

文章编号: 1000\_0887(2005) 06\_0637\_08

# 多等级交通流 LWR 模型中的非线性 波描述与 WENO 数值逼近\*

张 鹏<sup>1,2</sup>, 戴世强<sup>1</sup>, 刘儒勋<sup>2</sup>

(1. 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072;  
2. 中国科学技术大学 数学系, 合肥 230026)

(我刊编委戴世强来稿)

摘要: 证明了交通流多等级 LWR(Lighthill\_Whitham\_Richards) 模型的双曲性质, 并根据交通流的特征给出关于其非线性波的描述, 主要包括车流通过激波和稀疏波时密度和速度的单调性变化。由于方程组没有显式的特征分解, 所以引入具有高分辨和高精度的 WENO(weighted essentially non-oscillatory) 格式作数值模拟, 得到与理论描述完全一致的数值结果。

关键词: 双曲性; 特征线; 交通波; WENO 格式

中图分类号: TB126 文献标识码: A

## 引 言

交通流研究已经引起数学、力学和物理学领域的学者广泛注意(参看文献[1, 2])。早在 1950 年代, Lighthill 和 Whitham<sup>[3]</sup>, 以及 Richards<sup>[4]</sup> 首先提出了交通流的连续介质理论——LWR 模型。这一理论对以后的研究产生了非常深远的影响, 人们对此作了大量研究, 进行了各种各样的阐释和推广, 并应用于交通工程实践。最近, G. C. K. Wong 和 S. C. Wong<sup>[5]</sup> 将 LWR 模型加以推广, 建立了多种车型混流的运动学模型。对于这一模型的诸多理论性质我们仍未看到其它相关的研究工作。在数值模拟方面, 文献[5] 采用 Lax-Friedrichs 格式, 给出了一些数值结果。然而, 由于该格式具有较大的数值粘性效应, 由于模型方程的复杂性, 可能曲解方程本来所固有的性质。

针对以上问题, 本文对于上述推广的 LWR 模型方程的一些基本理论问题进行讨论, 并引入了 WENO(weighted essentially non\_oscillatory) 数值逼近方法进行数值模拟。

在第 1 节中, 我们证明在所有车型的车流密度非空, 以及总车流密度不达到饱和的条件下, 模型方程是严格双曲的; 即模型方程的特征值为互不相等的实数, 从而保证了存在一组完备的、线性无关的特征向量。

在第 2 节, 我们讨论以上特征速度的明确的物理意义, 并且描述了各型车流密度在邻近激

\* 收稿日期: 2003\_12\_30; 修订日期: 2005\_02\_05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472064; 10371118); 中国博士后科学基金资助项目(2003034254); 国家教育部博士点专项基金资助项目(20040280014)

作者简介: 张鹏(1963—), 男, 云南个旧人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86\_21\_56331458; Fax: + 86\_21\_36033087; E\_mail: pengzhang@ustc.edu.cn)。

波和稀疏波的单调性变化。基于所得到的一组关于特征速度和各型车流速度之间的不等关系,我们断言某一特定车型的车流同时受到来自上游和下游波动的影响,但速度最快的车型将只受到来自下游的影响。同时,我们揭示了波或者说特征线传播的形成是由于在不同车型车流之间存在超车,不过源于第一族特征线的传播却与超车无关,它实际反映了交通流波动的基本特征。

在第3节中,我们引入WENO数值格式,并将其应用于模型方程的数值计算。由于不可能对模型方程进行特征分解,所以这一格式采用了Lax-Friedrichs流通量分解。关于这一数值格式的详尽的讨论,可参考文献[6~9]。在这一节,我们对数值算例的设计首先考虑与理论分析的结果相印证,其次考虑对方程的波动特征和性质的观察。

