

文章编号: 1000\_0887(2005) 04\_0474\_07

# 金属材料疲劳裂纹扩展速率 估计的分层模型

杨永愉<sup>1</sup>, 刘新卫<sup>2</sup>, 杨 凡<sup>3</sup>

(1. 北京化工大学 理学院, 北京 100029;

2. 北京化工大学 机电工程学院, 北京 100029;

3. 明尼苏达大学 统计系, MN 55455, 美国)

(王银邦推荐)

**摘要:** 裂纹扩展速率与应力强度因子幅值的关系曲线, 是金属构件损伤容限设计及寿命预测的重要疲劳性能数据。为了充分、合理地运用在不同测试条件下获得的试验数据, 分层随机样本模型, 将总体样本分为若干层, 每一层样本都是在相同的测试条件下获得的试验数据, 结合压力容器的实际工作状况, 对每一层样本赋予适当的权重, 从而对疲劳裂纹扩展速率方程做出更符合实际要求的估计。实际计算表明, 对不同炉号试样提供的 Q235A 级钢材的裂纹扩展速率数据, 运用分层随机样本模型得到的结果, 明显地优于运用简单随机样本模型分别处理每个炉号试样提供的数据所得的结果。

**关键词:** 疲劳裂纹; 简单随机样本; 分层随机样本; 容忍上限

**中图分类号:** O346.2      **文献标识码:** A

## 引 言

疲劳破坏是金属构件损伤失效的重要形式之一。裂纹扩展速率  $da/dN$  与应力强度因子幅值  $K$  的关系曲线, 是金属构件损伤容限设计及寿命预测的重要疲劳性能数据。由于疲劳裂纹扩展速率的分散性, 测定高可靠度的  $da/dN - K$  曲线就需要对较多的试件进行试验。然而在工程的许多实际场合(如在役压力容器)很难有那么多相近工艺、相同材质、相同时效的试件。充分利用已有的实验数据, 无论从技术的角度还是从经济的角度看, 都是非常必要的。

现有的各种方法<sup>[1, 2]</sup>都是将试验数据, 作为简单随机样本(simple random sample)来处理。虽然这样可以提高样本容量, 但是由于试件的试验条件不同, 所以用简单随机样本的方法来处, 显然失之过粗。为此, 本文建立了分层随机样本(stratified random sample)模型<sup>[3]</sup>, 在提高样本容量的同时, 将来自不同试验条件下的试验数据, 通过分层的方法组合在一起, 对  $da/dN - K$  的关系曲线做出更准确的估计。试验数据的分层标准, 可以根据实际的需要设定。本文提供了一个根据试验载荷条件, 结合压力容器的实际工作状况构造分层样本的算例。

收稿日期: 2003\_09\_23; 修订日期: 2004\_11\_15

作者简介: 杨永愉(1948 )男, 浙江人, 副教授(联系人, Tel: + 86\_10\_82128827; Fax: + 86\_10\_64449862; E\_mail: yangyongyu@sohu.com)

# 1 正态分布的简单随机样本模型

大量的实证研究表明, 裂纹扩展速率的常用对数  $\lg(da/dN)$  服从正态分布, 对  $da/dN - K$  的关系曲线拟合的关键是估计  $\lg(da/dN)$  的容忍上限<sup>[4]</sup> 基于简单随机样本模型作:

设  $(X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  是来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本 总体  $X$  的容量为  $n$ , 置信度为  $1 - \alpha$  的容忍上限  $(X + kS)$  满足:

$$P_{r, S^2} \left\{ P_{r, X} (X < X + kS) \right\} = 1 - \alpha, \tag{1}$$

其中  $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - X)^2,$

$k$  称为容忍系数, 并满足:

$$P_{r, S^2} \left\{ t > -k\sqrt{n} \right\} = 1 - \alpha, \tag{2}$$

其中  $t$  服从自由度为  $n - 1$  的非中心  $t$  分布, 非中心参数  $\delta = -Z\sqrt{n}, Z$  由标准正态分布的  $(1 - \alpha)$  分位点  $(Z) = Z_{1-\alpha}$  决定

$$k(n, \alpha, \delta) = -t_{1-\alpha}(n-1, -Z\sqrt{n})/\sqrt{n}, \tag{3}$$

其中  $t_{1-\alpha}(n-1, -Z\sqrt{n})$  为非中心  $t$  分布的  $(1 - \alpha)$  分位点

利用式(3), 对常用的容量  $n$  和置信度  $1 - \alpha$ , 表 1、表 2 给出了容忍系数  $k$  的数值

表 1 容忍系数  $k$  数值表 ( $\alpha = 99\%, \delta = 95\%$ )

