

文章编号: 1000_0887(2005) 05_0577_08

基于旋量理论的开链机器人 动力学 Kane 方程研究*

刘武发^{1,2}, 龚振邦², 汪勤恂²

(1. 郑州大学 机械工程学院, 郑州 450002;
2. 上海大学 机电与自动化学院, 上海 200072)

(马兴瑞推荐)

摘要: 首先介绍了旋量的基本理论、指数积及雅可比矩阵。在此基础上定义了基于旋量理论的主动动力旋量、惯性力旋量、偏速度旋量、广义主动力及广义惯性力等概念, 之后推导出了基于旋量理论的开链机器人动力学 Kane 方程, 再者阐明了偏速度旋量几何计算, 最后以示例验证结论的正确性。

关键词: 旋量理论; 偏速度旋量; 开链机器人; 动力学 Kane 方程

中图分类号: TP242.3 文献标识码: A

引 言

机器人动力学是机器人动态控制和机械设计的基础。其动力分析可应用理论力学理论和分析动力学中的动力学方程。常用的有牛顿-欧拉方程、拉格朗日方程、罗斯方程、阿沛耳方程及凯恩(Kane)方程等。应用不同的动力学方法研究同一对象的同一种运动形态, 最终的结果是相同的, 但形式不同, 计算速度和计算量相差很大, 他们是能否实现实时控制的关键^[1]。

牛顿-欧拉方程中包含机器人关节处的约束反力, 要消去它们形成机器人运动和驱动力矩关系的显式较烦, 主要用于力分析和机构设计; 而拉格朗日方程、罗斯方程、阿沛耳方程均为偏微分方程, 计算量大且速度低; Kane 方程是分析动力学近 30 年新进展之一, 其形式简单, 由加、减、乘运算即可完成计算, 计算速度高, 并且便于用计算机建立和求解复杂系统的动力学方程, 实施实时控制。

理查德·摩雷(美), 李泽湘(中), 夏恩卡·萨思特(美)在其专著《机器人操作的数学导论》^[2]中汇集了基于旋量理论及指数变换的机器人研究新领域的最新文献及著者从事这方面研究工作的成果。该专著在动力学方面对拉格朗日方程和牛顿-欧拉方程作了详细地论述并给出了应用事例。

本文根据旋量理论及基于旋量理论的机器人运动学, 结合质点系动力学 Kane 方程, 推出了基于旋量理论的开链机器人动力学 Kane 方程, 最后以示例验证结论的正确性。

* 收稿日期: 2003_11_08; 修订日期: 2004_12_24

作者简介: 刘武发(1963—), 男, 河南新蔡县人, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 86_21_56331402; E_mail: liuwufa@zzu.edu.cn)。

1 刚体旋量理论及指数积^[2]

1.1 旋量和力螺旋

刚体从一位置到另一位置的运动, 可以通过绕某一轴线的转动加上平行于该直线的移动得到. 设其转动轴线为 $\omega \in \mathcal{R}^3$, 且 $\|\omega\| = 1$, q 为轴上一点. p 为刚体上不在转动轴线上的一点, 且以单位速度 v 平行于 ω 移动, 引入如下 4×4 矩阵

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ \mathbf{0} & \omega \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{4 \times 4},$$

其中 $v = -\omega \times q$, $\hat{\omega}$ 为反对称矩阵, 设 $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$, 则

$$\hat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

引入(Vee)运算符 \vee , 定义

$$\xi = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & v \\ \mathbf{0} & \omega \end{bmatrix}^{\vee} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{6 \times 1},$$

$\hat{\xi}$ 称为运动旋量, ξ 为运动旋量 $\hat{\xi}$ 的运动旋量坐标.

作用在刚体上的广义力包括移动分量(纯力)和作用于一点的转动分量(纯力矩), 可用一个六维矢量表示

$$F = \begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} \quad (f \in \mathcal{R}^3, \tau \in \mathcal{R}^3),$$

称力_力矩的组合为力旋量.

