应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

文章编号: 1000_0887(2005) 04_0426_05

无穷迭代函数系统的遍历定理

吴亨哲[1,3], 卢英花[1], 吉元君[2]

(1. 金日成综合大学 数学力学系, 基础科学中心, 平壤, 朝鲜;
2. 平壤铁路大学, 平壤, 朝鲜;
3. 同济大学 应用数学系, 上海 200092)

(刘增荣推荐)

摘要: 度量空间的压缩映射的一个集合称为一个迭代函数系统 凝聚迭代函数系统可以被看成无穷迭代函数系统 研究了紧度量空间上的无穷迭代函数系统 利用 Banach 极限的特性和均匀压缩性, 证明了紧度量空间上无穷迭代函数系统的随机迭代算法满足遍历性 于是, 凝聚迭代函数系统的随机迭代算法也满足遍历性

关 键 词: 迭代函数系统(IFS); 不变测度; 遍历定理; 随机迭代算法
中图分类号: O177.99 文献标识码: A

1 引言及问题的提出

可以说, 迭代函数系统(IFS) 理论是动力系统理论的继续和发展 动力系统理论研究一个映射的迭代, 可是 IFS 理论研究多个映射的迭代

IFS 理论的根源是很早的, 可是其积极的发展从 Hutchinson 的研究开始 他用 R^n 的有限个相似压缩映射的组来研究分形集合的自相似性 Barnsley 把有限个压缩映射的组称为迭代函数系统, 将迭代函数系统理论系统化并将它应用到分形的研究, 分形图像压缩和分形插值等

现在迭代函数系统不仅是分形理论研究和应用的重要工具之一, 而且迭代函数系统的思想对复动力系统理论等很多领域影响很大

最近从复动力系统理论等很多领域的重要性出发, 对无穷迭代函数系统 即由无穷个映射组成的迭代函数系统进行了广泛研究 凝聚迭代函数系统[1]也可以看成为无穷迭代函数系统[2]

在这篇文章中, 我们证明了无穷迭代函数系统的遍历定理 文献[1, 3~ 5] 研究了有穷迭代函数系统的遍历定理 在文献[6, 2] 中研究了无穷迭代函数系统和其符号动力系统、无穷概率迭代函数系统和其不变测度 在这篇论文中, 我们研究了紧度量空间上无穷迭代函数系统的遍历性 利用 Banach 极限的特性和均匀压缩性, 证明了紧度量空间上无穷迭代函数系统的随机迭代算法满足遍历性 于是, 凝聚迭代函数系统的随机迭代算法也满足遍历性

收稿日期: 2003_11_03; 修订日期: 2004_11_16
作者简介: 吴亨哲(1964), 男, 平壤人, 研究员(联系人. Tel: + 86_21_65985699; Fax: + 86_21_65982342; E_mail: hyongchol_o@yahoo.com.cn)

令　和X 是紧度量空间　X 是我们的主要状态空间,　是参数空间

令 w:　X　X 是关于两个变量x 和　连续映象, 记为 $w(\ ,x) = w\ (x)$　令 p 是　上的 Borel 概率测度　以 $M(X)$ 表示 X 上的 Borel 概率测度的集合　$M(X)$ 关于 Hutchinson 度量 d_H 是个紧度量空间[1]

定义 $T_{w,p}: M(X)$　$M(X)$ 为

$$T_{w,p}(\ )(B) = \quad (w^{-1}(B))\,\mathrm{d}p(\ ), \qquad M(X),$$

其中 B 是X 的 Borel 集合

w:　X　X 和p　$M(X)$ 固定时, 简写为 $T_{w,p} = T$

组 (w,p) 或者映射 $T_{w,p}$ 称为(无穷) 概率迭代函数系统

由于 Riesz 表现定理, $T(\ )$ 被看作 $C(X)$ 上的线性泛函, 即

$$_X f(x)\,\mathrm{d}T(\ )(x) = \quad _X f(w\ (x))\,\mathrm{d}\ (x)\,\mathrm{d}p(\ ), \qquad f \quad C(X)$$

设$\{w\ ,\ \}$是均匀压缩映射组, 则对于　上的任何一个 Borel 概率测度 p, $T_{w,p}$ 关于 Hutchinson 度量 d_H 是压缩的[2]　如果(w,p) 是平均压缩的, 那么 $T_{w,p}$ 关于 Hutchinson 度量 d_H 也是压缩的[6]

$T_{w,p}$ 的不动点 $_{w,p}$　$M(X)$ 被称为(w,p) 的不变测度

假定对所有的　, w　是压缩的　对给定的 p　$M(\ )$, 令　$_p$ 是测度p 的紧支集　那么$\{w\ ,\ _p\}$是均匀压缩的, 于是$\{w\ ,\ _p\}$是在[2] 的意义下的无穷迭代函数系统, 如果以 $A_{w,p}$ 表示其不变集, 那么(w,p) 的不变测度 $_{w,p}$ 的紧支集就是$A_{w,p}$, 即 supp$(\ _{w,p}) = A_{w,p}$[6,2]