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$k$	10.553	7.042	5.741	5.062	4.642	4.354	4.143	3.981	3.852
$n$	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$k$	3.747	3.659	3.585	3.520	3.464	3.414	3.370	3.330	3.295

表 2 容忍系数  $k$  数值表 ( $\alpha = 95\%, \delta = 95\%$ )

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$k$	7.656	5.144	4.203	3.708	3.399	3.187	3.031	2.911	2.815
$n$	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$k$	2.736	2.671	2.614	2.566	2.524	2.486	2.452	2.423	2.396

# 2 正态分布的分层随机样本模型

基于正态分布的分层随机样本模型可作:

设  $X = (X_1, X_2, \dots, X_L)^T$  是来自正态总体的分层独立的随机样本, 其中  $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})^T$  是来自第  $i$  层, 容量为  $n_i$  的独立同分布随机样本, 且  $X_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) (i = 1, 2, \dots, L; j = 1, 2, \dots, n_i),$  总体样本容量  $n = \sum_{i=1}^L n_i$

假定总体的累积分布函数

$$F(x) = \prod_{i=1}^L p_i [(x - \mu_i)/\sigma_i], \tag{4}$$

其中  $\Phi(\cdot)$  是标准正态分布的累积分布函数,  $p_i (i = 1, 2, \dots, L)$  为权重, 并满足  $\sum_{i=1}^L p_i = 1$

定理 1 设正态总体的分层随机样本有统计量:

$$X_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}, \quad X = \sum_{i=1}^L p_i X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-L} \sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^{n_i} (X_{ij} - X_i)^2,$$

则有

$$X_i \sim N\left(i, \frac{2}{n_i}\right), \quad X \sim N\left(\sum_{i=1}^L p_i i, \frac{2}{n}\right), \quad (5)$$

$X$  与  $S^2$  相互独立,

$$Q = \frac{(n-L)S^2}{2} \sim \chi^2(n-L), \quad (6)$$

其中

$$= \sum_{i=1}^L p_i i, \quad n = \left[ \sum_{i=1}^L \frac{p_i^2}{n_i} \right]^{-1} \quad (7)$$

式(5)的结论由正态分布的性质可得 式(6)的证明如下

设  $X = (X_1, X_2, \dots, X_L)^T$  是正态总体的分层随机样本,

$$X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})^T \quad (i = 1, 2, \dots, L),$$

总体样本容量  $n = \sum_{i=1}^L n_i$

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_L \end{pmatrix}$$

为分块对角正交阵, 其中  $A_i (i = 1, 2, \dots, L)$  是  $n_i (i = 1, 2, \dots, L)$  阶正交阵 且

$$A_i = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2-3} & 1/\sqrt{2-3} & -2/\sqrt{2-3} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1/\sqrt{n_i(n_i-1)} & 1/\sqrt{n_i(n_i-1)} & 1/\sqrt{n_i(n_i-1)} & \dots & -(n_i-1)/\sqrt{n_i(n_i-1)} \\ 1/\sqrt{n_i} & 1/\sqrt{n_i} & 1/\sqrt{n_i} & 1/\sqrt{n_i} & 1/\sqrt{n_i} \end{pmatrix},$$

作变换:

$$Z = AX = \begin{pmatrix} A_1 X_1 \\ A_2 X_2 \\ \vdots \\ A_L X_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_L \end{pmatrix}, \quad Z_i = (Z_{i1}, Z_{i2}, \dots, Z_{in_i})^T,$$

则有:

$$Z_{ij} = \frac{X_{i1}}{\sqrt{j(j+1)}} + \frac{X_{i2}}{\sqrt{j(j+1)}} + \dots + \frac{-jX_{ij}}{\sqrt{j(j+1)}},$$

