

文章编号: 1000_0887(2005) 05_0614_07

有限变形弹性杆中的几何非线性波^{*}

郭建刚¹, 周丽军², 张善元¹

(1. 太原理工大学 应用力学研究所, 太原 030024;

2. 天津工程师范学院 机械系, 天津 300222)

(程昌钧推荐)

摘要: 利用有限变形理论的 Lagrange 描述, 借助非保守系统的 Hamilton 型变分原理, 导出了描述弹性杆中几何非线性波的波动方程。为了使非线性波动方程有稳定的行波解, 计及了粘性效应引入的耗散和横向惯性效应导致的几何弥散。运用多重尺度法将非线性波动方程简化为 KdV-Burgers 方程, 这个方程在相平面上对应着异宿鞍-焦轨道, 其解为振荡孤波解。如果略去粘性效应或横向惯性, 方程将分别退化为 KdV 方程或 Burgers 方程, 由此得到孤波解或冲击波解, 它们在相平面上对应着同宿轨道或异宿轨道。

关键词: 非线性波; 有限变形; 粘性效应; 横向惯性效应; 多尺度法

中图分类号: O347.4 文献标识码: A

引言

固体介质中非线性波的一些新现象如激波、孤波等, 由于其呈现出的许多重要特性而日益为研究者们所关注。文献[1]至文献[6]从理论上分析了弹性细杆中激波和孤波的形成机理以及它们的传播特性。文献[7]从实验上验证了杆、板等固体结构中孤波的存在。激波和孤波是非线性效应和耗散效应、弥散效应相互抑制而形成的稳定传播的行波。其中非线性效应主要包括由于本构关系的非线性所导致的物理非线性和由于有限变形所导致的几何非线性。以往的研究工作大部分都是针对物理非线性, 根据构造波动方程的需要, 在本构关系中人为地加入了一些非线性项。本文主要讨论几何非线性问题, 引起非线性的有限变形的应变-位移关系是恒定的。在连续介质力学中, 有两种描述有限变形的的方法, 即 Lagrange 描述法和 Euler 描述法。由于用 Euler 描述的有限变形的运动学关系很复杂, 所以本文采用 Lagrange 描述法, $X = (X, Y, Z)$ 为 Lagrange 坐标。

1 波动方程

考虑一无限长, 均匀的等截面细杆, 杆的密度为 ρ_0 。因为杆足够细, 所以假定各物理量是

* 收稿日期: 2004_06_04; 修订日期: 2004_11_30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472076); 山西省自然科学基金资助项目(20031011, 20011003)

作者简介: 郭建刚(1975—), 男, 博士, 从事非线性动力学;

张善元(联系人, Tel: + 86_351_6010918; Fax: 86_351_6041237; E_mail: syzhang@public.ty.sx.cn)。

X 和 t 的函数。假定杆只在 X 方向存在正应力 T_{XX} , 不发生剪切变形, 则非零的应变分量只有 X 、 Y 、 Z 方向的正应变分量 E_{XX} 、 E_{YY} 、 E_{ZZ} , 且存在关系 $E_{YY} = -\nu E_{XX}$, $E_{ZZ} = -\nu E_{XX}$, ν 为泊松比。

杆足够细, 所以杆的侧向位移分量 U_Y 、 U_Z 和纵向位移分量 U_X 相比是小量, 那么可以假定杆只在纵向存在有限变形的几何关系, 即

$$E_{XX} = \frac{\partial U_X}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_X}{\partial X} \right)^2, \quad (1)$$

而侧向位移分量为

$$U_Y = -\nu E_{XX}, \quad U_Z = -\nu E_{XX}, \quad (2)$$

问题被简化为一维非线性波的传播问题。

计入粘性效应, 采用 Kelvin-Voigt 体本构方程

$$T_{XX} = K E_{XX} + \eta \frac{\partial E_{XX}}{\partial t}, \quad (3)$$

其中 K 为弹性系数, η 为粘性系数。

根据非保守系统的 Hamilton 型变分原理

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta D dt = 0, \quad (4)$$

其中 L 为 Lagrange 函数, D 为粘性耗散功率。进一步, (4) 式又可写为

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} (f_i - \rho \dot{U}_i) \delta U_i d\tau dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_S T_i \delta U_i d\Sigma dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} T \delta E d\tau dt = 0, \quad (5)$$

