应用数学和力学,第 26 卷 第 4 期(2005 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005)04_0447_09

弹性板中精化理论与分解定理的等价性*

赵宝生[1,2], 王敏中[2]

(1. 鞍山科技大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 鞍山 114044;
2. 北京大学 湍流与复杂系统国家重点实验室, 力学与工程科学系, 北京 100871)

(䤈江推荐)

摘要: 将 Cheng 氏精化理论和 Gregory 分解定理联系起来, 获得了两者的等价性(Cheng 利用算子矩阵行列式求解多元偏微方程组的方法, 得到了一个方程, 他认为这个方程的解是 3 个微分方程的解的和, 没有证明这种分解的合理性)· 从 Papkovich_Neuber 通解出发给出一个完整的精化理论的证明· 首先将板内的位移利用中面上位移及其沿板厚方向的梯度表示出来, 并获得板内应力张量· 再利用附录中给出的定理, 由边界条件和 Lur' e 算子方法获得精化理论· 最后利用基本的数学工具分别证明了, Cheng 氏精化理论中的 3 个方程分别与 Gregory 分解定理的三个应力状态的等价性· 即: Cheng 氏精化理论的双调和方程、剪切方程、超越方程与 Gregory 分解定理的内应力状态、剪切应力状态、Papkovich_Fadle 应力状态一一等价·

关 键 词: 弹性板; 各向同性; 精化理论; 分解定理; Papkovich_Neuber 通解
中图分类号: O343 文献标识码: A

引 言

当研究对象是一个表面无外力, 厚度为 h 的各向同性板时, 其研究区域为

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in D, \mid x_3 \mid \leqslant h/2\}, \tag{1}$$

这里的 D 是板的中面, 假定 $x_3 = \pm h/2$, $(x_1, x_2) \in D$ 为自由表面·

若作用在板的边界上的力关于 $x_3 = 0$ 反对称, 我们称之为“弯曲”· 此时, σ_{11}、σ_{22}、σ_{33} 和 σ_{12} 是关于 x_3 的奇函数, 而 σ_{31} 和 σ_{23} 是关于 x_3 的偶函数·

很多学者给出了各种板的理论, 其中最著名的是经典板理论和 Reissner 板理论, 本文所讨论的则是 Cheng 氏精化理论和 Gregory 分解定理·

Cheng[1]利用 Boussinesq_Galerkin 通解和 Lur' e 方法[2], 在没有任何预先假定的情况下, 推导出三维板的精化理论, 该精化理论包括 3 部分: 双调和方程、剪切方程和超越方程· 王飞跃[3]将 Cheng 氏精化理论推广到了横观各向同性板中, 得到了横观各向同性板的精化理论· 1992 年, Gregory[4]给出了板的分解定理, 并给出严格证明, Gregory 分解定理认为板内应力可以

* 收稿日期: 2003_06_04; 修订日期: 2004_12_03
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172003; 10372003); 教育部博士点基金资助项目(20000001 12)
作者简介: 赵宝生(1973—), 男, 吉林四平人, 讲师, 博士(联系人. Tel: + 86_412_2813695; Fax: + 86_412_5929777; E_mail: zhaobaos@263.net)·

分解成 3 部分: 内应力状态、剪切应力状态和 Papkovich_Fadle 应力状态。该证明利用了双解析函数的 Papkovich_Fadle 本征函数展开[5, 6]。2003 年 Wang 和 Zhao[7] 给出分解定理的一个不依赖于 Papkovich_Fadle 本征函数展开的简洁证明。2004 年, 赵宝生和王敏中[8] 给出了横观各向同性板的分解定理。

本文将证明 Cheng 氏精化理论和 Gregory 分解定理具有等价性。在下一节中首先介绍板弯曲状态的 Gregory 分解定理。第 2 节中利用 Papkovich_Neuber 通解得到 Cheng 氏精化理论。在最后 3 节中, 分别证明双调和方程、剪切方程、超越方程与内应力状态、剪切应力状态、Papkovich_Fadle 应力状态的等价性。

