

文章编号: 1000_0887(2005) 04_0431_06

带球形空腔的广义热弹性无限大材料 的弹性模量和传热系数与材料 参考温度的相关性*

H·M·约塞夫

(约姆·阿_夸热大学 工程学院 数学系,
玛卡 阿_莫卡热玛 P. 5555, 沙特阿拉伯)

(周哲玮推荐)

摘要: 利用具某一松弛时间的广义热弹性方程求解了带球形空腔的无限大材料问题。该材料的弹性模量和传热系数是可变的。空腔的内表面没有力作用, 但有热冲击作用。利用 Laplace 变换求得直接逼近解。数值求解了 Laplace 逆变换。给出了温度、位移和应力的分布图。

关键词: 热弹性材料; 广义热弹性材料; 弹性模量; 传热系数

中图分类号: O343.6 文献标识码: A

引 言

基于修正的 Fourier 热传导定律, 具有某一松弛时间的广义热弹性理论, 是由 Lord 和 Shulman^[1]于 1967 年提出的。这一理论可以方便地处理固体中所谓的次声效应, 从而可以处理有限波速下热扰动传播问题。

广义热弹性理论的数学模型十分复杂, 难于导出其解析解。许多处理该方程组的尝试都是基于某个短期解^[2~4]。

现代结构物常常受到温度变化的作用, 以至其材料性质不能在较长期间认为是常值, 甚至在近似意义上也不行。材料的热性能和力学性质随温度改变而变化, 因此, 在这些结构物的热应力分析中, 必须考虑材料性质与温度的相关性^[5]。1918 年 Suhara 求解了一个仅考虑其剪切模量与温度相关性的空心圆柱的热弹性问题。从此以后, 许多研究者处理了具有温度相关性的弹性和无弹性材料的热应力问题^[6]。

在本文中, 利用带某一松弛时间的广义热弹性方程, 求解了带有球形空腔的无限大材料问题, 该材料的弹性模量和传热系数与材料的参考温度相关。

* 收稿日期: 2003_07_28; 修订日期: 2004_12_27

作者简介: H·M·约塞夫, 讲师, 博士(E-mail: yousefame@yahoo.com)。

本文原文为英文, 由吴承平译, 张禄坤校。

1 问题的基本方程

用 (r, ϕ, θ) 分别表示球坐标系的径向坐标, 余纬度和经度. 我们考虑在域 $R \leq r < \infty$ 中, 满足方程(3)、(5)、(6) 的均匀、各向同性、热弹性介质, 其中 r 为壳的半径.

由于球对称性, 位移分量可记为

$$u_r = u(r, t), \quad u_\phi = u_\theta = 0.$$

应变张量分量也可表示为

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad e_{\phi\phi} = e_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad e_{r\phi} = e_{r\theta} = e_{\phi\theta} = 0. \quad (1)$$

三次膨胀系数为

$$e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 u)}{\partial r}. \quad (2)$$

热方程为

$$K \cdot \cdot \cdot \theta = \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] [\rho C_E \theta + \gamma T_0 e],$$

其中 $\cdot \cdot \cdot = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right).$

我们可以将热方程写为如下形式

$$K \cdot \cdot \cdot \theta = \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \left[\frac{K\theta}{K} + \gamma T_0 e \right], \quad (3)$$

其中 $T - T_0 = \theta, \quad \rho C_E = \frac{K \tau_0}{K}$,

参数 K 称为传热系数, κ 称为扩散系数(设为常数)^[7].

运动方程为

$$\rho \dot{i} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial e}{\partial r} - \gamma \frac{\partial \theta}{\partial r}. \quad (4)$$

本构方程为

$$\sigma_{rr} = \lambda e + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} - \gamma \theta, \quad (5)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta} = \lambda e + 2\mu \frac{u}{r} - \gamma \theta, \quad (6)$$

$$\sigma_{r\phi} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\phi\theta} = 0, \quad (7)$$

其中 ρ 为密度, t 为时间, T 为绝对温度, λ, μ 为 Lam 常数, τ_0 为松弛时间, C_E 为常变形时的比热容, 且 $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, α 为线热膨胀系数.

假定

$$\lambda = \lambda_0(1 - \alpha^* T_0), \quad \mu = \mu_0(1 - \alpha^* T_0),$$

$$K = K_0(1 - \alpha^* T_0), \quad \gamma = \gamma_0(1 - \alpha^* T_0),$$

其中 λ_0, μ_0, K_0 和 γ_0 为常数, α^* 为经验材料常数, 当参考温度与弹性模量和传热系数无关时, 取 $\alpha^* = \theta^{[8]}$.

