

文章编号: 1000_0887(2005) 05_0547_09

刚柔耦合系统离心力效应模型 及姿态机动稳定性*

李智斌^{1,2}, 王照林², 王天舒², 柳宁²

(1. 北京控制工程研究所, 北京 100080;
2. 清华大学 航天航空学院, 北京 100084)

(马兴瑞推荐)

摘要: 研究非线性离心力对刚柔耦合系统的大范围姿态运动的影响. 首先从离心力势场的概念出发, 推导了刚柔耦合系统的非线性模型; 然后通过近似计算分析了非线性离心力对系统姿态运动的动态效应; 最后, 在只有系统姿态与姿态速率测量值的条件下, 基于能量范数选择 Liapunov 函数, 证明了采用 PD 反馈控制律能够确保大角度姿态机动过程的稳定性.

关键词: 非线性; 刚柔耦合; 姿态机动; 稳定性

中图分类号: O231; O317 文献标识码: A

引 言

刚柔耦合系统的动力学与控制问题是国际学术界极为关注的前沿研究课题^[1]. 1987 年 Kane 等研究表明^[2], 直接套用结构动力学对弹性变形假设的传统模型^[3,4] 实际上忽略了因刚柔耦合引起的所谓“动力刚化”效应, 因此从更严谨的角度研究刚柔耦合作用就显得尤其必要. 文献[5]分析了考虑刚柔耦合的非约束模态特性, 但是在挠性附件运动方程中仅考虑了姿态运动的切向惯性力耦合影响. M^L-rgul 进一步计及了姿态运动对柔性附件的非线性科氏力耦合影响^[6], 并设计出边界控制律. 但是 Bloch 等学者指出^[7], 上述动力学模型在大角度快速机动期间将会出现分叉现象, 与实际工程不符, 并认为其根本原因在于没有考虑姿态运动的非线性离心力耦合效应. 文献[8]和文献[9]进一步分析了考虑离心力效应的非线性系统的动态特性, 特别是胡振东、洪嘉振基于离心力势能概念导出受刚体运动影响的弹性梁的拟线性方程^[9], 并分析了大范围姿态运动为恒速时变形运动的模态及频率特性.

从上述文献调研可以看出, 目前大多数学者一般只考虑大范围运动对柔性运动的耦合作用, 并且假设大范围姿态角速度为恒定值. 然而航天器控制等实际工程往往更关心的是大范围姿态运动的动、静态特性, 鉴于未来航天器任务对姿态控制的要求将越来越高, 从更精细的角度来研究柔性多体结构的动力学与控制就显得尤其必要. 因此, 本文将沿用文献[9]的离心

* 收稿日期: 2003_12_23; 修订日期: 2004_12_15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372015, 90405017, 10302013)

作者简介: 李智斌(1965—), 男, 四川人, 研究员, 博士(联系人. Tel: + 86_10_68745370; Fax: + 86_10_62543110; E_mail: lzb502@yahoo.com.cn).

力势场概念, 首先推导平面型刚柔耦合系统的非线性模型; 然后通过近似计算分析非线性离心力对系统姿态运动的动态效应; 最后, 在仅有系统姿态与姿态速率测量值的条件下, 基于函数空间方法, 研究大角度姿态机动控制的稳定性。

1 非线性耦合模型

如图 1 所示, 设系统由中心刚体和柔性附件组成, 柔性附件为变形之前长 L 、横截面积 A 、质量密度 ρ 的等截面均匀梁, 根部同刚体固连, 端部自由。该系统可以相对于通过质心 O 的固定转轴转动。以柔性梁未变形时中轴线与中心刚体转轴的交点 O 为原点分别建立两个右手直角坐标系: 参考系 $N = (O, e_1, e_2, e_3)$ 和惯性主轴体坐标系 $B = (O, b_1, b_2, b_3)$ 。系 B 的 b_1 轴同柔性梁未变形时的中轴线相重合, b_3 轴同系统转轴相重合。设 $I_R = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ 为刚体部分的惯量矩阵, θ 为系 B 相对于系 N 的转角, 当 $\theta = 0$ 时系 B 与系 N 相重合, 系 B 相对于系 N 的角速度矢量为 $\omega(t) = \dot{\theta}(t) b_3$ 。