本文还参考了文献[9, 10] 的工作, 在这些工作中, 仅仅利用了一些基本的数学工具。

1 Gregory 分解定理

在给出分解定理之前, 先介绍几个关于应力状态的定义。

定义 1 内应力状态 σ_{ij}^{I} 的分量为,

$$\left\{\begin{aligned}
\sigma_{11}^{\mathrm{I}} &= -\frac{2\mu x_3}{1-\nu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{2-\nu}{6}x_3^2\right)\tilde{\nabla}^2\right]w,\\
\sigma_{22}^{\mathrm{I}} &= -\frac{2\mu x_3}{1-\nu}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\nu\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{h^2}{4}-\frac{2-\nu}{6}x_3^2\right)\tilde{\nabla}^2\right]w,\\
\sigma_{12}^{\mathrm{I}} &= -\frac{2\mu x_3}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\left[1-\nu+\left(\frac{h^2}{4}-\frac{2-\nu}{6}x_3^2\right)\tilde{\nabla}^2\right]w,\\
\sigma_{31}^{\mathrm{I}} &= -\frac{\mu}{4(1-\nu)}(h^2-4x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_1}\tilde{\nabla}^2 w,\\
\sigma_{23}^{\mathrm{I}} &= -\frac{\mu}{4(1-\nu)}(h^2-4x_3^2)\frac{\partial}{\partial x_2}\tilde{\nabla}^2 w,\\
\sigma_{33}^{\mathrm{I}} &= 0,
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

其中, ν 是 Poisson 比, μ 为弹性剪切模量,

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2 w(x_1, x_2) = 0,\quad \tilde{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{3}$$

定义 2 剪切应力状态 σ_{ij}^{S} 的分量为,

$$\left\{\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{\mathrm{S}} = 2S_{,12},\quad \sigma_{22}^{\mathrm{S}} = -2S_{,12},\quad \sigma_{12}^{\mathrm{S}} = S_{,22}-S_{,11},\\
&\sigma_{31}^{\mathrm{S}} = S_{,23},\quad \sigma_{23}^{\mathrm{S}} = -S_{,13},\quad \sigma_{33}^{\mathrm{S}} = 0,
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

其中, $S(x_1, x_2, x_3)$ 是关于 x_3 的奇函数, 且满足

$$\nabla^2 S = 0 \quad (\text{在 }\Omega\text{ 内}),\quad S_{,3} = 0 \quad (x_3 = \pm h/2), \tag{5}$$

$$\nabla^2 = \tilde{\nabla}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \tag{6}$$

定义 3 Papkovich_Fadle 应力状态(以下简称 P_F 应力状态) $\sigma_{ij}^{\mathrm{PF}}$ 的分量为,

$$\left\{\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{\mathrm{PF}} = \Phi_{,1133}+\nu\nabla^2\Phi_{,22},\quad \sigma_{23}^{\mathrm{PF}} = -\tilde{\nabla}^2\Phi_{,23},\\
&\sigma_{22}^{\mathrm{PF}} = \Phi_{,2233}+\nu\nabla^2\Phi_{,11},\quad \sigma_{31}^{\mathrm{PF}} = -\tilde{\nabla}^2\Phi_{,13},\\
&\sigma_{12}^{\mathrm{PF}} = \Phi_{,1233}-\nu\nabla^2\Phi_{,12},\quad \sigma_{33}^{\mathrm{PF}} = \tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2\Phi,
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

其中, $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ 是关于 x_3 的奇函数, 且满足

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0 \quad (\text{在 }\Omega\text{ 内}),\quad \Phi = \Phi_{,3} = 0 \quad (x_3 = \pm h/2). \tag{8}$$

不难验证 σ_{ij}^{I}, σ_{ij}^{S} 和 $\sigma_{ij}^{\mathrm{PF}}$ 满足平衡方程和 Beltrami 应力协调方程•