其中 f_i 、 T_i 分别为体力和面力, $T = T_{XX}$, $E = E_{XX}$ 。

把式 (1)、(2) 和 (3) 代入式 (5) 中, 并略去 U_X 的下标, 则可得

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} f \delta U d\tau dt - \rho_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \delta U d\tau dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_S T \delta U d\Sigma dt - \\ & \rho_0 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \nu^2 (X^2 + Y^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] \frac{\partial (\delta U)}{\partial X} d\tau dt - \\ & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\tau} \left\{ K \left[\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] + \eta \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] \right\} \frac{\partial (\delta U)}{\partial X} d\tau dt = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

对 (6) 式应用分部积分后, 可导出计入粘性和横向惯性效应时几何非线性波的波动方程和杆端应力型边界条件

$$\begin{aligned} & \left[K \left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \eta \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} + \rho_0 \nu^2 R^2 \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial t^2} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \eta \left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial t} + \\ & \rho_0 \nu^2 R^2 \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial t} \right] + f = \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T = & K \left[\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \right] + \eta \left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} + \\ & \rho_0 \nu^2 R^2 \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (8)$$

其中 R 为极回转半径。

不计体力时, 波动方程 (7) 可以进一步化简为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C_0^2 \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\eta}{K} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} + \frac{\nu^2 R^2}{C_0^2} \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial t^2} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\eta}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial t} +$$

$$v^2 R^2 \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial t} \right], \quad (9)$$

其中 $C_0^2 = K/\rho_0$ 为线性波速,

$$C^2 = C_0^2 \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\eta}{K} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} + \frac{v^2 R^2}{C_0^2} \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial t^2} \right]$$

为非线性波速, 显然它与非线性效应、粘性效应和横向惯性效应有关。

在(9)式中, 令 $v = 0$, 得到几何非线性和粘性效应共同作用时的波动方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C_0^2 \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\eta}{K} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\eta}{\rho_0} \left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial t}. \quad (10)$$

在(9)式中, 令 $\eta = 0$ 得到几何非线性和横向惯性效应共同作用时的波动方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C_0^2 & \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{v^2 R^2}{C_0^2} \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial t^2} \right] \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \\ & v^2 R^2 \left[\left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^4 U}{\partial X^2 \partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial t} \frac{\partial^3 U}{\partial X^2 \partial t} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

在(9)式中, 令 $\eta = 0, v = 0$, 则可得计粘性和横向惯性效应时几何非线性波的波动方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C_0^2 \left(1 + \frac{\partial U}{\partial X} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}. \quad (12)$$

2 方程的稳态解及定性分析

下面利用摄动理论中的多尺度法给出非线性波动方程的稳态解。设方程的解为右行波的形式, 令 $\xi = t - X/C_0$ 为快变尺度, $\tau = \varepsilon$ 为慢变尺度(或取 $s = \varepsilon X$ 为慢变尺度), 其中 ε 为小量。假定粘性较弱, 且直杆又相当细, 故令 $\varepsilon\mu = \eta/K, \varepsilon\beta = v^2 R^2/C_0^2$ 。同时, 设方程具有小的、但为有限幅值的解为

$$U = \varepsilon U_1(\xi, \tau) + \varepsilon^2 U_2(\xi, \tau) + \dots \quad (13)$$

把(13)式应用于波动方程(9), 并略去高阶小量 $o(\varepsilon^3)$, 整理后, 可得

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{2C_0} \frac{\partial U_1}{\partial \xi} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} = \frac{\mu}{2} \frac{\partial^3 U_1}{\partial \xi^3} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^4 U_1}{\partial \xi^4}. \quad (14)$$

若令

$$F = -\frac{\partial U_1}{\partial \xi}, \quad y = -2C_0 \xi, \quad \gamma = 2\mu C_0^2, \quad \delta = 4\beta C_0^3 \quad (15)$$

显然 $\gamma > 0, \delta > 0$, 则(14)式又可以化为

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + F \frac{\partial F}{\partial y} = \gamma \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \delta \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}. \quad (16)$$

由变换(15)以及 $\xi = t - X/C_0, \tau = \varepsilon$ 可以看出

$$F = -\frac{\partial U_1}{\partial \xi} = -\frac{\partial U_1}{\partial t}, \quad (17)$$