所以

$$Z_{ij} \sim N(0, 2) \quad (i = 1, 2, \dots, L; j = 1, 2, \dots, n_i - 1),$$

$$Z_{in_i} = \frac{1}{\sqrt{n_i}} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \sim N(\sqrt{n_i} i, 2) \quad (i = 1, 2, \dots, L)$$

又因为

$$X^T X = Z^T Z = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{n_i-1} Z_{ij}^2 + \sum_{i=1}^L Z_{in_i}^2,$$

即有:

$$Q = \frac{(n-L)S^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{n_i-1} Z_{ij}^2 \sim \chi^2(n-L),$$

$$X = \sum_{i=1}^L \frac{\sqrt{n_i}}{n} Z_{in_i},$$

Q 与 X 独立

由非中心 t 分布的定义和定理 1 不难得到如下结论:

定理 2 在定理 1 的条件下

$$t = \frac{(X - \mu) \sqrt{n} / \sigma - \sqrt{n} Z}{S / \sigma} \sim t(n-L, \lambda), \tag{8}$$

其中

$$\begin{cases} \mu = \sum_{i=1}^L \frac{\sqrt{n_i}}{n} Z_{in_i}, S = \sqrt{\frac{1}{n-L} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{n_i-1} (X_{ij} - X_i)^2}, \\ Z = \frac{X - \mu}{\sigma}, F(X) = \sum_{i=1}^L p_i [(X - \mu) / \sigma] \end{cases} \tag{9}$$

### 3 正态总体分层模型的容忍限估计

设正态总体有分层随机样本  $X = (X_1, X_2, \dots, X_L)^T$ , 总体的置信度为  $1-\alpha$ , 容量为  $n$  的容忍上限:  $X + kS$  满足

$$P_{r, s} \left\{ P_{r, X} (X < X + kS) \right\} = 1 - \alpha \tag{10}$$

由总体的累积分布函数  $F(x)$  可知, 式(10)等价于

$$P_{r, s} \left\{ X + kS > X \right\} = 1 - \alpha$$

其中  $X$  满足:

$$F(X) = \sum_{i=1}^L p_i [(X - \mu) / \sigma] = 1 - \alpha \tag{11}$$

因为

$$X + kS > X \iff \frac{(X - \mu) \sqrt{n} / \sigma - \sqrt{n} (X - \mu) / \sigma}{S / \sigma} > -k \sqrt{n} \\ \iff \frac{(X - \mu) \sqrt{n} / \sigma - \sqrt{n} Z}{S / \sigma} > -k \sqrt{n},$$

其中  $\mu$  和  $n$  见式(7),  $Z$  见式(9)

由定理 2 的结论可知

$$P_{r, s} \left\{ X + kS > X \right\} = P_r \left\{ t > -k \sqrt{n} \mid \lambda \right\} = 1 - \alpha,$$

所以  $-k \sqrt{n} = t_{1-\alpha}(n-L, -\sqrt{n} Z)$

由此解出正态分布分层模型的容忍上限系数

$$k = -\frac{t_{1-\alpha}(n-L, -\sqrt{n} Z)}{\sqrt{n}}, k = \frac{t(n-L, \sqrt{n} Z)}{\sqrt{n}} \tag{12}$$

值得指出的是, 式(12)在形式上很类似于正态分布在简单随机样本下得到的结果, 见式

(3) 但式(12)中的  $Z$  是未知的,需要通过分层随机样本估计

由式(9)可知,  $Z$  满足

$$\sum_{i=1}^L p_i \left[ Z + \frac{-}{i} \right] =$$

令  $\hat{Z} = (X - X_i)/S$ , 取  $\hat{Z} = (X - X_i)/S$  作为  $Z$  的估计, 由此得

$$\sum_{i=1}^L p_i \left[ Z + \frac{X - X_i}{S} \right] = \quad (13)$$

式(13)的左边是标准正态分布累积分布函数  $\Phi(\cdot)$  的线性组合, 它关于  $Z$  是严格单调上升的, 当给定  $\Phi$  的值时, 由式(13)可解得式(12)中的  $Z$  的值, 最终得到正态分布基于分层样本的容量为  $n$ , 置信度为  $1 - \alpha$  容忍上限:  $X + kS$