Gregory 分解定理 一个均匀的各向同性板

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in D, \mid x_3 \mid \leqslant h/2\right\},$$

其中, D 是厚度为 h 的板的中面, 假设应力 σ_{ij} 满足下列条件:

1. σ_{ij} 满足无体力的平衡方程和 Beltrami 应力协调方程•
2. σ_{ij} 关于中面 $x_3 = 0$ 反对称•
3. 在板面 $x_3 = \pm h/2$, $(x_1, x_2) \in D$, 满足 $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$•

那么存在内应力状态 σ_{ij}^{I}、剪切应力状态 σ_{ij}^{S} 和 Papkovich_Fadle 应力状态 $\sigma_{ij}^{\mathrm{PF}}$, 使应力可以分解为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\mathrm{I}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{S}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{PF}} \tag{9}$$

2 Cheng 氏精化理论

Cheng 在文献[1] 中, 将 Boussinesq_Galerkin 通解中的双调和函数利用算子函数表出, 由于一个双调和函数需要由 2 个二变量函数表示, 而位移只有 3 个分量, Cheng 直接定义了其中部分函数, 但没有说明这种表示的合理性• 另外, Cheng 利用算子矩阵行列式求解多元偏微方程组的方法, 得到了一个方程, 他认为这个方程的解是 3 个微分方程的解的和, 没有证明这种分解的合理性• 在本节中将弥补这些内容, 利用 P_N 通解给出一个完整的证明•

直角坐标系下的三维弹性力学 Papkovich_Neuber 通解为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P} - \frac{1}{4(1-\nu)}\nabla(P_0 + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{P}),\quad \nabla^2 P_0 = 0,\quad \nabla^2\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)• \tag{10}$$

由于板弯曲时, 应力关于 x_3 反对称, 利用 Lur' e[2] 方法, 可以知道(10) 式的解可以写成下列形式,

$$\begin{cases} P_0(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}g_0(x_1, x_2),\quad P_1(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}g_1(x_1, x_2), \\ P_2(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}g_2(x_1, x_2),\quad P_3(x_1, x_2, x_3) = \cos(x_3\tilde{\nabla})g_3(x_1, x_2), \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$(P_1, P_2, P_3) = \boldsymbol{P},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}} = x_3 - \dfrac{1}{3!}x_3^3\tilde{\nabla}^2 + \dfrac{1}{5!}x_3^5\tilde{\nabla}^4 + \cdots, \\ \cos(x_3\tilde{\nabla}) = 1 - \dfrac{1}{2!}x_3^2\tilde{\nabla}^2 + \dfrac{1}{4!}x_3^4\tilde{\nabla}^4 + \cdots \end{cases} \tag{12}$$

根据文献[11] 中的附录 A, 可以令

$$P_0 + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{P} = -\frac{x_3\cos(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}^2}e,\quad e = g_{1,1} + g_{2,2} - \tilde{\nabla}^2 g_3, \tag{13}$$

通解(10) 不失一般性, 其中 $1/\tilde{\nabla}^2$ 表示对数位势• 并令

$$\phi_1 = -\left.\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right|_{x_3=0},\quad \phi_2 = -\left.\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right|_{x_3=0},\quad W = u_3\mid_{x_3=0}• \tag{14}$$

可以得到利用(14) 中的记号表示的位移场

$$\begin{cases} u_1 = -\dfrac{\sin(x_3\tilde{\ddots})}{\tilde{\ddots}}\phi_1 + \dfrac{1}{\tilde{\ddots}^2}\left[\dfrac{x_3\cos(x_3\tilde{\ddots})}{4(1-\nu)} - \dfrac{\sin(x_3\tilde{\ddots})}{4(1-\nu)\tilde{\ddots}}\right]e_{,1}, \\ u_2 = -\dfrac{\sin(x_3\tilde{\ddots})}{\tilde{\ddots}}\phi_2 + \dfrac{1}{\tilde{\ddots}^2}\left[\dfrac{x_3\cos(x_3\tilde{\ddots})}{4(1-\nu)} - \dfrac{\sin(x_3\tilde{\ddots})}{4(1-\nu)\tilde{\ddots}}\right]e_{,2}, \\ u_3 = \cos(x_3\tilde{\ddots})W - \dfrac{x_3\sin(x_3\tilde{\ddots})}{4(1-\nu)\tilde{\ddots}}e; \end{cases} \tag{15}$$