1.2 刚体速度和伴随变换

设 A 为空间坐标系(惯性坐标系), B 为物体坐标系, B 系与 A 系共原点并绕 A 旋转. 设 R_{ab} 为 B 转动轨迹的曲线, 将点 B 在系中的坐标变换到 A 系中坐标的刚体变换, 用运动旋量的指数形式表示

$$g_{ab} = \exp(\hat{\xi}\theta) = e^{\hat{\xi}\theta} = \begin{bmatrix} e^{\omega\theta} & (I - e^{\omega\theta})(\omega \times v) + \omega\omega^T v\theta \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{4 \times 4} \quad (\omega \neq 0).$$

将刚体空间速度定义为

$$V_{ab}^s = g_{ab} \dot{g}_{ab}^{-1}, \quad V_{ab}^s = \begin{bmatrix} v_{ab}^s \\ \omega_{ab}^s \end{bmatrix}. \quad (1)$$

将刚体物体速度定义为

$$V_{ab}^b = g_{ab}^{-1} \dot{g}_{ab}, \quad V_{ab}^b = \begin{bmatrix} v_{ab}^b \\ \omega_{ab}^b \end{bmatrix}. \quad (2)$$

空间速度与物体速度关系为

$$V_{ab}^s = \begin{bmatrix} R_{ab} & \hat{p}_{ab} R_{ab} \\ \mathbf{0} & R_{ab} \end{bmatrix} V_{ab}^b.$$

上式中将物体速度运动旋量坐标变换到空间速度运动旋量坐标的 6×6 矩阵称为关于 g 伴随变换, 记为 A_{dg} , 则

$$A_{dg} = \begin{bmatrix} R & \hat{p}R \\ \mathbf{0} & R \end{bmatrix}, \tag{3}$$

A_{dg} 可逆, 其逆阵为

$$A_{dg}^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T \hat{p} \\ \mathbf{0} & R^T \end{bmatrix}. \tag{4}$$

1.3 指数积与雅可比矩阵

对开链机器人的运动副从 1 到 n 编号, 并从机架开始对连杆编号, 使得第 i 个运动副联接连杆 $i-1$ 和 i , 连杆 0 即为机器人的机座, 连杆 n 与末端执行器刚性联接^[3].

基础坐标系 S 固连于连杆 0, 工具坐标系 T 固连于末端执行器. 定义机器人的参考位形为机器人对应于 $\theta = 0$ 的位形, 并用 $g_{st}(0)$ 表示机器人位于参考位形时 T 到 S 刚体变换. 第 i 个关节运动旋量坐标 ξ_i 对应于除第 i 个关节外所有其它关节均固定于 $\theta_j = 0$ 位置时第 i 个关节的旋量运动. 转动关节或移动关节运动旋量坐标 ξ_i 分别为

$$\xi_i = \begin{bmatrix} -\omega_i \times \mathbf{q}_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \text{ 或 } \xi_i = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

其中 $\omega_i \in \mathcal{R}^3$ 是运动旋量轴线上的单位矢量, $\mathbf{q}_i \in \mathcal{R}^3$ 为轴线上的任一点. $\mathbf{v}_i \in \mathcal{R}^3$ 是指向移动方向的单位矢量. 机器人运动学正解的指数积公式^{[2], [4]} 如下

$$g_{st}(\theta) = e^{\xi_1 \theta_1} e^{\xi_2 \theta_2} \dots e^{\xi_n \theta_n} g_{st}(0). \tag{6}$$

如果机器人各关节沿路径 θ 运动, 那么末端执行器也就沿 $g_{st}(\theta)$ 运动, 则末端执行器的空间瞬时速度, 根据式(1)可用如下运动旋量表示

$$\mathbf{V}_{st}^s = g_{st}^s(\theta) g_{st}^{-1}(\theta) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_i} \theta_i \right] g_{st}^{-1}(\theta) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_i} g_{st}^{-1}(\theta) \right] \theta_i, \tag{7}$$

由式(7)知末端执行器的速度与各关节的速度成线性关系. 所以

$$\mathbf{V}_{st}^s = \mathbf{J}_{st}^s(\theta) \theta;$$

其中

$$\mathbf{J}_{st}^s(\theta) = \left[\left[\frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_1} g_{st}^{-1} \right]^v \quad \dots \quad \left[\frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_n} g_{st}^{-1} \right]^v \right]. \tag{8}$$

称式(8)的矩阵 $\mathbf{J}_{st}^s(\theta) \in \mathcal{R}^{6 \times n}$ 为机器人的空间雅可比矩阵, 对于某一位形, 它将关节速度矢量映射为对应的末端执行器速度.