因此, 方程(16)是描述一维非线性弹性杆内纵向速度波传播的广义 KdV-Burgers 方程。

在方程(16)中令 $\delta = 0$, 即忽略几何弥散效应时, 可得经典的 Burgers 方程

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + F \frac{\partial F}{\partial y} - \gamma \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (\gamma > 0). \quad (18)$$

在方程(16)中令 $\gamma = 0$, 即忽略粘性耗散效应时, 可得经典的 KdV 方程

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + F \frac{\partial F}{\partial y} + \delta \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0 \quad (\delta > 0). \quad (19)$$

取变换 $\zeta = y - C^* \tau$, $F = F(\zeta)$ 并把它代入到 KdV_Burgers 方程(16)中, 则方程(16)可变换为常微分方程

$$\delta \frac{d^2 F}{d\zeta^2} = \gamma \frac{dF}{d\zeta} - \frac{1}{2}(F^2 - 2C^* F - 2A), \quad (20)$$

其中 A 为积分常数, $F^2 - 2C^* F - 2A = 0$ 有两个实根 F_1 和 F_2 , 且

$$F_1 = C^* + \sqrt{C^{*2} + 2A}, \quad (21)$$

$$F_2 = C^* - \sqrt{C^{*2} + 2A}. \quad (22)$$

下面分别讨论这三类方程的稳态解及其在相平面上的轨迹:

i) 当 $\delta = 0$, $\gamma \neq 0$ 时, 可得方程(18)的激波解

$$F(\zeta) = \frac{F_1 + F_2}{2} - \frac{F_1 - F_2}{2} \tanh \frac{F_1 - F_2}{4\gamma} \zeta, \quad (23)$$

其中 F_1, F_2 由式(21)和(22)给出.

它是一个稳态的行波解, 对应的图像是连接两个渐近态 F_1 和 F_2 的光滑曲线(图1), 此时几何非线性和粘性耗散效应达到平衡.

由式(20)~(23)可得激波的波速 $C^* = (F_1 + F_2)/2$, 波的振幅 $a = (F_1 - F_2)/2 = \sqrt{C^{*2} + 2A}$, 波的宽度 $d = 4\gamma/(F_1 - F_2) = 2\gamma/a$. 可见波的传播速度与振幅有关, 这是非线性波的一个重要特征. 另外不难看出, 波的宽度 d 与耗散项 γ 成正比, 而与振幅 a 成反比. 也就是说, 耗散有使波形平缓的作用, γ 增大, 波形被拉平; γ 减小, 波形变陡. 粘性耗散和非线性平衡时, 得到稳态的激波解. 该激波在相平面上的轨迹是从不稳定鞍_结点 F_1 出发, 终止于稳定鞍_结点 F_2 的异宿轨道(图2).

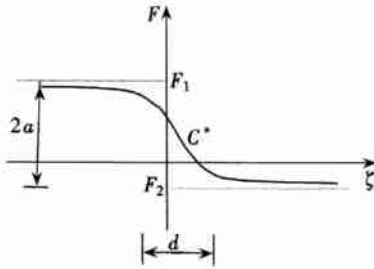


图1 Burgers 方程的激波解

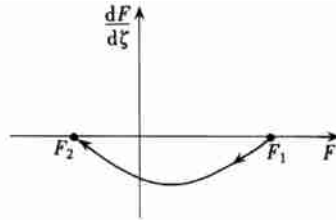


图2 Burgers 方程的相轨迹

ii) 当 $\gamma = 0$, $\delta \neq 0$ 时, 可得方程(19)的孤波解

$$F = F_2 + (F_1 - F_2) \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{F_1 - F_2}{12\delta}} (y - C^* \tau), \quad (24)$$

其中 F_1, F_2 由式(21)和(22)给出.