2　基本结果

令 (w,p) 是一个无穷概率迭代函数系统　x_0　X, 定义$\{x_n\}$ 如下:

$$x_n = w_{\ _n}\ w_{\ _{n-1}}\ \ w_{\ _1}(x_0), \tag{1}$$

其中 $_n$　按照概率p 被选择　算式(1) 称为概率迭代函数系统(w,p) 的随机迭代算法

因为 $_n$ 按照概率 p 被选择, 我们可以假定 $_n$　$_p$ = supp(p), 于是随机迭代算法(1) 的每个轨道$\{x_n\}$ 都对应于一个地址

$$(\ _1,\ _2,\ ,\ _n,\ ) \qquad = \ _{n=1}\ _p = \{(\ _1,\ _2,\ ,\ _n,\ )\mid\ _n\ \ _p\},$$

称为(w,p) 的代码空间或者地址空间

因为 $_p$ 是一个紧度量空间,　的 Tzihkonov 弱拓扑是可度量化的, 于是　可以被看作紧度量空间

令 P 是由 $_p$ 上的测度p 诱导出的　上的乘积测度, 那么 P 是　的概率测度

定义推移变换 S:　为

$$S(\ _1,\ _2,\ ,\ _n,\ ) = (\ _2,\ _3,\ ,\ _{n+1},\ ), \qquad = (\ _1,\ _2,\ ,\ _n,\ )$$

S 是连续满射的而且满足遍历性

射影 ^{n}:　^{n}: $^n(\ ) = (\ _n,\ _{n-1},\ ,\ _1)$,　是连续的　我们表示为 $^n(\ ) =\ _n$

这篇文章的基本结果是:

定理(无穷迭代函数系统的遍历性) 令 (w,p) 是个无穷概率迭代函数系统, w 是均匀压缩的, 是 (w,p) 的不变测度 设 f 是 X 上的任意连续函数, x X, 则对于 P 几乎所有的地址 , 有

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{1 \quad m \quad n} f(w_{m} \quad w_{m-1} \quad w_{1}(x)) = \int_X f(y)\mathrm{d}(y) \tag{2}$$

证明 为了简单, 记为 $w_{n} \quad w_{1}(x) = w^{n}(x)$

令 f $C(X)$ 和 x X 对于给定的地址 , 考察下面实数列的收敛性:

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \quad m \quad n} f(w^{m}(x)),$$

$\{a_n\}$ 是个有界实数列

在实数的所有有界序列的 Banach 空间 $(l \quad)$ 内, 存在一个连续线性泛函 L, 被称为Banach 极限 L 满足下列性质:

( ) $L(\{a_1, a_2, \}) = L(\{a_2, a_3, \})$, 即 Banach 极限与前有限个项无关

( ) $\lim \inf a_n \quad (L\{a_n\}) \quad \lim \sup a_n$, 因此如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim a_n = L(\{a_n\})$

l 上有许多 Banach 极限泛函 对于一个有界实数列 $\{a_n\}$, 如果所有的 Banach 极限泛函的值相同(等于 a), 则 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim a_n = a$

我们会证明, 数列 $\{a_n\}$ 的两个 Banach 极限关于 P 几乎所有的地址 一致, 于是极限几乎处处存在

令 L 是 l 上任何一个 Banach 极限泛函

函数

$$f \mid \quad L\left(\left\{\left(\frac{1}{n}\right) \sum_{1 \quad m \quad n} f(w^{m}(x))\right\}\right)$$

是 $C(X)$ 上的连续线性泛函 于是由 Riesz 表现定理, 存在 X 上的 Borel 概率测度 $_L$, 使得

$$L\left(\left\{\frac{1}{n} \sum_{1 \quad m \quad n} f(w^{m}(x))\right\}\right) = \int_X f(y)\mathrm{d}_L(y), \qquad f \quad C(X) \tag{3}$$

如果我们证明 $_L =$, 则从式(3) 和上述的 Banach 极限的性质我们可以说极限等式(2) 满足

以下我们的目标是证明对于 P 几乎所有的 满足 $_L =$

首先我们证明, 对于 P 几乎所有的 , Banach 极限

$$L\left(\left\{\frac{1}{n} \sum_{1 \quad m \quad n} f(w^{m}(x))\right\}\right)$$

是常数

令 S: 是 的推移变换 由于 $\{w, \quad p\}$ 均匀压缩且 X 是紧度量空间, 则

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{1 \quad m \quad n} f(w^{m}(x)) - \frac{1}{n} \sum_{1 \quad m \quad n} f(w_{S(\,)}{}^{m}(x))\right| \quad 0, \qquad n$$