若 ξ_i 为单位旋量, 则机器人空间雅可比矩阵式(8)变为

$$\mathbf{J}_{st}^s(\theta) = [\xi_1^v \quad \xi_2^v \quad \dots \quad \xi_n^v], \tag{9}$$

$$\xi_i^v = \left[\frac{\partial g_{st}}{\partial \theta_i} g_{st}^{-1} \right]^v = A_{de}^{\xi_1 \theta_1} \dots e^{\xi_{i-1} \theta_{i-1}} \xi_i. \tag{10}$$

由式(10)知, 空间雅可比矩阵的第 i 列 ξ_i^v 就是由参考位形变换到机器人当前位形的第 i 个关节的运动旋量坐标. 根据此结构特性, “通过观察” 就可计算 $\mathbf{J}_{st}^s(\theta)$.

根据式(2), 机器人的物体雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{st}^b(\theta)$ 满足如下关系

$$\mathbf{V}_{st}^b = (g_{ab}^{-1} g_{ab})^v = \mathbf{J}_{st}^b(\theta) \theta;$$

同理可得物体雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_{st}^b(\theta) = [\xi_1^+ \quad \xi_2^+ \quad \dots \quad \xi_n^+], \tag{11}$$

$$\xi_i^+ = A_{d}^{-1} e^{\xi_1 \theta_1} \dots e^{\xi_{i-1} \theta_{i-1}} \xi_i. \tag{12}$$

物体雅可比矩阵的各列对应于当前位形在工具坐标系中表示的关节运动旋量坐标。

2 Kane 方程简介^[5, 6]

设系统由 N 个质点组成, 系统具有 k 个自由度。刚体 ν 作一般运动时, 其质心 C 的速度可以表示为

$$\mathbf{V}_C = \sum_{j=1}^k \mathbf{V}_{C_j} u_j + \mathbf{V}_{C_0} \quad (\nu = 1, 2, \dots, N), \quad (13)$$

上式中 u_j 前的矢量系数 \mathbf{V}_{C_j} 是刚体 ν 的质心 C 相对于广义速率 u_j 的偏速度。

刚体 ν 的角速度可表示为

$$\boldsymbol{\omega}_\nu = \sum_{j=1}^k \boldsymbol{\omega}_{\nu j} u_j + \boldsymbol{\omega}_{\nu 0} \quad (\nu = 1, 2, \dots, N). \quad (14)$$

则广义速率 u_j 前的系数矢量 $\boldsymbol{\omega}_{\nu j}$ 称为刚体 ν 关于广义速率 u_j 的偏角速度。

将作用于刚体上所有主动 F_ν 向质心 C 简化, 得主动力主矢 \mathbf{R}_C 和主动力主矩 \mathbf{M}_C , 广义主动力

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{R}_C \cdot \mathbf{V}_{C_j} + \mathbf{M}_C \cdot \boldsymbol{\omega}_{\nu j} \quad (\nu = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, k). \quad (15)$$

同样将作用刚体上所有惯性力向质心 C 简化, 得惯性力主矢 \mathbf{R}_C^* 和惯性力主矩 \mathbf{M}_C^* , 广义惯性力为

$$\mathbf{F}_j^* = \mathbf{R}_C^* \cdot \mathbf{V}_{C_j} + \mathbf{M}_C^* \cdot \boldsymbol{\omega}_{\nu j} \quad (\nu = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, k). \quad (16)$$

Kane 方程为

$$\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_j^* = \mathbf{0} \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (17)$$

它们表示, 一个有 k 个自由度的理想约束系统, 对应于各广义速率 u_j 的广义主动力 \mathbf{F}_j 和广义惯性力 \mathbf{F}_j^* 之和分别等于零。

3 基于旋量理论的 Kane 方程研究

3.1 定义

基于 1.3 节开链机器人运动副、连杆的编号, 并在第 i 连杆的质心固联物体坐标系 L_i , 根据上面的内容, 定义如下概念:

定义 1 连杆 i 上主动力旋量 \mathbf{F}_{wi} 为作用于连杆质心的主动力主矢 \mathbf{R}_{Ci} 和主动力对质心的主矩 \mathbf{M}_{Ci} 组合。即

$$\mathbf{F}_{wi} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ci} \\ \mathbf{M}_{Ci} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

定义 2 连杆 i 上惯性力旋量 \mathbf{F}_{wi}^* 为作用于连杆质心的主动力主矢 \mathbf{R}_{Ci}^* 和主动力对质心的主矩 \mathbf{M}_{Ci}^* 组合。即

$$\mathbf{F}_{wi}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ci}^* \\ \mathbf{M}_{Ci}^* \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (19)$$