对于单位长度的微元 dm , 设 l 为拉格朗日空间变量, 表示梁变形之前微元相对于梁根部的距离, 满足 $0 \leq l \leq L$ 。记横向弯曲变形为 v , 则微元绝对位置向量、速度向量和加速度向量在体系的表示分别为

$$r = (R + l) b_1 + v(l, t) b_2 \quad (1)$$

$$\dot{r} = -\dot{\theta} b_1 + [\dot{v} + \dot{\theta}(R + l)] b_2 \quad (2)$$

$$\ddot{r} = [-\ddot{\theta} v - 2\dot{\theta}\dot{v} - \dot{\theta}^2(R + l)] b_1 + [\ddot{v} + \ddot{\theta}(R + l) - \dot{\theta}^2 v] b_2 \quad (3)$$

系统的动能为

$$K = \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \dot{r} \cdot \dot{r} dl = \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \{ \dot{\theta}^2 v^2 + [\dot{v} + \dot{\theta}(R + l)]^2 \} dl \quad (4)$$

系统的势能包括弯曲应变能和变形体在离心力势场中所具有的势能

$$U = \frac{1}{2} EJ \int_0^L \left[\frac{\partial^2 v}{\partial l^2} \right]^2 dl + \frac{1}{2} \rho A \dot{\theta}^2 \int_0^L \left[R(L - l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v^2 dl \quad (5)$$

控制力矩等外力矩所做功的变分为

$$\delta W = T \delta \theta \quad (6)$$

于是应用 Hamilton 变分原理

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta V + \delta W) dt = 0 \quad (7)$$

及其边界条件

$$\begin{cases} v(0, t) = \frac{\partial v}{\partial l}(0, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial l^2}(L, t) = \frac{\partial^3 v}{\partial l^3}(L, t) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

容易推导出考虑离心力效应的大范围姿态运动方程

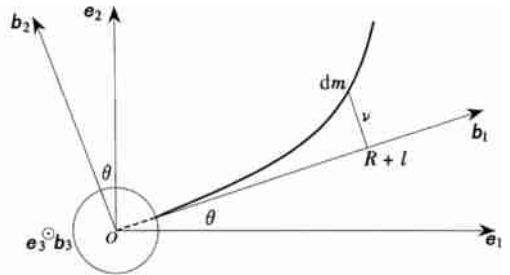


图 1 刚柔耦合系统示意图

$$\begin{cases} I_3 \ddot{\theta} + 2\rho A \theta \int_0^L v \dot{w} dl + \rho A \int_0^L (R+l) \dot{v} dl = T, \\ I_3 = I_3 + \rho A \int_0^L [R(R+l)^2 + v^2] dl + \rho A \int_0^L \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2-l^2) \right] \dot{v}^2 dl, \end{cases} \quad (9)$$

与柔性悬臂梁的弯曲振动方程

$$\begin{aligned} \rho A \dot{v} + EJ v''' = -\rho A \ddot{\theta} (R+l) + \rho A \theta^2 v + \\ \rho A \theta^2 \frac{\partial}{\partial l} \left[v \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2-l^2) \right] \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

2 离心力对姿态运动的耦合影响计算

2.1 近似计算方法

令

$$\xi = \frac{l}{L}, \quad y = \frac{v}{L}, \quad \beta = \sqrt{\frac{EJ}{\rho AL^4}}, \quad a = \frac{R}{L}, \quad \gamma = \rho AL^3.$$