最后,在第4节中,我们对全文的讨论进行总结。

## 1 模型方程及其双曲性质

推广的LWR模型将交通中的车辆按其行驶速度能力分为 $m$ 个等级,其顺序编号由最慢车流到最快车流。模型方程为关于各型车流密度变化的运动学守恒方程:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = \mathbf{0}, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u} = (\rho_1, \dots, \rho_m)^T$ ,  $\rho_i$ 为第 $i$ 等级车流密度; $\rho$ 为混合车流的总密度,

$$\rho = \sum_{i=1}^m \rho_i,$$

而流通量函数为 $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (\rho_1 v_1(\rho), \dots, \rho_m v_m(\rho))^T$ 。以上假设了第 $i$ 级车流( $\forall i$ )的速度只依赖于总密度 $\rho$ ,由某一特定函数 $v_i(\rho)$ 确定,这一函数具有交通流模型中速度-密度关系的一般性质,即

$$v_i'(\rho) < 0, \quad v_i(0) = v_{i,f}, \quad v_i(\rho_{jam}) = 0, \quad (2)$$

其中 $v_{i,f}$ 表示第 $i$ 级车流的畅行速度, $\rho_{jam}$ 表示总密度的饱和值,即阻塞密度。

对于方程组(1),易求出Jacobi矩阵 $\mathbf{f}_u = (a_{ij})$ ,其中

$$a_{ij} = v_i \delta_{ij} + c_i, \quad c_i = \rho v_i' \leq 0, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } i = j, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

相应的特征多项式为

$$\begin{vmatrix} v_1 + c_1 - \lambda & c_1 & c_1 & \dots & c_1 & c_1 \\ c_2 & v_2 + c_2 - \lambda & c_2 & \dots & c_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m-2} & c_{m-2} & c_{m-2} & \dots & c_{m-2} & c_{m-2} \\ c_{m-1} & c_{m-1} & c_{m-1} & \dots & v_{m-1} + c_{m-1} - \lambda & c_{m-1} \\ c_m & c_m & c_m & \dots & c_m & v_m + c_m - \lambda \end{vmatrix}.$$

在上式中,对 $i = m, \dots, 2$ ,依次分别由第 $i$ 列减去第 $i-1$ 列,得到

$$\begin{vmatrix} v_1 + c_1 - \lambda & \lambda - v_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & v_2 - \lambda & \lambda - v_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m-2} & 0 & 0 & \dots & \lambda - v_{m-2} & 0 \\ c_{m-1} & 0 & 0 & \dots & v_{m-1} - \lambda & \lambda - v_{m-1} \\ c_m & 0 & 0 & \dots & 0 & v_m - \lambda \end{vmatrix} := P_m(\lambda).$$

注意到以上行列式的  $m - 1$  阶主子式正好为  $P_{m-1}(\lambda)$ , 按第  $m$  行展开后有

$$P_m(\lambda) = (v_m - \lambda)P_{m-1}(\lambda) + c_m \prod_{i=1}^{m-1} (v_i - \lambda).$$

利用这一递推关系, 不难用数学归纳法证明

$$P_m(\lambda) = (v_1 - \lambda) \cdots (v_m - \lambda) G(\lambda), \quad (3)$$

其中 
$$G(\lambda) = 1 + \frac{c_1}{v_1 - \lambda} + \cdots + \frac{c_m}{v_m - \lambda}.$$

现假设各等级车流速度按序号为从小到大的排列, 即

$$v_1(\rho) < v_2(\rho) < \cdots < v_{m-1}(\rho) < v_m(\rho), \quad \forall \rho \in [0, \rho_{\text{jam}}), \quad (4)$$

这里, 我们只考虑  $u$  为解向量区域内点的情形. 对于  $u \in D$ ,

$$D: \rho_i > 0, \rho_1 + \cdots + \rho_m = \rho < \rho_{\text{jam}}, \quad \forall i,$$

由(3)和(4), 不难验证

$$\text{sgn}(P_m(v_i)) = (-1)^i, \quad \text{sgn}(P_m(+\infty)) = (-1)^m, \quad \text{sgn}(P_m(-\infty)) = 1.$$

