} | 0.303 901 | a_{20} | - 0.064 003 |
| a_3 | 0.025 078 | a_9 | - 0.001 230 | a_{15} | - 0.055 237 | a_{21} | 0.078 285 |
| a_4 | 0.141 002 | a_{10} | - 0.190 644 | a_{16} | - 0.031 625 | a_{22} | 0.087 191 |
| a_5 | 0.080 344 | a_{11} | 0.137 474 | a_{17} | - 0.071 739 | a_{23} | - 0.183 674 |
| a_6 | - 0.028 935 | a_{12} | - 0.454 720 | a_{18} | - 0.034 096 | | |

表 2 样本数据 1 的预测模型最后一组数据的样本值、数据真值、数据预测值及其预测值(前 7 点, 余下的点的预测结果见图 3)的相对误差值(样本点 100 点)

| 最后一组数据的样本值 | 数据真值 x_t | 数据预测值 y_t | 建模系数 | 相对误差 $[(y_t - x_t)/x_t]/(\%)$ |
|-------------|-------------|-------------|------|-------------------------------|
| | 4.859 663 | 4.860 852 | 见表 1 | 0.02 |
| 4.846 753 | - 0.041 486 | - 0.042 878 | | 3.36 |
| 0.238 843 | 0.238 968 | 0.235 433 | | - 1.48 |
| - 0.052 990 | 4.858 263 | 4.861 700 | | 0.07 |
| 4.848 082 | - 0.052 496 | - 0.060 224 | | 14.72 |
| 0.237 257 | 0.240 624 | 0.224 290 | | - 6.79 |
| | 4.856 824 | 4.864 747 | | 0.16 |

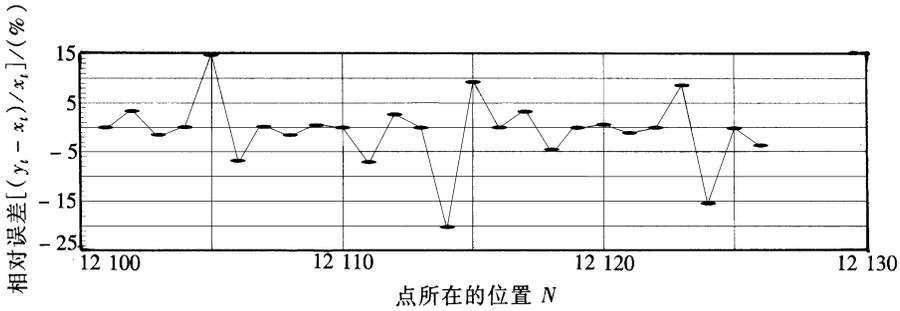


图 3 样本数据 1 的数据真值、预测值与相对误差之间的关系图

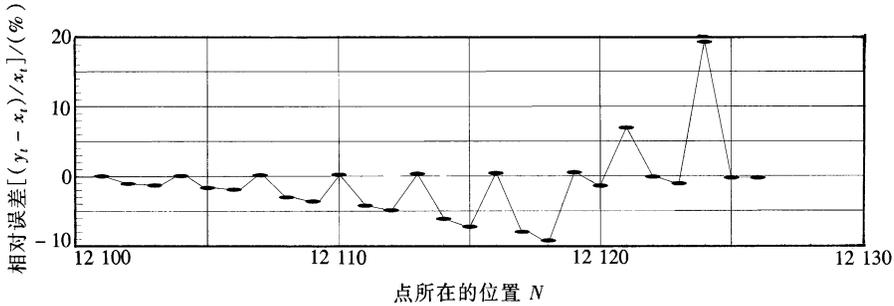


图 4 样本数据 2 的数据真值、预测值与相对误差之间的关系图

数值研究结果表明,对数据 2 取其样本数据在 80~120 时其预测的相对误差较小且较稳定,这里给出模型阶数为 5,采用的样本数据点为 100。限于篇幅模型参数值和数据预测值的相对误差不再给出,从预测结果来看用本文的模型所得到的数据的预测值的相对误差较少,预测长度 26 点以前的预测值相对误差均小于 20%,其数据真值与数据预测值相对误差之间的关系图见图 4。