$$e = -\phi_{1,1} - \phi_{2,2} - \ddots^2 W. \tag{16}$$

将位移场(15)代入各向同性本构方程

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{2\mu\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) + 2\mu u_{1,1}, \\ \sigma_{22} = \dfrac{2\mu\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) + 2\mu u_{2,2}, \\ \sigma_{33} = \dfrac{2\mu\nu}{1-2\nu}(u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}) + 2\mu u_{3,3}; \end{cases} \tag{17}$$

$$\sigma_{12} = \mu(u_{1,2} + u_{2,1}),\quad \sigma_{23} = \mu(u_{2,3} + u_{3,2}),\quad \sigma_{31} = \mu(u_{3,1} + u_{1,3}), \tag{18}$$

得到应力场

$$\frac{\sigma_{33}}{\mu} = \frac{1}{2(1-\nu)}\left[x_3\cos(x_3\tilde{\ddots}) + (1-2\nu)\frac{\sin(x_3\tilde{\ddots})}{\tilde{\ddots}}\right](\phi_{1,1} + \phi_{2,2}) + \frac{1}{2(1-\nu)}\left[x_3\cos(x_3\tilde{\ddots}) - (3-2\nu)\frac{\sin(x_3\tilde{\ddots})}{\tilde{\ddots}}\right]\tilde{\ddots}^2 w, \tag{19}$$

$$\frac{\sigma_{31}}{\mu} = -\left[\cos(x_3\tilde{\ddots}) - \frac{x_3\sin(x_3\tilde{\ddots})}{2(1-\nu)\tilde{\ddots}}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right]\phi_1 + \frac{x_3\sin(x_3\tilde{\ddots})}{2(1-\nu)\tilde{\ddots}}\phi_{2,12} + \left[\frac{x_3\sin(x_3\tilde{\ddots})}{2(1-\nu)\tilde{\ddots}}\tilde{\ddots}^2 + \cos(x_3\tilde{\ddots})\right]W_{,1}, \tag{20}$$

$$\frac{\sigma_{23}}{\mu} = \frac{x_3\sin(x_3\tilde{\ddots})}{2(1-\nu)\tilde{\ddots}}\phi_{1,12} - \left[\cos(x_3\tilde{\ddots}) - \frac{x_3\sin(x_3\tilde{\ddots})}{2(1-\nu)\tilde{\ddots}}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right]\phi_2 + \left[\frac{x_3\sin(x_3\tilde{\ddots})}{2(1-\nu)\tilde{\ddots}}\tilde{\ddots}^2 + \cos(x_3\tilde{\ddots})\right]W_{,2}. \tag{21}$$

自由表面板的边界条件为

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0,\qquad 当(x_1, x_2) \in D,\ x_3 = \pm h/2 时. \tag{22}$$

根据 Wang 和 Shi[11] 的文章中附录 B 中的第一个引理, 我们可以设

$$\phi_1 = F_{,1} + f_{,2},\quad \phi_2 = F_{,2} - f_{,1}. \tag{23}$$

把(23)式代入应力场(20)、(21)中, 并利用板的上下表面的边界条件(22), 可以得到一对 Cauchy_Riemann 方程, 其特解对 W、ϕ_1 和 ϕ_2 没有影响, 可以忽略. 所以有

$$-\left[\cos\left(\frac{h\tilde{\ddots}}{2}\right) - \frac{h}{4(1-\nu)}\sin\left(\frac{h\tilde{\ddots}}{2}\right)\tilde{\ddots}\right]F + \left[\frac{h}{4(1-\nu)}\sin\left(\frac{h\tilde{\ddots}}{2}\right)\tilde{\ddots} + \cos\left(\frac{h\tilde{\ddots}}{2}\right)\right]W = 0, \tag{24}$$