对耦合方程组进行无量纲化处理, 并视 $y, \gamma \dot{y}$ 为小量, 忽略小量的二次及二次以上项, 方程(9)、(10)化为

$$\left[I_3 + \gamma \left(a^2 + a + \frac{1}{3} \right) \right] \ddot{\theta} + \gamma \int_0^1 (a + \xi) \dot{y} d\xi = T, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} + \beta^2 \gamma \xi \xi \xi = -\ddot{\theta} (a + \xi) + \theta^2 y - \theta^2 y \xi (a + \xi) + \\ \theta^2 y \xi \left[a(1 - \xi) + \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

采用假设振型法进行计算, 考虑前两阶振型, 令

$$y = \phi^T(\xi) \mathbf{q}(t) = (\phi_1(\xi), \phi_2(\xi)) \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\text{其中 } \phi_1 = 6\xi^2 - 4\xi^3 + \xi^4, \quad \phi_2 = -\frac{163}{91}\xi^2 + \frac{412}{91}\xi^3 - \frac{661}{182}\xi^4 + \xi^5.$$

将式(13)代入姿态运动方程(11), 可得

$$\left[I_3 + \gamma \left(a^2 + a + \frac{1}{3} \right) \right] \ddot{\theta} + \gamma \int_0^1 (a + \xi) \phi^T d\xi \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}. \quad (14)$$

同样, 将式(13)代入弯曲振动方程(12), 两边左乘 ϕ , 并对空间积分可得

$$\int_0^1 (a + \xi) \phi d\xi \ddot{\theta} + \int_0^1 \phi \phi^T d\xi \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_{22} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{22} = & \beta^2 \int_0^1 \phi \phi_{\xi\xi\xi}^T d\xi - \beta^2 \omega^2 \int_0^1 \phi \phi^T d\xi + \\ & \beta^2 \omega^2 \int_0^1 \phi \phi_{\xi}^T (a + \xi) d\xi - \beta^2 \omega^2 \int_0^1 \phi \phi_{\xi\xi}^T \left[a(1 - \xi) + \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \right] d\xi. \end{aligned}$$

设 $\mathbf{Z} = (\theta, \mathbf{q})^T$, 则有

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Z}} + \mathbf{K} \mathbf{Z} = \mathbf{B}_0 u, \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \left[I_3 + \gamma \left(a^2 + a + \frac{1}{3} \right) \right] & \gamma \int_0^1 (a + \xi) \phi^T d\xi \\ \int_0^1 (a + \xi) \phi d\xi & \int_0^1 \phi \phi^T d\xi \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_{22} \end{pmatrix}, u = T, B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

进一步设 $X = (Z, \mathcal{Z})^T$, 最后将方程(16)化成如下的

$$\dot{X} = AX + Bu, \quad (17)$$

其中

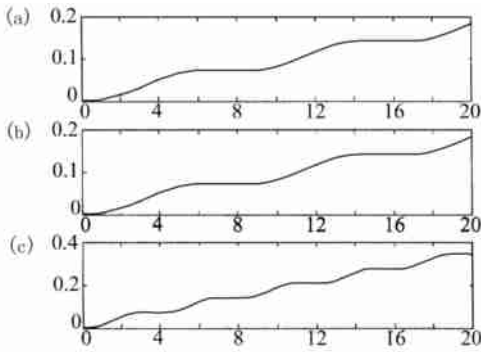
$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -M^{-1}K & \mathbf{0} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -M^{-1}B_0 \end{pmatrix},$$

这样就可以利用 Runger_Kutta 法进行仿真计算。

2.2 算例

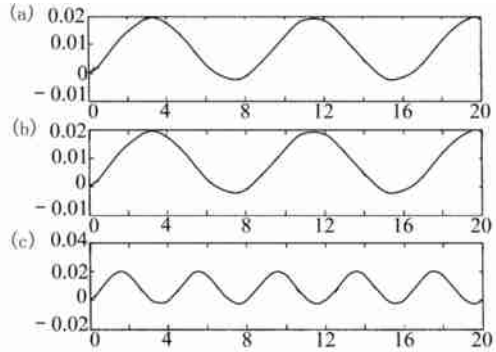
算例1 考虑柔性梁为板型的情况, 梁的横截面为 $1\text{ m} \times 0.01\text{ m}$, 初始条件为 $\theta = \dot{\theta} = 0$, $q_1 = q_2 = 0.001$, $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0.001$ 。