定义 3 刚体质心的偏速度和刚体的偏角速度组合称为刚体的偏速度旋量。即

$$\mathbf{V}_{pj} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C_j} \\ \boldsymbol{\omega}_{\nu j} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

3.2 偏速度旋量

开链机器人的自由度数为其关节数。第 i 个连杆质心的物体坐标系为 L_i , 设其相对于机器人基础坐标系 S 的初始位形为 $g_{SL_i}(0)$, 根据式 (6), 则物体坐标系 L_i 相对于 S 的当前位形为

$$g_{SL_i}(\theta) = e^{\xi_1 \theta_1} \dots e^{\xi_i \theta_i} g_{SL_i}(0), \quad (21)$$

则第 i 杆质心的物体速度为

$$\mathbf{V}_{SL_i}^b = g_{SL_i}^{-1}(\theta) \mathfrak{g}_{SL_i}(\theta) = g_{SL_i}^{-1}(\theta) \sum_{j=1}^i \left[\frac{\partial g_{SL_i}}{\partial \theta_j} \right] \Theta_j = \sum_{j=1}^i \left[g_{SL_i}^{-1}(\theta) \frac{\partial g_{SL_i}}{\partial \theta_j} \right] \Theta_j, \quad (22)$$

根据运动旋量坐标定义, 有

$$\mathbf{V}_{SL_i}^b = (\mathbf{J}_{SL_i}^b(\theta) \Theta)^{\vee}, \quad \mathbf{V}_{SL_i}^b = \mathbf{J}_{SL_i}^b(\theta) \Theta,$$

其中 $\Theta = [\Theta_1 \quad \Theta_2 \quad \dots \quad \Theta_n]^T$,

$$\mathbf{J}_{SL_i}^b(\theta) = \begin{bmatrix} \left[g_{SL_i}^{-1}(\theta) \frac{\partial g_{SL_i}}{\partial \theta_1} \right]^{\vee} & \dots & \left[g_{SL_i}^{-1}(\theta) \frac{\partial g_{SL_i}}{\partial \theta_i} \right]^{\vee} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

又

$$g_{SL_i}^{-1}(\theta) \left[\frac{\partial g_{SL_i}}{\partial \theta_j} \right] = g_{SL_i}^{-1}(0) e^{-\xi_i \theta_i} \dots e^{-\xi_j \theta_j} (\hat{\xi}_j) e^{\xi_j \theta_j} \dots e^{\xi_i \theta_i} g_{SL_i}(0), \quad \text{则}$$

$$\xi_{ij}^+ = \begin{cases} \left[g_{SL_i}^{-1}(\theta) \frac{\partial g_{SL_i}}{\partial \theta_j} \right]^{\vee} = \begin{cases} A_{d(e^{\xi_j \theta_j} \dots e^{\xi_i \theta_i} g_{SL_i}(0))}^{-1} \xi_j & (j \leq i), \\ 0 & (j > i) \end{cases} \\ 0 & (j > i) \end{cases} \quad (24)$$

所以 ξ_{ij}^+ 为相对于第 i 连杆坐标系的第 j 个瞬时关节运动旋量坐标。 $\mathbf{J}_{SL_i}^b(\theta)$ 为相对于 $g_{SL_i}(\theta)$ 的物体雅可比矩阵, 其形式为

$$\mathbf{J}_{SL_i}^b(\theta) = [\xi_{i1}^+ \quad \dots \quad \xi_{ij}^+ \quad 0 \quad \dots \quad 0]. \quad (25)$$

如果选取开链机器人的各关节速率为广义速率, 则

$$\Theta = [\Theta_1 \quad \Theta_2 \quad \dots \quad \Theta_n]^T$$

为广义速率矢量。根据偏速度定义, 由 $\mathbf{V}_{SL_i}^b = \mathbf{J}_{SL_i}^b(\theta) \Theta$ 知, 连杆 i 的物体雅可比矩阵 $\mathbf{J}_{SL_i}^b(\theta)$ 为偏速度旋量矩阵, 所以 $\mathbf{J}_{SL_i}^b(\theta)$ 的第 1 列至第 i 列分别为机器人连杆 1 至连杆 i 的偏速度旋量, 即 $\xi_{i1}^+ \dots \xi_{ij}^+$ 。