5 结 论

1. 本文所提出的模型对于这类排斥子所生成的时序数据建模和预测都具有实用性,采用小波神经网络辨识模型中的参数相对有效,本文给出了模型样本点个数的数值取值范围。其进一步的理论结果将有待于继续探明。

2. 混沌排斥子样本数据的零均值处理对预测结果有一定的量的改变,但对排斥子样本数据进行傅立叶滤波处理会降低预测的精度。其原因目前还不十分清楚。

[参 考 文 献]

- [1] CHEN Yu_shu, MA Jun_hai. The state space reconstruction technology of different kinds of chaotic data obtained from dynamical system[J]. Acta Mechanica Sinica, 1999, 15(1): 82—92.
- [2] Meyer Renate, Christensen Nelson. Bayesian reconstruction of chaotic dynamical systems[J]. Phys Rev E, 2000, 62(9): 3535—3542.
- [3] Kitoh Satoshi, Kimura Mahito, Mori Takao, et al. A fundamental bias in calculating dimension from finite data sets[J]. Phys D, 2000, 141(10): 171—182.
- [4] 马军海, 陈予恕, 刘曾荣. 动力系统实测数据的非线性混沌特性的判定[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(6): 481—488.
- [5] 马军海, 陈予恕, 刘曾荣. 不同随机分布的相位随机化对实测数据影响的分析研究[J]. 应用数学和力学, 1998, 19(11): 955—964.
- [6] 马军海, 陈予恕, 刘曾荣. 动力系统实测数据的 Liapunov 指数的矩阵算法[J]. 应用数学和力学,

- 1999, **20**(9): 919—927.
- [7] 马军海, 陈予恕. 混沌时序相空间重构的分析和应用研究[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(11): 1117—1124.
- [8] Hunt Brian R, Ott Edward, Yorke James A. Fractal dimensions of chaotic saddles of dynamical systems[J]. Phys Rev E, 1996, **54**(11): 4819—4823.
- [9] Sweet David, Ott Edward. Fractal dimension of higher_dimensional chaotic repellers[J]. Phys D, 2000, **139**(4): 1—27.
- [10] CAO Liang_yue, HONG Yi_guang, FANG Hai_ping, et al. Predicting chaotic timeseries with wavelet networks[J]. Phys D, 1995, **85**(8): 225—238.
- [11] ZHANG Qing_hua. Wavelet networks[J]. IEE Transactions on Neural Networks, 1992, **11**(6): 889—898.
- [12] Castillo E, Gutierrez J M. Nonlinear time series modeling and prediction using functional networks, extracting information masked by chaos[J]. Phys Lett A, 1998, **244**(5): 71—84.
- [13] Judd Kevin, Mees Alistair. Modeling chaotic motions of a string from experimental data[J]. Phys D, 1996, **92**(8): 221—236.
- [14] 马军海, 陈予恕. 低维混沌时序非线性动力系统的预测方法及其应用研究[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(5): 441—448.
- [15] 马军海, 陈予恕. 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究(I)[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1111—1118.
- [16] 马军海, 陈予恕. 一类非线性金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究(II)[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(12): 1236—1242.
- [17] Pilgram Bernet, Judd Kevin, Mees Alistair. Modelling the dynamics of nonlinear times series using canonical variate analysis[J]. Phys D, 2002, **170**(9): 103—117.

Analysis and Applied Study of Dynamic Characteristics of Chaotic Repeller in Complicated System

MA Jun_hai^{1,2}, REN Biao¹, CHEN Yu_shu³

(1. Management School, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;

(2. Tianjin University of Finance and Economics, Tianjin 300222, P. R. China;

(3. Mechanical Engineering School, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

Abstract: Fractal characters and fractal dimension of time series created by repeller in one complicated system were studied and the time series were reconstructed by applying theory of phase space reconstruction for chaotic times series, for purpose of modeling and prediction of time series created by chaotic repellers. The influence of zero_mean treatment, Fourier filter on prediction for time series were studied. The choice of prediction sample affects the relative error and the prediction length which were also under good concern. Result shows the modeling and prediction model provided here is practical for time series created by chaotic repellers. Zero_mean treatment has changed prediction result quantitatively for chaotic repeller sample data. But using Fourier filter may decrease the prediction precision. This is theoretical and practical for study on chaotic repeller of complicated system.

Key words: complicated system; saddle point; chaotic; repeller; reconstruction technique