$$\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right) f = 0. \tag{25}$$

把(23)式代入应力场(19)中,并利用板的上下表面的边界条件(22),可以得到:

$$\left[\frac{h}{2}\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right) + \frac{(1-2\nu)}{\tilde{\nabla}}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\right]\tilde{\nabla}^2 F +$$
$$\left[\frac{h}{2}\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right) - \frac{(3-2\nu)}{\tilde{\nabla}}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\right]\tilde{\nabla}^2 w = 0. \tag{26}$$

可以将(24)式和(26)式改写成算子矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} F \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

其中,

$$\begin{cases} L_{11} = -\left[\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right) - \frac{h}{4(1-\nu)}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\tilde{\nabla}\right], \\ L_{12} = \frac{h}{4(1-\nu)}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\tilde{\nabla} + \cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right), \\ L_{21} = \left[\frac{h}{2}\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right) + \frac{(1-2\nu)}{\tilde{\nabla}}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\right]\tilde{\nabla}^2, \\ L_{22} = \left[\frac{h}{2}\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right) - \frac{(3-2\nu)}{\tilde{\nabla}}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\right]\tilde{\nabla}^2. \end{cases} \tag{28}$$

算子矩阵 $[L_{ij}]$ 的"行列式"为

$$\aleph = h\left[1 - \frac{\sin(h\tilde{\nabla})}{h\tilde{\nabla}}\right]\tilde{\nabla}^2.$$

按 Lur'e 算子方法,设(27)式的解为

$$\begin{pmatrix} F \\ W \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} L_{22} & -L_{12} \\ -L_{21} & L_{11} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中 $\aleph\,\xi_i = 0 \quad (i = 1, 2).$ (30)

根据附录中的定理,可以知道满足下列方程的两个函数 $\xi_i^{(1)}$ 和 $\xi_i^{(2)}$ 存在,

$$\xi_i = \xi_i^{(1)} + \xi_i^{(2)} \quad (i = 1, 2) \tag{31}$$

及

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2\xi_i^{(1)} = 0, \tag{32}$$

$$\frac{1}{\tilde{\nabla}^2}\left[1 - \frac{\sin(h\tilde{\nabla})}{h\tilde{\nabla}}\right]\xi_i^{(2)} = 0. \tag{33}$$

从而得到 Cheng 氏精化理论的 3 个方程:双调和方程(32),剪切方程(25)和超越方程(33).

3 双调和方程与内应力状态的等价性

由(29)可以知道 W 和 F 由两部分构成,即

$$W = W_1 + W_2, \quad F = F_1 + F_2, \tag{34}$$

其中

$$W_1 = -L_{21}\xi_1^{(1)}, \quad W_2 = L_{11}\xi_2^{(1)}, \quad F_1 = L_{22}\xi_1^{(1)}, \quad F_2 = -L_{12}\xi_2^{(1)}. \tag{35}$$

利用条件(32)以及定义(28),得

$$\nabla^2\xi_1^{(1)} = -\frac{1}{(1-\nu)h}W_1,\quad \xi_2^{(1)} = \left(1+\frac{2-\nu}{8(1-\nu)}h^2\nabla^2\right)W_2, \tag{36}$$

$$F_1 = W_1,\quad F_2 = \left(1+\frac{h^2}{4(1-\nu)}\nabla^2\right)W_2, \tag{37}$$

其中

$$\nabla^2 W_1 = 0,\quad \nabla^2\nabla^2 W_2 = 0. \tag{38}$$

由于有条件(38)所以 F_1 可以化成与 F_2 类似的形式, 最后得

$$F = \left(1+\frac{h^2}{4(1-\nu)}\nabla^2\right)W. \tag{39}$$

利用前面的公式(15)、(16)、(23)以及本构关系(17)、(18)可以得到满足双调和方程对应的内应力状态的应力场(2)且满足条件(3)。

而根据(36)的第2个式子, 当内应力状态存在时, 总可以找到双调和函数 ξ, 即: Cheng 氏精化理论的双调和方程部分与 Gregory 分解定理的内应力状态等价。