1) 首先取 $L = 10$, 计算 20 s 的动态响应, 计算结果如图2、图3、图4所示。图2为大范围姿态角响应曲线, 图3为姿态角速度响应曲线, 图4为柔性梁自由端位移响应曲线。



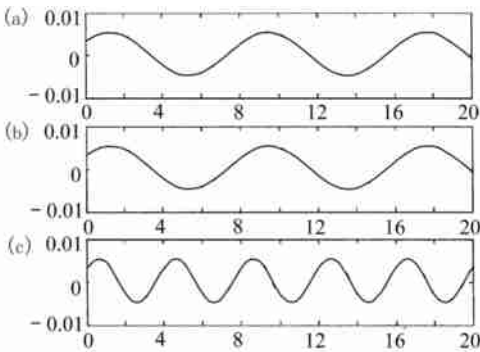
(a) Timoshenko 梁; (b) Euler 梁;
(c) 离心力效应力

图2 姿态角响应 $\theta/^\circ$



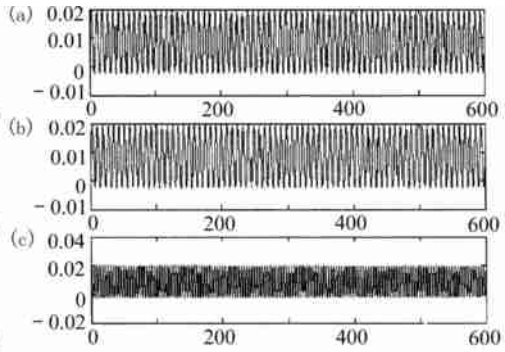
(a) Timoshenko 梁; (b) Euler 梁;
(c) 离心力效应力

图3 姿态角速度响应 $\dot{\theta}/^\circ$



(a) Timoshenko 梁; (b) Euler 梁;
(c) 离心力效应力

图4 梁自由端位移响应 v/m



(a) Timoshenko 梁; (b) Euler 梁;
(c) 离心力效应力

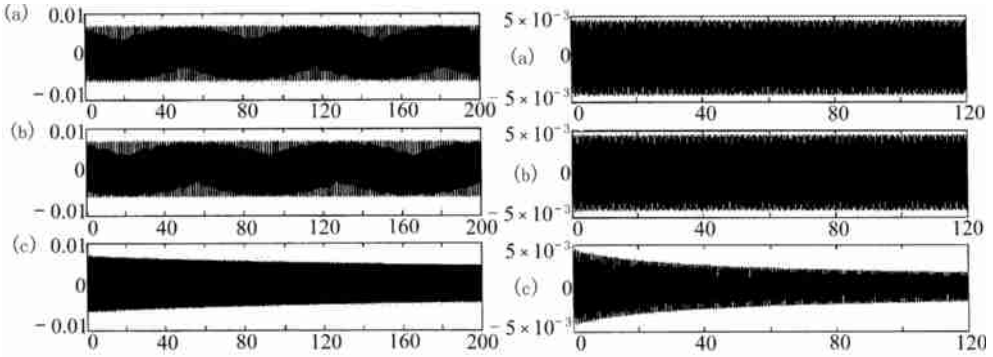
图5 梁长 $L = 10$ 角速度响应

容易看出:

① 由于刚柔耦合作用, 大范围姿态运动不可能保持严格的恒定角速度, 因此目前大多数文献以角速度为恒值作为基本假设并不科学;

②考虑离心力效应的梁模型,由于离心效应使得梁的刚度变大,从而振动频率变高与中心刚体转动相耦合,使其角速度变化频率变大。图2说明由于离心力效应,姿态角的变化幅度明显增大。