方程(3)~(6) 取如下形式:

$$K_0 \cdot \cdot \cdot \theta = \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \left[\frac{K_0 \theta}{K} + \gamma_0 T_0 e \right], \quad (8)$$

$$\rho \dot{i} = (1 - \alpha^* T_0) \left[(\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial e}{\partial r} - \gamma_0 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right], \quad (9)$$

$$\sigma_{rr} = (1 - \alpha^* T_0) \left[\lambda_0 e + 2\mu_0 \frac{\partial u}{\partial r} - \gamma_0 \theta \right], \quad (10)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \alpha\sigma_{\phi\phi} = (1 - \alpha^* T_0) \left[\lambda_0 e + 2\mu_0 \frac{u}{r} - \gamma_0 \theta \right]. \quad (11)$$

为简便计,取如下无量纲变量^[9]:

$$\gamma = \left[\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \right]^{1/2} \frac{r'}{k}, \quad u = \left[\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \right]^{1/2} \frac{u'}{k}, \quad t = \left[\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \right] \frac{t'}{k},$$

$$\sigma = \frac{\sigma'}{\mu_0}, \quad \theta = \frac{\theta'}{T_0}, \quad \tau_0 = \left[\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho} \right] \frac{\tau_0'}{k}.$$

为方便,将上述方程组简化为

$$\ddot{\theta} = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \tau_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] [\theta + ge], \quad (12)$$

$$\ddot{e} - a \ddot{\theta} = \dot{\alpha} e, \quad (13)$$

$$\alpha\sigma_r = \beta^2 e - 4 \frac{u}{r} - b\theta, \quad (14)$$

$$\alpha\sigma_{\phi\phi} = \alpha\sigma_{\phi\phi} = (\beta^2 - 2)e + 2 \frac{u}{r} - b\theta, \quad (15)$$

其中

$$b = \frac{\gamma_0 T_0}{\mu_0}, \quad g = \frac{\gamma_0 k}{K_0}, \quad \beta = \left[\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\mu_0} \right]^{1/2}, \quad a = \frac{b}{\beta^2}, \quad \alpha = \frac{1}{1 - \alpha^* T_0}.$$

2 Laplace 变换域中的公式

取如下 Laplace 变换

$$f(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt,$$

得

$$\ddot{\theta} e - a \ddot{\theta} = \alpha s^2 e, \quad (16)$$

$$\ddot{\theta} = [s + \tau_0 s^2] [\theta + ge], \quad (17)$$

$$\alpha\sigma_r = \beta^2 e - 4 \frac{u}{r} - b\theta, \quad (18)$$

$$\alpha\sigma_{\phi\phi} = \alpha\sigma_{\phi\phi} = (\beta^2 - 2)e + 2 \frac{u}{r} b\theta. \quad (19)$$

方程(16)和(17)取如下形式

$$(\ddot{\theta} - \alpha s^2) e = \alpha \ddot{\theta}, \quad (20)$$

$$[\ddot{\theta} - (s + \tau_0 s^2)] \theta = g(s + \tau_0 s^2) e. \quad (21)$$

在上述方程中消去 e , 得到

$$[\ddot{\theta}^4 - [\alpha s^2 + (s + \tau_0 s^2) + ag(s + \tau_0 s^2)] \ddot{\theta}^2 + \alpha s^2 (s + \tau_0 s^2)] \theta = 0, \quad (22)$$

或有

$$(\ddot{\theta}^2 - k_1^2) (\ddot{\theta}^2 - k_2^2) \theta = 0,$$

其中 k_1^2 和 k_2^2 为如下方程的根,

$$\ddot{\theta}^4 - [\alpha s^2 + (s + \tau_0 s^2) + ag(s + \tau_0 s^2)] \ddot{\theta}^2 + \alpha s^2 (s + \tau_0 s^2) = 0. \quad (23)$$

满足方程(22)的解,为

$$\theta = A_1 (k_1^2 - \alpha s^2) \frac{e^{-k_1 r}}{r} + A_2 (k_2^2 - \alpha s^2) \frac{e^{-k_2 r}}{r}, \quad (24)$$

利用方程(20), 有

$$e = a \left[A_1 k_1^2 \frac{e^{-k_1 r}}{r} + A_2 k_2^2 \frac{e^{-k_2 r}}{r} \right], \quad (25)$$