4　剪切方程与剪切应力状态的等价性

根据 $F = W = 0$ 可以得到位移场为

$$u_1 = \frac{1}{\mu}S_{,2},\quad u_2 = -\frac{1}{\mu}S_{,1},\quad u_3 = 0, \tag{40}$$

其中

$$S = -\mu\frac{\sin(x_3\nabla)}{\nabla}f. \tag{41}$$

根据方程(25), S 满足条件(5)。

将位移场(40)代入本构方程(17)和(18), 得到 Gregory 分解定理剪切应力状态的应力场(4)。同时根据 Lur'e 方法, 式(5)的第1个方程的解可以设为(41)的形式, 再由(5)的第2个方程, 可以知道 f 满足 Cheng 氏精化理论的剪切方程(25), 所以 Cheng 氏精化理论的剪切方程部分与 Gregory 分解定理的剪切应力状态等价。

5　超越方程与 P_F 应力状态的等价性

根据附录中的引理, 总可以找到满足下面方程的 η_2, 使得

$$\frac{1}{\nabla^2}\left[1-\frac{\sin(h\nabla)}{h\nabla}\right]\eta_2 = 0, \tag{42}$$

$$\nabla^2\eta_2 = \frac{1}{2(1-\nu)}\xi_2^{(2)}. \tag{43}$$

将超越方程的解代回到(29)得

$$\begin{aligned} F = {}& \left[\frac{h}{2}\cos\left(\frac{h\nabla}{2}\right)-\frac{(3-2\nu)}{\nabla}\sin\left(\frac{h\nabla}{2}\right)\right]\nabla^2\xi_1^{(2)} - \\ & \left[\frac{h}{2}\sin\left(\frac{h\nabla}{2}\right)\nabla + 2(1-\nu)\cos\left(\frac{h\nabla}{2}\right)\right]\nabla^2\eta_2, \end{aligned} \tag{44}$$

$$W = -\left[\frac{h}{2}\cos\left(\frac{h\nabla}{2}\right)+\frac{(1-2\nu)}{\nabla}\sin\left(\frac{h\nabla}{2}\right)\right]\nabla^2\xi_1^{(2)} -$$

$$\left[2(1-\nu)\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)-\frac{h}{2}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\tilde{\nabla}\right]\tilde{\nabla}^2\eta_2\cdot \tag{45}$$

令

$$\frac{\mu\Phi}{2}=-\frac{x_3\cos(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\xi_1^{(2)}+\frac{h}{2}\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\xi_1^{(2)}+$$
$$x_3\cos(x_3\tilde{\nabla})\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\eta_2-\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\left[\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)-\frac{h}{2}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\tilde{\nabla}\right]\eta_2\cdot \tag{46}$$

将(44)、(45)式和关系式(23)代入本构方程(17)和(18)，可以得到 Gregory 分解定理的 P_F 应力状态(7)• 根据式(46)和式(33)可以知道 Φ 满足方程(8)•

同时，根据 Lur' e 方法，(8)式的第一个方程的解为

$$\frac{\mu\Phi}{2}=\frac{\sin(x_3\tilde{\nabla})}{\tilde{\nabla}}\zeta_1(x_1,x_2)+x_3\cos(x_3\tilde{\nabla})\zeta_2(x_1,x_2), \tag{47}$$

这里 ζ_1 和 ζ_2 待定•

将(47)式代入(8)式的第 2 个方程中，得到

$$\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right) & \cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)-\frac{h}{2}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\tilde{\nabla}\\ \frac{1}{\tilde{\nabla}}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right) & \frac{h}{2}\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \tag{48}$$