2) 为了更全面地考察离心力对姿态运动的影响特性,图5、图6、图7所示为长时间计算结果。其中图5为梁长 $L = 10$ 时姿态角速度 600 s 响应情况,图6为梁长 $L = 3$ 时姿态角速度 200 s 响应情况,图7为梁长 $L = 1.5$ 时姿态角速度 120 s 响应情况。经过对长时间的仿真计算进行比较可以看出,考虑离心力效应时角速度振动幅度有所衰减。当梁的长度较小时,考虑离心力效应的角速度振动幅度衰减变得十分明显。

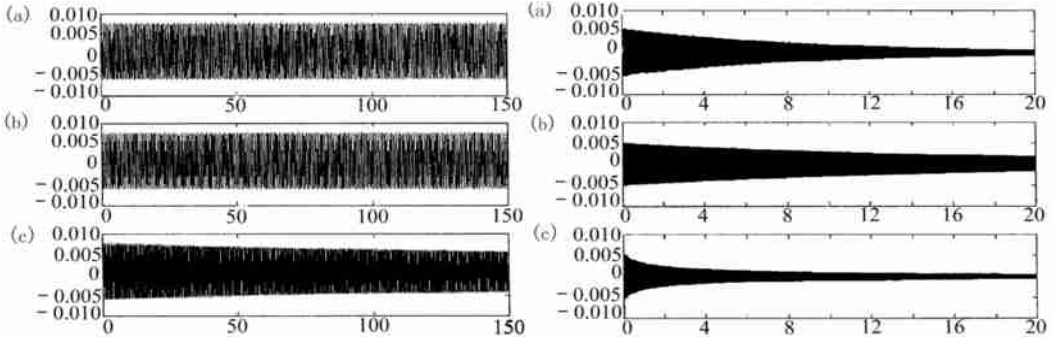


(a) Timoshenko 梁; (b) Euler 梁;
(c) 离心力效应力

6 梁长 $L = 3$ 角速度响应

(a) Timoshenko 梁; (b) Euler 梁;
(c) 离心力效应力

图7 梁长 $L = 1.5$ 角速度响应



(a) Timoshenko 梁; (b) Euler 梁;
(c) 离心力效应力

图8 梁长 $L = 10$ 角速度响应(算例2)

(a) Timoshenko 梁; (b) Euler 梁;
(c) 离心力效应力

图9 梁长 $L = 1.8$ 角速度响应(算例2)

算例2 考虑柔性梁为杆型的情况,梁的横截面为 $0.1\text{ m} \times 0.1\text{ m}$,初始条件仍然为 $\theta = \vartheta = 0$, $q_1 = q_2 = 0.001$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0.001$ 时,改变梁的长度,比较不同模型对于中心刚体转动的影响。

图8为 $L = 10$ 时的计算结果,图9为 $L = 1.8$ 时的计算结果。可见,离心力对系统姿态运动的效应与算例1完全一致。此外可以发现,当梁的长度缩短时, Timoshenko 梁模型姿态角速度的衰减速度明显快于 Euler_Bernoulli 梁模型时姿态角速度的衰减速度,这是因为柔性梁为粗短状的原因,这同工程力学经验相吻合。

3 大角度姿态机动稳定性分析

从前面的近似计算结果看出,非线性离心力对大范围姿态运动的影响是明显的,因此在姿态控制设计中考虑离心力的耦合作用是非常必要的。下面便研究计及离心力效应时姿态控制的稳定性问题。

大角度机动的目标是,对于由式(9)、(10)及(8)所描述的非线性耦合系统,给定机动角 θ_m ($\theta_m \in (-\pi, \pi]$), 要求由初始状态

$$\theta(0) = \theta(0) = \psi(0) = \psi(0) \quad (18)$$

出发,使姿态角机动到 θ_m , 同时抑制弹性振动并最终消除它,即

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \theta_m, \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\psi}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\psi}(t) = 0, \quad \forall l \in [0, L]. \end{cases} \quad (19)$$

记 $\theta_e = \theta(t) - \theta_m$, 可以证明,采用常规 PD 控制律

$$T(t) = -k_p \theta_e - k_d \dot{\theta}_e \quad (k_p > 0, k_d > 0) \quad (20)$$