孤波的图像是一个“钟”形光滑曲线(图3), 它有许多特殊性质, 例如这种波在形成过程中, 伴随有能量的集聚, 且在其传播过程中, 波形和波速保持不变, 波幅不衰减. 孤波在与其它孤波碰撞后, 波形、速度、幅值均保持不变. 这些性质在文献[3]中有证明. 孤波的波速 $C^* = (F_1 + 2F_2)/3$, 波振幅 $a = 3(C^* - F_2)$, 波宽度 $d = \sqrt{12\gamma/a}$. 显然, 孤波的传播速度 C^* 与振幅 a 有关, 振幅 a 越大, 波速 C^* 也越大. 孤波的宽度 d 与振幅 a 的平方根成反比, 与弥散系数 δ 的平方根成正比, δ 增大, 波形将变得平缓. 可见弥散效应对非线性有抑制作用, 横向惯性和非线性平衡时, 得到稳态的孤波解. 该孤波在相平面上的相迹是鞍点 F_2 出发, 又回到

鞍点 F_2 的同宿轨道(图4)•

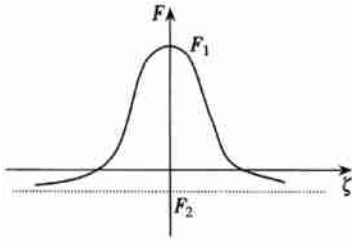


图3 KdV方程的孤波解

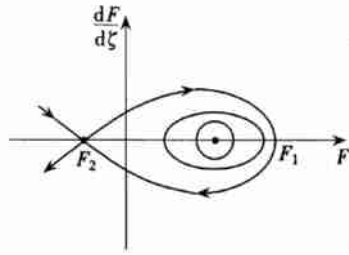


图4 KdV方程的相轨迹

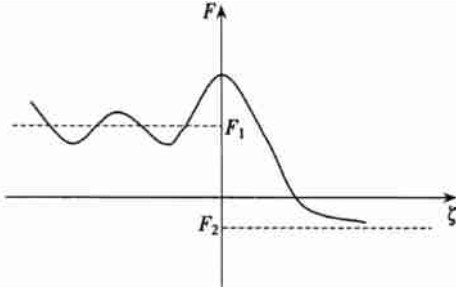


图5 KdV_Burgers方程的振荡孤波解

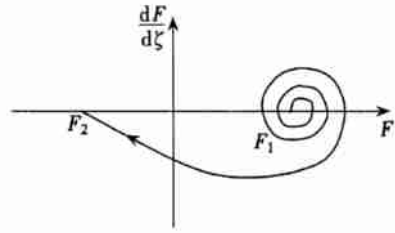


图6 当 $0 \leq v^2 \leq 4\delta \sqrt{C^{*2} + 2A}$ 时, KdV_Burgers方程的相轨迹

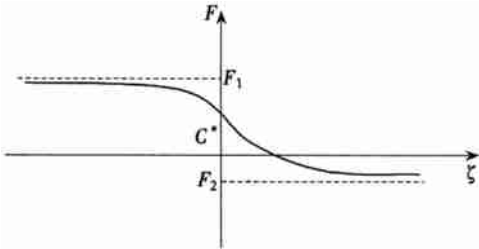


图7 KdV_Burgers方程的激波解

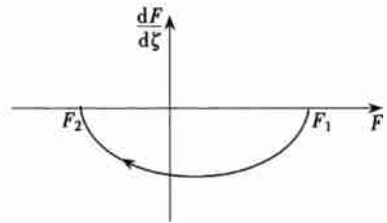


图8 当 $v^2 \geq 4\delta \sqrt{C^{*2} + 2A}$ 时, KdV_Burgers方程的相轨迹

ii) 当 $v \neq 0, \delta \neq 0$ 时, 根据粘性耗散项和横向惯性项的相对强弱, 分别可得 KdV_Burgers 方程(16) 的激波解和振荡孤波解•

当 $0 < v^2 \leq 4\delta \sqrt{C^{*2} + 2A}$ 时, 方程(16) 有振荡孤波解

$$F = \begin{cases} F_1 + \frac{F_1 - F_2}{2} e^{(\nu/2\delta)\zeta} \cos \alpha\zeta & (\zeta \leq 0), \\ F_2 + \frac{3(F_1 - F_2)}{2} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{F_1 - F_2}{8\delta}} \zeta & (\zeta \geq 0), \end{cases} \quad (25)$$

其中, F_1, F_2 由式(21) 和(22) 给出, $\alpha = \sqrt{(F_1 - F_2)/(2\delta) - (v/(2\delta))^2}$. 此时, 横向惯性效应项占优势, 而耗散项相对较弱. 二者和非线性共同作用的结果, 就形成图5 所示的振荡的孤波. 它在相平面上的相轨迹是由不稳定焦点 F_1 出发, 回到鞍点 F_2 的鞍焦异宿轨道(图6)•