利用 Lur' e 算子方法，可知方程组(48)的解为：

$$\zeta_1=\frac{h}{2}\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\tilde{\xi}_1-\left[\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)-\frac{h}{2}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\tilde{\nabla}\right]\tilde{\xi}_2, \tag{49}$$

$$\zeta_2=-\frac{1}{\tilde{\nabla}}\sin\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\tilde{\xi}_1+\cos\left(\frac{h\tilde{\nabla}}{2}\right)\tilde{\xi}_2, \tag{50}$$

其中 $$\frac{1}{\tilde{\nabla}^2}\left(1-\frac{\sin(h\tilde{\nabla})}{h\tilde{\nabla}}\right)\tilde{\xi}_i=0\qquad(i=1,2)\cdot$$

将(49)式和(50)式带回(47)式可以得到(46)式，所以只要满足式(8)的 $\Phi(x_1,x_2,x_3)$ 存在，都可以找到满足(33)式的 $\xi_1^{(2)}$ 和 $\xi_2^{(2)}$，使得它可以写成(46)式的形式•

所以：Cheng 氏精化理论的超越方程部分与 Gregory 分解定理的 P_F 应力状态等价•

6 结　论

本文首先完善了 Cheng 氏精化理论的证明，严格证明了 3 个方程的产生，随后分别证明了 Cheng 氏精化理论中的 3 个方程分别与 Gregory 分解定理的 3 个应力状态等价，从而证明了，精化理论和分解定理的等价性•

附　录

引理　假设 f 满足下面的方程

$$\frac{1}{\tilde{\nabla}^2}\left[1-\frac{\sin(h\tilde{\nabla})}{h\tilde{\nabla}}\right]f=0, \tag{A1}$$

那么一定存在一个函数 A 满足下面两个方程，

$$\tilde{\nabla}^2\tilde{\nabla}^2A=f,\quad \frac{1}{\tilde{\nabla}^2}\left[1-\frac{\sin(h\tilde{\nabla})}{h\tilde{\nabla}}\right]A=0\cdot \tag{A2}$$

证明　在板内可以找到一个满足下面方程的函数 B

$$\nabla^2 B = f, \tag{A3}$$

令

$$A_1 = B - \frac{6}{h^2}\frac{1}{\nabla^2}\left[1 - \frac{\sin(h\nabla)}{h\nabla}\right]B \cdot \tag{A4}$$

根据(A1)和(A3)两式, 可知

$$\nabla^2 A_1 = \nabla^2 B = f,\quad \frac{1}{\nabla^2}\left[1 - \frac{\sin(h\nabla)}{h\nabla}\right]A_1 = 0 \cdot \tag{A5}$$

由于 A_1 与 f 满足相同的条件, 用 A_1 代替 f, 重复(A3)到(A5), 可以找到满足(A2)的 A·　证毕·

定理　如果 ζ 是下面方程的解

$$\left[\frac{1}{\nabla^2}\left(1 - \frac{\sin(h\nabla)}{h\nabla}\right)\right]\nabla^2\nabla^2\zeta = 0, \tag{A6}$$

一定存在 $\zeta^{(1)}$ 和 $\zeta^{(2)}$ 可以将 ζ 分解为

$$\zeta = \zeta^{(1)} + \zeta^{(2)}, \tag{A7}$$

并满足条件

$$\nabla^2\nabla^2\zeta^{(1)} = 0,\quad \frac{1}{\nabla^2}\left(1 - \frac{\sin(h\nabla)}{h\nabla}\right)\zeta^{(2)} = 0 \cdot \tag{A8}$$

证明　令

$$B = \nabla^2\nabla^2\zeta, \tag{A9}$$

有

$$\frac{1}{\nabla^2}\left[1 - \frac{\sin(h\nabla)}{h\nabla}\right]B = 0 \cdot \tag{A10}$$