由 Banach 极限的性质( ), 有

$$L\left(\left\{\frac{1}{n} \sum_{1 \quad m \quad n} f(w^{m}(x))\right\}\right) = L\left(\left\{\frac{1}{n} \sum_{1 \quad m \quad n} f(w_{S(\,)}{}^{m}(x))\right\}\right),$$

所以我们定义函数 g: $\mathbf{R}$ 如下

$$g(\quad) = L\left(\left\{\frac{1}{n}\ {}_{1\ \ m\ \ n}\ f(w^{m}(x))\right\}\right),\qquad ,$$

g 是 S_不变函数　　的推移变换拥有遍历性, S_不变函数几乎处处是常数, 于是对于 P 几乎所有的　　,

$$L\left(\left\{\frac{1}{n}\ {}_{1\ \ m\ \ n}\ f(w^{m}(x))\right\}\right) = \text{常数} \tag{4}$$

为了证明　=　$_L$, 我们只要证明　$_L$ 是 T 的不变测度, 即

$$_X f(y)\mathrm{d}\ _L(y) = \quad _X f(w\ \ (y))\mathrm{d}\ _L(y)\mathrm{d}p(\quad),\qquad f\qquad C(X) \tag{5}$$

由式(3), 对于　　,

$$_X f(w\ \ (y))\mathrm{d}\ _L(y) = L\left(\left\{\frac{1}{n}\ {}_{1\ \ m\ \ n}\ f(w\quad w^{m}(x))\right\}\right),$$

于是用式(4), 对于 P 几乎所有的　　, 适合下列式

$$\begin{aligned}(5)\text{的右边}= &\ L\left(\left\{\frac{1}{n}\ {}_{1\ \ m\ \ n}\ f(w\quad w^{m}(x))\right\}\right)\mathrm{d}p(\quad) = \\ &\ L\left(\left\{\frac{1}{n}\ {}_{1\ \ m\ \ n}\ f(w\quad w^{m}(x))\right\}\right)\mathrm{d}P(\quad)\mathrm{d}p(\quad) = \\ &\ L\left(\left\{\frac{1}{n}\ {}_{2\ \ m\ \ n+1}\ f(w^{m}(x))\right\}\right)\mathrm{d}P(\quad) = \\ &\ L\left(\left\{\frac{1}{n}\ {}_{1\ \ m\ \ n}\ f(w^{m}(x))\right\}\right)\mathrm{d}P(\quad) = \\ &\ L\left(\left\{\frac{1}{n}\ {}_{1\ \ m\ \ n}\ f(w^{m}(x))\right\}\right) = \ _X f(y)\mathrm{d}\ _L(y),\end{aligned}$$

于是, 对于 P 几乎所有的　　, $_L$ =

致谢　感谢 Franklin Mendivil 博士给予作者的意见和信息　还要感谢姜礼尚教授和刘曾荣教授给予作者的鼓励和帮助

[参 考 文 献]

[1] Barnsley M. Fractals Everywhere[M]. New York: Academic Press, 1988.

[2] 吴亨哲. 广义迭代函数系统[J]. 朝鲜民主主义人民共和国科学院通报, 2001, **287**(5): 3) 5. (朝鲜语)

[3] Elton J. An ergodic theorem for iterated maps[J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1987, **7**(4): 481) 488.

[4] Forte B, Mendivil F. A classical ergodic property for IFS: A simple proof[J]. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1998, **18**(3): 609) 611.

[5] 马东魁, 周作领. 迭代函数系统的遍历性质))) Elton 定理的改进[J]. 应用数学, 2001, **14**(4): 46) 50.

[6] Mendivil F. A generalization of IFS with probability to infinitely many maps[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1998, **28**(3): 1043) 1051.

[7] Conway John. A Course of Functional Analysis[M]. GTM 96, Springer_Verlag, 1990.

O Hyong_chol[1,3], Ro Yong_hwa[1], Kil Won_gun[2]

(1. Department of Mathematics and Mechanics, Centre of Basic Sciences, Kim Il Sung University, Pyongyang, D. P. R. of Korea;
2. Pyongyang Railway University, Pyongyang, D. P. R. of Korea;
3. Department of Applied Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, P.R. China)

Abstract: A set of contraction maps of a metric space is called an iterated function systems. Iterated function systems with condensation can be considered infinite iterated function systems. Infinite iterated function systems on compact metric spaces were studied. Using the properties of Banach limit and uniform contractiveness it was proved that the random iterating algorithms for infinite iterated function systems on compact metric spaces satisfy ergodicity. So the random iterating algorithms for iterated function systems with condensation satisfy ergodicity, too.

Key words: iterated function system; invariant measure; ergodic theorem; random iterating algorithm