能够确保上述大角度姿态机动的目标得以实现。为此引入如下的函数空间

$$\begin{aligned} L^2(0, L) &= \left\{ f: [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_0^L f^2 dl < \infty \right\}, \\ \mathcal{H}_k^1(0, L) &= \left\{ f \in L^2(0, L) \mid f, f_l, \dots, \frac{\partial}{\partial l} f \in L^2(0, L), f(0) = f_l(0) = 0 \right\}, k > 0, \\ \mathcal{H}_0 &= \left\{ (v, w) \mid v \in \mathcal{H}_0^2(0, L), w \in L^2(0, L) \right\}, \\ \mathcal{H} &= \mathbb{R}^2 \times \mathcal{H}_0. \end{aligned}$$

令 $\mathbf{Z} = (\theta_e, \dot{\theta}_e, v, \psi)^T$, 则可将受扰运动方程转换成抽象空间中 \mathcal{H} 的非线性发展方程

$$\mathbf{Z}' + \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{B}_1(\mathbf{Z}) + \mathbf{B}_2(\mathbf{Z}) = 0, \mathbf{Z}(0) = (-\theta_m, 0, 0, 0)^T, \quad (21)$$

式中 \mathbf{A} 为线性算子

$$\mathbf{A}\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_e & \frac{k_p \theta_e + k_d \dot{\theta}_e}{I_3} & \psi & \frac{EJ}{\rho I} \psi_{lll} - \frac{(R+l)(k_p \theta_e + k_d \dot{\theta}_e)}{I_3} \end{bmatrix}^T. \quad (22)$$

其定义域为

$$D(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^2 \times \left\{ (v, w)^T \mid v \in \mathcal{H}_0^4(0, L), w \in \mathcal{H}_0^2(0, L) \right\},$$

$\mathbf{B}_1(\mathbf{Z}), \mathbf{B}_2(\mathbf{Z})$ 为非线性算子

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} 0 & f(\mathbf{Z}) & 0 & -(R+l)f(\mathbf{Z}) \end{bmatrix}^T, \quad (23)$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\theta_e^2 \left\{ v + \frac{\partial}{\partial l} \left[v \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] \right] \right\} \end{bmatrix}^T, \quad (24)$$

而 $f(\mathbf{Z})$ 为非线性函数

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Z}) &= \\ &= \frac{\left\{ \rho I \int_0^L [f(R+l)^2 + v^2] dl + \rho I \int_0^L \left[(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v^2 dl \right\} (k_p \theta_e + k_d \dot{\theta}_e)}{I_3 I_3} + \\ &= \frac{2\rho I \theta_e \int_0^L v \dot{\psi} dl + \rho I \int_0^L (R+l) \dot{v} dl}{I_3} \end{aligned} \quad (25)$$

在 \mathcal{H} 中赋予能量内积

$$\langle \mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j \rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left\{ k_p a_i a_j + I_3 b_i b_j + \rho A \int_0^L [w_i + b_i(R+l)][w_j + b_j(R+l)] dl + EJ \int_0^L \left[\frac{\partial}{\partial l^2} v_i \right] \left[\frac{\partial}{\partial l^2} v_j \right] dl \right\}, \quad (26)$$

其中 $\mathbf{Z}_i (a_i, b_i, v_i, w_i)^T \in \mathcal{H} (i = 1, 2)$, \mathcal{H} 成为一个 Hilbert 空间, \mathcal{H} 中相应的能量范数为

$$\|\mathbf{Z}\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \left\{ k_p a^2 + I_3 b^2 + \rho A \int_0^L [w + b(R+l)]^2 dl + EJ \int_0^L v^2 dl \right\}. \quad (27)$$

基于能量范数定义如下形式的 V 函数

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} k_p \theta_e^2 + K + U = \\ & \|\mathbf{Z}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L (\dot{\theta})^2 dl + \frac{1}{2} \rho A \dot{\theta}^2 \int_0^L \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v_l^2 dl = \\ & \frac{1}{2} k_p \theta_e^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \left\{ (\dot{\theta})^2 + [v + \dot{\theta}(R+l)]^2 \right\} dl + \\ & \frac{1}{2} EJ \int_0^L v_l^2 dl + \frac{1}{2} \rho A \dot{\theta}^2 \int_0^L \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v_l^2 dl. \end{aligned} \quad (28)$$

引理 1 函数 V 沿着系统(21)的经典解是关于时间 t 的非增函数.