3.3 基于旋量的 Kane 方程

定义 4 开链机器人相对于某一偏速度旋量的广义主动力等于各连杆的主动力旋量与偏速度旋量的点积之和。即

$$\mathbf{F}_j = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{wi} \cdot \xi_{ij}^+ \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (26)$$

定义 5 开链机器人相对于某一偏速度旋量的广义惯性力等于各连杆的惯性力旋量与偏速度旋量的点积之和。即

$$\mathbf{F}_j^* = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{wi}^* \cdot \xi_{ij}^+ \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (27)$$

最后得到基于旋量理论的开链机器人动力学 Kane 方程为

$$\mathbf{F}_j + \mathbf{F}_j^* = \mathbf{0} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (28)$$

$$\text{即} \quad \sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ci} \\ \mathbf{M}_{Ci} \end{bmatrix} \cdot \xi_{ij}^+ \right) + \sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ci}^* \\ \mathbf{M}_{Ci}^* \end{bmatrix} \cdot \xi_{ij}^+ \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (29)$$

也即方程组

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ci} \\ \mathbf{M}_{Ci} \end{bmatrix} \cdot \xi_{i1}^+ + \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ci}^* \\ \mathbf{M}_{Ci}^* \end{bmatrix} \cdot \xi_{i1}^+ = 0, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ci} \\ \mathbf{M}_{Ci} \end{bmatrix} \cdot \xi_{in}^+ + \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{Ci}^* \\ \mathbf{M}_{Ci}^* \end{bmatrix} \cdot \xi_{in}^+ = 0 \end{cases} \quad (30)$$

4 应用示例

4.1 偏速度旋量计算

解上述 Kane 方程, 主要计算内容有 3 部分: 各连杆的主动旋量, 各连杆的惯性力旋量及各连杆的偏速度旋量。式(24)表明, $J_{SL_i}^b(\theta)$ 的各列对应于连杆 i 瞬时位形在连杆 L_i 坐标系中表示的各关节运动旋量坐标。

如图 1 三连杆机器人, 如各连杆的质量及分别关于 x, y, z 轴的惯性矩已知, 求各关节驱动力矩。取运动旋量轴线上的点 q_1, q_2 及 q_3 , 连杆 L_i 坐标轴方向与连杆惯性主轴方向一致, 如图 2 为关节角旋转后投影。

当关节 1 旋转 θ_1 后, q_1 点在 L_1 物体坐标系中的坐标及运动旋量方向 ω_1' 分别为

$$\mathbf{q}_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_0 - r_0 \end{bmatrix}, \quad \omega_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

根据式(5), 关节 1 运动旋量坐标为

$$\xi_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathbf{q}_1' \times \omega_1' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以, 连杆 1 的物体雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}_{SL_1}^b(\theta) = [\xi_1^+ \quad \xi_2^+ \quad \xi_3^+] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

当关节 2 分别旋转 θ_2 后, 可以算出 q_1, q_2 在 L_2 坐标系中的坐标及运动旋量方向, 可算出连杆 2 的物体雅可比矩阵 $J_{SL_2}^b(\theta)$; 同理算出 $J_{SL_3}^b(\theta)$, 分别如下

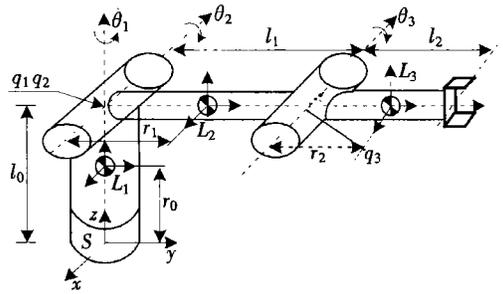


图 1 三杆开链机器人

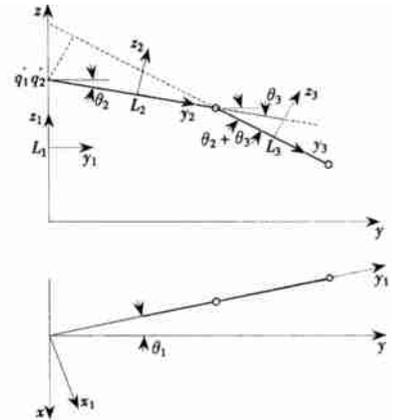


图 2 关节角旋转后投影

$$J_{SL_2}^b(\theta) = [\xi_{21}^+ \quad \xi_{22}^+ \quad \xi_{23}^+] = \begin{bmatrix} -r_1c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -s_2 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{SL_3}^b(\theta) = [\xi_{31}^+ \quad \xi_{32}^+ \quad \xi_{33}^+] = \begin{bmatrix} -l_1c_2 - r_2c_{23} & 0 & 0 \\ 0 & l_1s_3 & 0 \\ 0 & -r_2 - l_1c_3 & -r_2 \\ 0 & -1 & -1 \\ -s_{23} & 0 & 0 \\ c_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