因此

$$u = -a \left[A_1 \left(k_1 + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-k_1 r}}{r} + A_2 \left(k_2 + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-k_2 r}}{r} \right]. \quad (26)$$

3 边界条件

为了求得未知参数, 我们将用到空腔内表面的边界条件, $r = R$ 由以下条件给出:

1) 热边界条件

内表面 $r = R$ 上作用一热冲击

$$\theta(R, t) = \theta_0 H(t), \quad (27a)$$

或

$$\theta(R, s) = \frac{\theta_0}{s}. \quad (27b)$$

2) 力学边界条件

内表面 $r = R$ 上没有力作用, 即

$$\sigma_r(R, t) = 0, \quad (28a)$$

或

$$\sigma_r(R, s) = 0. \quad (28b)$$

利用方程(24) ~ (28), 可得如下线性方程组:

$$A_1(k_1^2 - \alpha^2) \frac{e^{-k_1 R}}{R} + A_2(k_2^2 - \alpha^2) \frac{e^{-k_2 R}}{R} = \frac{\theta_0}{s}, \quad (29)$$

$$A_1 \left[k_1^2 + \frac{4}{R\beta^2} \left(k_1 + \frac{1}{R} \right) \right] \frac{e^{-k_1 R}}{R} + A_2 \left[k_2^2 + \frac{4}{R\beta^2} \left(k_2 + \frac{1}{R} \right) \right] \frac{e^{-k_2 R}}{R} = \frac{\theta_0}{s}. \quad (30)$$

则有

$$A_1 = \frac{\theta_0 R (\alpha\beta^2 R^2 s^2 + 4k_2 R + 4) e^{k_1 R}}{s(k_1 - k_2) [\alpha\beta^2 R^2 s^2 (k_1 + k_2) + 4k_1 k_2 R + 4(k_1 + k_2 + \alpha R s^2)]}, \quad (31)$$

$$A_2 = \frac{\theta_0 R (\alpha\beta^2 R^2 s^2 + 4k_1 R + 4) e^{k_2 R}}{s(k_2 - k_1) [\alpha\beta^2 R^2 s^2 (k_1 + k_2) + 4k_1 k_2 R + 4(k_1 + k_2 + \alpha R s^2)]}. \quad (32)$$

这就是 Laplace 变换域中的完全解。

4 Laplace 变换的数值反演

为了反演 Laplace 变换, 我们采用基于 Fourier 级数展开式的数值反演方法^[10, 11]。

应用此方法, Laplace 变换 $f(s)$ 的逆 $f(t)$ 可近似表示为

$$f(t) \approx \frac{e^{ct}}{t_1} \left[\frac{1}{2} f(c) + Rl \sum_{k=1}^N f \left(c + \frac{ik\pi}{t_1} \right) \exp \left(\frac{ik\pi t}{t_1} \right) \right], \quad 0 < t_1 < 2t,$$

这里 N 为足够大的整数, 表示 Fourier 级数中截断的项数, 可通过下式选取:

$$\exp(\alpha t) Rl \left[f \left(c + \frac{iN\pi}{t_1} \right) \exp \left(\frac{iN\pi t}{t_1} \right) \right] \leq \varepsilon_1,$$

其中 ε_1 为按要求精度确定的小正数。 c 必须是大于 $f(s)$ 的所有奇点实部的自由正参数。 c 的优化选取可按照文献[10]提供的判据得到。

5 数值结果

我们选择铜材进行数值计算。有关常数取为

$$k_0 = 386, \alpha_T = 1.78 \times 10^{-5}, C_E = 3.831, \mu = 3.86 \times 10^{10}, \lambda = 7.76 \times 10^{10},$$

$$\rho = 8954, \beta^2 = 4, T_0 = 273, b = 0.042, g = 1.61, \tau_0 = 0.02$$

对 $t = 0.2 \text{ s}$, $\theta_0 = 1$, $R = 1$ 和 $\alpha^* = 0.0005 \text{ K}^{-1/12}$ 进行了计算。温度、位移和应力的分布示于图 1~4。