证明 将式(28)微分

$$\begin{aligned} \dot{V} = & k_p \theta_e \dot{\theta}_e + I_3 \dot{\theta}_e \ddot{\theta}_e + \rho A \int_0^L \dot{\theta}_e v (\dot{\theta}_e v + \dot{\theta}_e \dot{v}) dl + \\ & \rho A \int_0^L [v + \dot{\theta}_e(R+l)] [\dot{v} + \ddot{\theta}_e(R+l)] dl + \\ & EJ \int_0^L v_l \dot{v}_l dl + \rho A \dot{\theta}_e \ddot{\theta}_e \int_0^L \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v_l^2 dl + \\ & \rho A \dot{\theta}_e^2 \int_0^L \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v_l \dot{v}_l dl. \end{aligned} \quad (29)$$

将上式第 3、4、6 项的被积函数展开,并按带因子 $\dot{\theta}_e$ 的项进行整理可得

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \left\{ I_3 \ddot{\theta}_e + 2\rho A \int_0^L v_l \dot{v}_l dl + \rho A \int_0^L (R+l) \dot{v}_l dl + k_d \dot{\theta}_e \right\} \dot{\theta}_e + \\ & \int_0^L \rho A [v + \dot{\theta}_e(R+l) - v \dot{\theta}_e] \dot{v}_l dl + EJ \int_0^L v_l \dot{v}_l dl. \end{aligned} \quad (30)$$

注意到姿态运动方程(9)和控制律式(20)的形式,可将上式化为

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -k_d \dot{\theta}_e^2 + \int_0^L \rho A [v + \dot{\theta}_e(R+l) - v \dot{\theta}_e] \dot{v}_l dl + EJ \int_0^L v_l \dot{v}_l dl + \\ & \rho A \dot{\theta}_e^2 \int_0^L \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v_l \dot{v}_l dl. \end{aligned} \quad (31)$$

对上式右侧最后一项运行分部积分,并利用边界条件(8),得

$$\begin{aligned} \rho A \dot{\theta}_e^2 \int_0^L \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v_l \dot{v}_l dl = \\ \rho A \dot{\theta}_e^2 \int_0^L \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v_l dv_l = \\ \rho A \dot{\theta}_e^2 \int_0^L \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v_l \dot{v}_l \Big|_0^L - \\ \rho A \dot{\theta}_e^2 \int_0^L \left\{ \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] v_l \right\} = \end{aligned}$$

$$- \rho A \theta_c^2 \int_0^L \psi \frac{\partial}{\partial l} \left\{ \left[R(L-l) + \frac{1}{2}(L^2 - l^2) \right] \psi \right\} dl, \quad (32)$$

对第3项运行两次分部积分, 同样可得

$$\begin{aligned} EJ \int_0^L \psi_l \psi_{ll} dl &= EJ \int_0^L \psi_{ll} \psi dl = EJ \psi_l \psi \Big|_0^L - EJ \int_0^L \psi_l \psi_l dl = \\ &0 - EJ \int_0^L \psi \psi_{ll} dl = - EJ \int_0^L \psi_{ll} \psi dl = \\ &- EJ \psi_{ll} \psi \Big|_0^L + EJ \int_0^L \psi \psi_{lll} dl = 0 + EJ \int_0^L \psi_{lll} \psi dl = \\ &EJ \int_0^L \psi \psi_{lll} dl. \end{aligned} \quad (33)$$