## 4 例子

利用 机械工程材料性能数据手册<sup>[5]</sup>中 Q235A 级钢材炉号 的 3 根试样, 炉号 中的 3 根试样, 炉号 中的 4 根试样提供的疲劳裂纹扩展速率数据  $(da/dN, K)$ ,  $da/dN$  的单位为  $\text{mm}/\text{r}$ ,  $K$  的单位为  $\text{MPa} \cdot \text{mm}^{1/2}$  假定设备实际工况所对应的 CT 试样试验载荷为 18 kN, 将 10 根试样提供的数据, 根据实验载荷的不同, 构成 3 层随机样本模型 ( $L = 3, n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 3$ ), 第 1 层 3 根试样, 试验压力为 19.6 kN; 第 2 层 4 根试样, 试验压力为 17.6 kN; 第 3 层 3 根试样, 试验压力分别为 14.7 kN, 15.68 kN, 21.56 kN

为确定各层的权重, 将各个试样的试验压力与实际工况所对应的试验载荷 18 kN 作比较, 差距越小则权重越大, 利用取倒数的方法, 得到 3 层权重依次为  $p_1 = 0.193, p_2 = 0.773$  和  $p_3 = 0.034$  令

$$K = K / (\text{MPa} \cdot \text{mm}^{1/2}), \quad \frac{da}{dN} = \frac{da}{dN} \left( \frac{\text{mm}}{\text{r}} \right)$$

根据  $K$  的范围, 取  $\lg(K)$  的最小值为 2.782,  $\lg(K)$  的最大值为 3.409, 以  $\lg(K)$  步长为 0.027 作抽样, 数据点为 25 个, (改变抽样步长, 可控制数据点个数) 由 Paris 方程

表 3 Q235A 试样的  $\lg(K)$  和  $(\lg(da/dN))_{TU}$  的数值

序号	$\lg K$	$(\lg(da/dN))_{TU}$	序号	$\lg K$	$(\lg(da/dN))_{TU}$
1	2.782 000	- 4.399 93	14	3.121 560	- 3.193 96
2	2.808 120	- 4.312 64	15	3.147 680	- 3.095 93
3	2.834 240	- 4.224 40	16	3.173 800	- 2.997 40
4	2.860 360	- 4.135 19	17	3.199 920	- 2.898 43
5	2.886 480	- 4.045 01	18	3.226 040	- 2.799 05
6	2.912 600	- 3.953 85	19	3.252 160	- 2.699 30
7	2.938 720	- 3.861 74	20	3.278 280	- 2.599 23
8	2.964 840	- 3.768 71	21	3.304 400	- 2.498 86
9	2.990 960	- 3.674 80	22	3.330 520	- 2.398 22
10	3.017 080	- 3.580 06	23	3.356 640	- 2.297 34
11	3.043 200	- 3.484 55	24	3.382 760	- 2.196 24
12	3.069 320	- 3.388 33	25	3.408 880	- 2.094 94
13	3.095 440	- 3.291 44			

$$\frac{da}{dN} = c(K)^m$$

求出每一根试样在抽样点 ( $\lg K$ ) 的  $\lg(da/dN)$  值 由式(7)、(12)、(13), 对每一个  $\lg(K)$ , 可得  $\lg(da/dN)$  的容忍上限:

$$\left( \lg \frac{da}{dN} \right)_{TU} = X + kS$$

取容量 = 95%, 置信度 = 95%, 表3给出了  $\lg(K)$  和  $(\lg(da/dN))_{TU}$  的对应值 用最小二乘法处理得到疲劳裂纹扩展速率曲线参数:  $\lg c = -14.70191, m = 3.69134$ , 相应的 Paris 方程:

$$\lg(da/dN) = -14.70191 + 3.69134 \lg K,$$

或  $da/dN = 1.987 \cdot 10^{-15} (K)^{3.69134}$

若取容量 = 99%, 置信度 = 95%, 可得相应的 Paris 方程:

$$\lg(da/dN) = -14.88379 + 3.77816 \lg K,$$

或  $da/dN = 1.307 \cdot 10^{-15} (K)^{3.77816}$

图1给出了用简单随机样本和分层随机样本得到的 Paris 方程曲线的图象 其中曲线1是将来自3个炉号的试样, 采用分层随机样本模型得到的 Paris 方程曲线; 曲线2, 曲线3, 曲线4是依次将来自炉号、的试样, 分别采用简单随机样本模型得到的 Paris 方程曲线 比较4条曲线可以看出, 曲线1的截距介于另外3条曲线的中间, 而斜率与另外3条曲线中的最大者接近 所以, 曲线1较好地综合了3个炉号的试样所提供的信息, 给出了便于工程中使用的 Paris 方程曲线