其中 $c_2 = \cos\theta_2$, $c_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$, 其它类推。

根据旋量的开链机器人动力学 Kane 方程(29)或(30), 得如下 3 个方程

$$\sum_{i=1}^3 \begin{Bmatrix} R_{Ci} \\ M_{Ci} \end{Bmatrix} \cdot \xi_{i1}^+ + \sum_{i=1}^3 \begin{Bmatrix} R_{Ci}^* \\ M_{Ci}^* \end{Bmatrix} \cdot \xi_{i1}^+ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 \begin{Bmatrix} R_{Ci} \\ M_{Ci} \end{Bmatrix} \cdot \xi_{i2}^+ + \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} R_{Ci}^* \\ M_{Ci}^* \end{Bmatrix} \cdot \xi_{i2}^+ = 0,$$

$$\sum_{i=1}^3 \begin{Bmatrix} R_{Ci} \\ M_{Ci} \end{Bmatrix} \cdot \xi_{i3}^+ + \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} R_{Ci}^* \\ M_{Ci}^* \end{Bmatrix} \cdot \xi_{i3}^+ = 0.$$

把各连杆的主动动力向质心简化可得其的主动动力旋量, 根据连杆质心加速度及连杆角加速度递推公式, 可求得各连杆质心加速度及连杆角加速度, 从而求出各连杆的惯性力旋量。把各连杆的主动动力旋量及惯性力旋量代入上面 3 个方程, 求解可得各关节的驱动力矩。

5 结 论

1) 本文给出了主动动力旋量、惯性力旋量、偏速度旋量等概念的定义, 并推导出了基于旋量理论的开链机器人动力学 Kane 方程。

2) 用上述基于旋量理论的开链机器人动力学 Kane 方程, 求解参考文献[2]的例 4.3 三杆机器人动力学, 例 4.4 理想化 SCARA 机器人的动力学, 结论完全一致。

3) 从该动力学方程推导的过程及应用示例可知, 求解该方程仅需加、减、乘运算, 更适合于用计算机建立和求解开链机器人动力学方程, 和传统 Kane 动力学方程相比, 其计算效率高低的定量计算比较复杂, 正在研究。

4) 由于篇幅所限未能给出示例的详细求解过程。

[参 考 文 献]

[1] 龚振邦, 汪勤恣, 钱晋武, 等. 机器人机械设计[M]. 北京: 电子工业出版社, 1995, 132—190.
 [2] 理查德·摩雷(美), 李泽湘(中), 夏恩卡·萨斯特(美). 机器人操作的数学导论[M]. 徐卫良, 钱瑞明译. 北京: 机械工业出版社, 1998, 11—101.
 [3] Brockett R W, Stokes A, Park F. A geometrical formulation of the dynamical equations describing

- kinematic chains[A]. In: IEEE Robotics and Automation Society Ed. IEEE International Conference on Robotics and Automation [C]. USA: IEEE Computer Society Press, 1993, 637—641.
- [4] Park F C. Computational aspects of the product of exponentials formula for robot kinematics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1994, **39**(3): 643—647.
- [5] 陈文良. 分析动力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1991.
- [6] 格林伍德 DT(美). 经典动力学[M]. 孙国琨 译. 北京: 科学出版社, 1982.

Investigation on Kane Dynamic Equations Based on Screw Theory for Open Chain Manipulators

LIU Wu_fa^{1,2}, GONG Zhen_bang², WANG Qin_que²

(1. College of Mechanical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, P. R. China;

2. Mechatronical Engineering and Automation School, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: First, screw theory, product of exponential formulas and Jacobian matrix are introduced. Then definitions are given about active force wrench, inertial force wrench, partial velocity twist, generalized active force, and generalized inertial force according to screw theory. After that Kane dynamic equations based on screw theory for open chain manipulators have been derived. Later on how to compute the partial velocity twist by geometrical method is illustrated. Finally the correctness of conclusions is verified by example.

Key words: screw theory; partial velocity twist; open chain manipulator; Kane dynamic equation