将式(32)与式(33)均代入式(31), 并利用梁的弯曲振动方程(10), 最后得到

$$\psi = -k_d \theta_c^2 \leq 0. \quad (34)$$

可见函数 V 沿着由式(9)、(10)及(8)构成的系统, 也就是式(21)的经典解是关于时间 t 的非增函数。证毕。

定义子空间

$$\mathcal{N} = \left\{ \mathbf{Z} \in \mathcal{N} \mid \psi = 0 \right\}, \quad (35)$$

基于上述引理, 可以证明如下定理^[10]

定理1 当 $\mathbf{Z}(0) = (-\theta_m, 0, 0, 0)^T$ 时, 系统(21)的经典解 $\mathbf{Z}(t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{Z}(t)\|_{\mathcal{N}}^2 = 0. \quad (36)$$

定理1意味着 PD 控制律(20)能够保证大角度机动任务得以实现, 相应的闭环系统是渐近稳定的。

4 结 论

考虑离心力效应对大范围姿态运动的影响, 同传统混合坐标模型相比是更加精细的描述。本文的计算结果表明, 离心力对姿态运动特性的影响是显著的, 它必将使姿态角速度发生变化, 而且变化频率比更简单的 Euler-Bernoulli 梁模型要快; 而当柔性附件的长度缩短时, 姿态角速度又会更快地衰减下来。这些都是更接近工程实际的客观现实。为了研究离心力效应对姿态控制的影响, 本文选择能量函数形式的 Liapunov 函数, 证明了 PD 控制律能确保系统的姿态稳定性, 这是比边界控制律^[6]更宽松的结果。

[参 考 文 献]

- [1] 马兴瑞, 王本利, 苟兴宇, 等著. 航天器动力学——若干问题进展及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [2] Kane T R, Ryan R R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1987, 10(2): 139—150.
- [3] Likins P W. Finite element appendage equations for hybrid coordinate dynamic analysis[J]. J of Solids and Structures, 1972, 8: 709—731.
- [4] Sakawa Y, LUO Zheng_hua. Modeling and control of coupled bending and torsional vibration of flexible beams[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(9): 970—977.
- [5] Enrique Barbieri, Umit Ozguner. Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link[J]. Transaction of ASME, 1988, 110(6): 416—421.

- [6] M-Lrgul Ö. Orientation and stabilization of a flexible beam attached to a rigid body: planar motion[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1991, **36**(8): 953—962.
- [7] Bloch A.M. Stability analysis of a rotating flexible system[J]. Acta Appli Mathe, 1989, **15**(8): 211—234.
- [8] 肖世富,陈滨. 一类刚柔耦合系统柔体模态分析的特征[J]. 中国空间科学技术, 1998, **18**(4): 8—13.
- [9] 胡振东,洪嘉振. 刚柔耦合系统动力学建模及分析[J]. 应用数学和力学, 1999, **20**(10): 1087—1093.
- [10] 李智斌. 刚柔控耦合系统动态特性分析及其实验研究[D]. 博士论文,北京:清华大学,2002, 111—116.

Model of Centrifugal Effect and Attitude Maneuver Stability of a Coupled Rigid_Flexible System

LI Zhi_bin^{1,2}, WANG Zhao_lin², WANG Tian_shu², LIU Ning²

(1. Beijing Institute of Control Engineering, P. O. Box 2729,

Beijing 100080, P. R. China;

2. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: The influences of nonlinear centrifugal force to large overall attitude motion of coupled rigid_flexible system was investigated. First the nonlinear model of the coupled rigid_flexible system was deduced from the idea of “centrifugal potential field”, and then the dynamic effects of the nonlinear centrifugal force to system attitude motion were analyzed by approximate calculation; At last, the Liapunov function based on energy norm was selected, in the condition that only the measured values of attitude and attitude speed are available, and it is proved that the PD feedback control law can ensure the attitude stability during large angle maneuver.

Key words: Coupled rigid_flexible system; nonlinear; rigid_body motion; elastic vibration; attitude stability