根据引理, 存在函数 $\zeta^{(2)}$, 满足

$$\nabla^2\nabla^2\zeta^{(2)} = B,\quad \frac{1}{\nabla^2}\left(1 - \frac{\sin(h\nabla)}{h\nabla}\right)\zeta^{(2)} = 0 \cdot \tag{A11}$$

由(A9)式和(A11)的第 1 个方程, 得到

$$\nabla^2\nabla^2\zeta^{(2)} = B = \nabla^2\nabla^2\zeta, \tag{A12}$$

令

$$\zeta^{(1)} = \zeta - \zeta^{(2)}, \tag{A13}$$

(A12)式变为(A9)的第 1 个方程, 证毕·

[参　考　文　献]

[1] CHENG Shun. Elasticity theory of plates and a refined theory[J]. Journal of Application Mechanics, 1979, **46**(2): 644—650.

[2] Lur' e A I. Three_Dimensional Problems in the Theory of Elasticity [M]. New York: Interscience, 1964, 148—166.

[3] 王飞跃. 横观各向同性板的弹性精化理论[J]. 上海力学, 1985, **6**(2): 10—21.

[4] Gregory R D. The general form of the three_dimensional elastic field inside an isotropic plate with free faces[J]. Journal of Elasticiy, 1992, **28**(1): 1—28.

[5] Gregory R D. The semi_infinite strip $x \geqslant 0, -1 \leqslant y \leqslant 1$; completeness of the Papkovich_Fadle eigenfunctions when $\Phi_{xx}(0, y)$, $\Phi_{yy}(0, y)$ are prescribed[J]. Journal of Elasticity, 1980, **10**(1): 57—80.

[6] Gregory R D. The traction boundary value problems for the elastostatic semi_infinite strip; existence

of solution, and completeness of the Papkovich_Fadle eigenfunctions[J]. Journal of Elasticity, 1980, **10**(3): 295—327.

[7] WANG Min_zhong, ZHAO Bao_sheng. The decomposed form of the three_dimensional elastic plate [J]. Acta Mechanica, 2003, **166**(3): 207—216.

[8] 赵宝生, 王敏中. 横观各向同性板的分解理论[J]. 力学学报, 2004, **36**(1): 57—63.

[9] WANG Min_zhong, WANG Wei. Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 1995, **32**(3/4): 501—513.

[10] WANG Wei, WANG Min_zhong. Constructivity and completeness of the general solutions in elastodynamics[J]. Acta Mechanica, 1992, **91**(1): 209—214.

[11] WANG Wei, SHI Ming_xing. Thick plate theory based on general solutions of elasticity[J]. Acta Mechanica, 1997, **123**(1): 27—36.

Equivalence of the Refined Theory and the Decomposed Theorem of an Elastic Plate

ZHAO Bao_sheng[1,2], WANG Min_zhong[2]

(1. School of Mechanical Engineering and Automation, Anshan University of Science and Technology, Anshan, Liaoning 114044, P.R.China;

2. State Key Laboratory for Turbulence and Complex Systems, Department of Mechanics and Engineering Science, Peking University, Beijing 100871, P. R. China)

Abstract: A connection between Cheng's refined theory and Gregory's decomposed theorem is analyzed. The equivalence of the refined theory and the decomposed theorem is given. Using operator matrix determinant of partial differential equation, Cheng gained one equation, and he substituted the sum of the general integrals of three differential equations for the equation's solution. But he didn't prove the rationality of substitute. There, a whole proof for the refined theory from Papkovich_Neuber solution was given. At first expressions were obtained for all the displacements and stress components in term of the mid_plane displacement and its derivatives. Using Lur'e method and the theorem of appendix, the refined theory was given. At last, using basic mathematic method, the equivalence between Cheng's refined theory and Gregory's decomposed theorem was proved, i. e., Cheng's bi_harmonic equation, shear equation and transcendental equation are equivalent to Gregory's interior state, shear state and Papkovich_Fadle state, respectively.

Key words: elastic plate; isotropic plate; refined theory; decomposed theorem; Papkovich_Neuber general solution