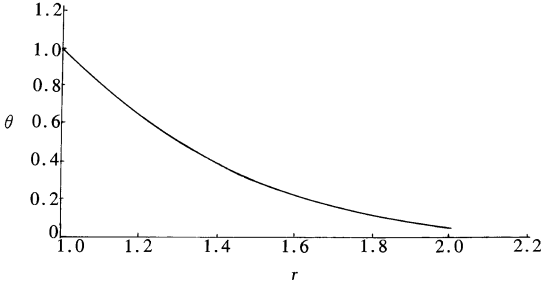


图 1 温度分布

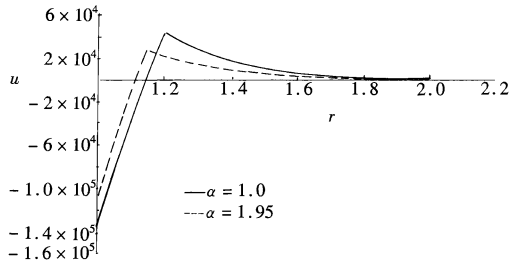


图 2 位移分布

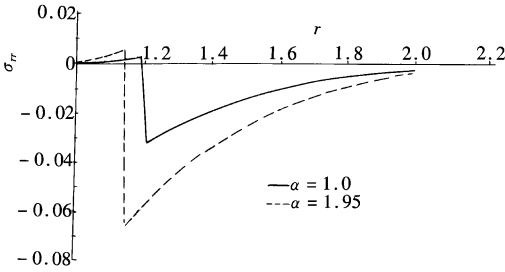


图 3 径向应力分布

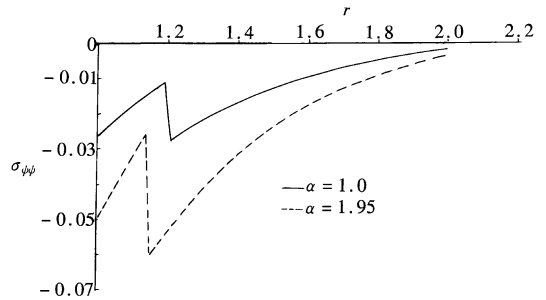


图 4 横向应力分布

[参 考 文 献]

- [1] Lord H, Shulman Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. J Mech Phys Solids, 1967, 15(5): 229—309.
- [2] Sherief H, Dahaliwal R. A generalized one-dimensional thermal shock problem for short times[J]. J Thermal Stresses, 1981, 4: 407—420.
- [3] Sherief H, Anwar M. Problem in generalized thermoelasticity[J]. J Thermal Stresses, 1986, 9: 165—182.
- [4] Sherief H. Fundamental solution to the generalized thermoelastic problem for short times[J]. J Thermal Stresses, 1986, 9: 151—164.
- [5] Noda N. Thermal Stresses in materials with temperature dependent properties[A]. In: Richard B Hetnarski Ed. Thermal Stresses [C]. Vol 1. Amsterdam: North_Holland, 1986, 391—396.
- [6] Takeuti Y, Noda N. A three-dimensional treatment of transient thermal stresses in a circular cylinder due to an arbitrary heat supply[J]. J Appl Mech, 1978, 45: 817—821.
- [7] Nowacki W. Dynamic Problems of Thermoelasticity [M]. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1975.

- [8] Ezzat M A, Othman M I, El_Karamany. The dependence of the modulus of elasticity on the reference temperature in generalized thermoelasticity[J]. *J Thermal Stresses*, 2001, **24**(12): 1159—1176.
- [9] Sherief Hany H, Anwar Mohamed N. A problem in generalized thermoelasticity for an infinitely long annular cylinder[J]. *Internat J Engg Sci*, 1988, **26**(3): 301—306.
- [10] Hanig G, Hirdes U. A method for the numerical inversion of Laplace transform[J]. *J Comput Appl Math*, 1984, **10**(1): 113—132.
- [11] Chu H, Chen C, Weng C. Applications of Fourier series technique to transient heat transfer[J]. *Chem Eng Commun*, 1982, **16**: 215—227.
- [12] Hasselman D P H, Heller R A. *Thermal Stresses in Severe Environments* [M]. Plenum, 1980, 61—80.

Dependence of the Modulus of Elasticity and the Thermal Conductivity on the Reference Temperature in Generalized Thermoelasticity for an Infinite Material With a Spherical Cavity

Hamdy M. Youssef

(Mathematical Department, Faculty of Engineering, Umm Al_Qura University,
Makkah Al_Mokaramah P. 5555, Saudi Arabia)

Abstract: The equations of generalized thermoelasticity with one relaxation time with variable modulus of elasticity and the thermal conductivity were used to solve a problem of an infinite material with a spherical cavity. The inner surface of the cavity was taken to be traction free and acted upon by a thermal shock to the surface. Laplace transforms techniques were used to obtain the solution by a direct approach. The inverse Laplace transforms was obtained numerically. The temperature, displacement and stress distributions are represented graphically.

Key words: thermoelasticity; generalized thermoelasticity; modulus of elasticity; thermal conductivity