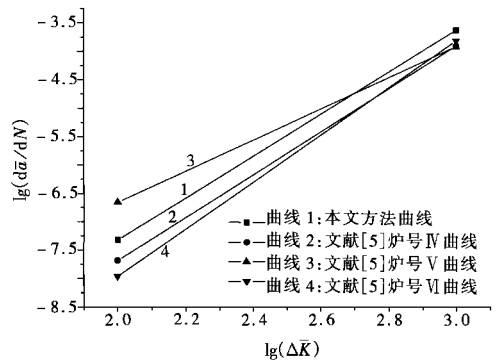


图1 Paris 方程曲线的比较

## 5 结 论

1) 本文提出的分层随机样本模型, 就是通过加权的方法将以往的历史数据和当前试验数据组合在一起, 综合加以运用 与传统方法相比, 可以充分利用历史数据, 大量节省当前试验的试样数(在工程上, 一般认为至少要有3个试样), 从而降低试验成本; 而在试样数量相同的情况下, 可以获得更加符合要求的 Paris 程

2) 分层模型中权重的设计, 主要考虑现设备材质的化学成分、机械性能和设备载荷工况等因素, 根据实际需要, 对与主要考虑因素相接近的试验数据赋予较大的权重, 从而获得更加符合实际状况的数据组合

3) 分层模型方法可以解决在役压力容器、在役飞机等因相同材质、相近工艺、相同时效的试样少而难以测定疲劳裂纹扩展速率曲线的难题, 具有很大的实用价值和经济效益

致谢 本工作得到北京化工大学科研基金资助(QN0003), 在此表示衷心感谢

### [参 考 文 献]

[1] 刘新卫, 杨永愉, 李志强. 压力容器钢疲劳裂纹扩展速率曲线测试的小样本方法[J]. 北京化工大

- 学学报, 2002, 29(6): 95) 97.
- [2] 王志智, 聂学州, 吴晓峰. 疲劳裂纹扩展速率统计分析[J]. 航空学报, 1993, 14(3): A197) A201.
- [3] Mee Robert W. Normal distribution tolerance limits for stratified random samples[J]. Technometrics, 1989, 31(1): 99) 105.
- [4] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京: 科学出版社, 1999, 392) 394.
- [5] 朱森第. 机械工程材料性能数据手册[M]. 北京: 机械工业出版社, 1994, 47) 48.

Stratified Model for Estimating Fatigue Crack  
Growth Rate of Metallic Materials

YANG Yong\_yu<sup>1</sup>, LIU Xin\_wei<sup>2</sup>, YANG Fan<sup>3</sup>

(1. Faculty of Science, Beijing University of Chemical Technology,  
Beijing 100029, P. R. China;

2. College of Mechanical and Engineering, Beijing University of Chemical  
Technology, Beijing 100029, P. R. China;

3. School of Statistics, University of Minnesota, MN 55455, USA)

Abstract: The curve of relationship between fatigue crack growth rate and the stress strength factor amplitude represented an important fatigue property in designing of damage tolerance limits and predicting life of metallic component parts. In order to have a more reasonable use of testing data, samples from population were stratified suggested by stratified random sample model (SRAM). The data in each stratum corresponded to the same experiment conditions. A suitable weight was assigned to each stratified sample according to the actual working states of the pressure vessel, so that the estimation of fatigue crack growth rate equation was more accurate for practice. An empirical study shows that the SRAM estimation by using fatigue crack growth rate data from different stoves is obviously better than the estimation from simple random sample model.

Key words: fatigue crack; simple random sample; stratified random sample; upper tolerance limit