当 $v^2 \geq 4\delta \sqrt{C^{*2} + 2A}$ 时, 方程(16) 有激波解

$$F = F_1 - \frac{3v^2}{25\delta} \left(1 + \tanh \frac{v}{10\delta} \zeta \right)^2, \quad (26)$$

其中 F_1 、 F_2 由式(21) 和(22) 给出。此时, 耗散项占优势, 横向惯性效应项相对较弱, 二者与非线性效应共同作用的结果, 就得到图7 所示的激波。它在相平面上的相轨迹是由不稳定结点 F_1 出发, 回到鞍点 F_2 的异宿轨道(鞍结异宿轨道)(图8)。

3 结 论

1) 利用非保守系统的 Hamilton 型变分原理, 导出了计入粘性耗散和横向惯性效应时一维有限变形弹性杆中非线性波的波动方程以及相应的应力型边界条件。

2) 利用多尺度法对导出的非线性波动方程进行变换, 得到经典的 KdV_Burgers 方程、KdV 方程以及 Burgers 方程。对这三类方程解的分析表明: 当不计横向惯性效应, 且弹性细杆中的几何非线性和粘性耗散达到平衡时, 有稳定传播的激波; 当不计粘性效应, 且弹性细杆中的几何非线性和横向惯性效应达到平衡时, 有稳定传播的孤波; 当弹性细杆中的这3 种因素共存且达到平衡时, 根据粘性效应和几何弥散效应的相对强弱, 有振荡孤波和激波存在。

3) 定性分析的结果表明: 激波、孤波和振荡孤波在相平面上的轨迹分别相应于异宿轨道、同宿轨道以及鞍_焦异宿轨道。

[参 考 文 献]

- [1] 朱位秋. 弹性杆中的非线性波[J]. 固体力学学报, 1980, 16(2): 247—253.
- [2] 张善元, 杨绍瑞. 非线性弹性细杆中的定常波[J]. 太原理工大学学报, 1985, 1(4): 33—43.
- [3] ZHANG Shan_yuan, ZHUANG Wei. The strain solitary waves in a nonlinear elastic rod[J]. Acta Mechanica Sinica, 1987, 1(3): 62—72.
- [4] ZHANG Shan_yuan, GUO Jian_gang, ZHANG Nian_mei. The dynamics behaviors and wave properties of finite deformation elastic rods with viscous or geometrical dispersive effects[A]. In: ICNM_IV[C], Shanghai, Aug 2002, 728—732.
- [5] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves[M]. New York: John Wiley & Sons, 1974, 96—113.
- [6] Bhatnager P L. Nonlinear Waves in One Dimensional Dispersive System[M]. Oxford: Clarendon Press, 1979, 61—88.
- [7] Alexander M S. Strain Solitons in Solid and How to Construct Them[M]. New York: Chapman & Hall/CRC, 2001, 1—198.
- [8] 刘式适, 刘式达. 物理学中的非线性方程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002, 127—201.

Geometrical Nonlinear Waves in Finite Deformation Elastic Rods

GUO Jian_gang¹, ZHOU Li_jun², ZHANG Shan_yuan¹

(1. Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology,
Taiyuan 030024, P. R. China;

2. Department of Mechanical Engineering, Tianjin University
of Technology and Education, Tianjin 300222, P. R. China)

Abstract: By using Hamilton type variation principle in non-conservation system, the nonlinear equation of wave motion of an elastic thin rod was derived according to Lagrange description of finite deformation theory. The dissipation caused due to viscous effect and the dispersion introduced by transverse inertia were taken into consideration so that steady traveling wave solution can be obtained. Using multi-scale method the nonlinear equation is reduced to a KdV-Burgers equation which corresponds with saddle-spiral heteroclinic orbit on phase plane. Its solution is called the oscillating solitary wave or saddle-spiral shock wave. If viscous effect or transverse inertia is neglected, the equation is degraded to classical KdV or Burgers equation. The former implies a propagating solitary wave with homoclinic on phase plane, the latter means shock wave and heteroclinic orbit.

Key words: nonlinear wave; finite deformation; viscous effect; transverse inertia effect; multi-scale method