由介值定理, 这意味着对应于这些点特征多项式确有  $m$  个不等的实根. 若按从小到大的顺序将其记为  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , 则有

$$\lambda_1 < v_1 < \cdots < v_{i-1} < \lambda_i < v_i < \cdots < v_{m-1} < \lambda_m < v_m, \quad \text{当 } \rho > 0, \rho < \rho_{\text{jam}}. \quad (5)$$

我们指出, 某一车流密度  $\rho = 0$  以及达到饱和状态  $\rho = \rho_{\text{jam}}$  的情形, 都可以被视为以上  $u \in D$  情形的极限形态, 因此这些情形将不包括在下面的讨论和分析之中.

以上, 我们证明了方程组(1)有  $m$  个不相等的实特征值, 因此(1)为严格双曲方程组.

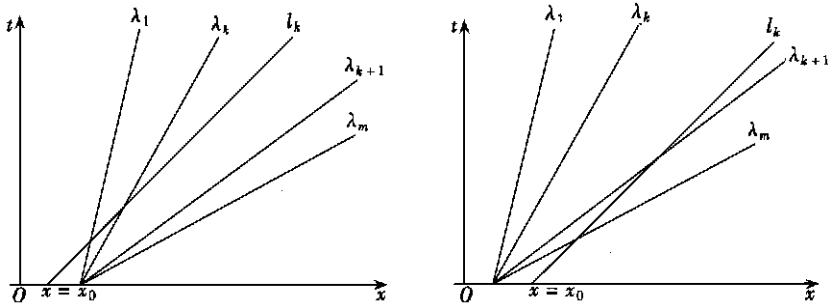
## 2 特征速度与非线性波动的物理分析

对于标量的 LWR 模型 ( $m = 1$ ), 由于方程只有一族特征线, 我们已经熟知其对于交通流的物理含义<sup>[10]</sup>. 而对于  $m > 1$  的情形, 模型方程(1)要远远复杂得多, 这是由于方程组虽然具有  $m$  个特征值, 却不能显示解出. 一般而言, 方程组的  $m$  个特征速度场将对应应有  $m$  个推广的 Riemann 不变量<sup>[10~13]</sup>, 以及相应的  $m$  个波. 这即是指, 对于一个初始的扰动, 波的传播将沿着  $m$  个不同的方向. 基于不等关系(5), 下面我们解释这  $m$  个波的物理意义.

首先, 我们有: 对  $i \leq k$ ,  $\lambda_i < v_k$  成立; 对  $i > k$ ,  $\lambda_i > v_k$  成立. 这说明前面的  $k$  族特征线以从下游传播的方式对第  $k$  级车型的车流产生影响. 同时, 另外的  $m - k$  族特征线以从上游传播的发生对第  $k$  级车型车流产生影响. 用线性化理论可以解释这些波动的影响, 如图 1 所示, 并详述如下.

在对初始密度为常态的分布进行小扰动后, 线性化的结果是使在扰动处的特征速度保持不变. 假定扰动在初始时由  $x = x_0$  处出发, 我们考察其传播对于第  $k$  等级车流的影响情况. 如图 1 所示, 直线  $l_k$  表示所考察的车流的运动轨迹. 在图 1(a) 中, 我们可以看到扰动来自下游, 而且由(5)式可见  $l_k$  将只与前  $k$  条特征线相交, 即它只对来自下游的前  $k$  个波有所反应. 相反, 在图 1(b) 中, 当扰动来自上游时,  $l_k$  将只与后  $m - k$  条特征线相交.

其次, 我们分析由  $m$  个特征速度产生的交通波所对应的物理现象. 我们断言, 特征速度  $\{\lambda_k\}_{k=2}^m$  是由第  $k$  等级车流超越第  $k - 1$  等级车流所引发的. 这是因为, 假设上述论断不对, 则必然有  $\lambda_k = v_k = v_{k-1}$ , 即以特征速度  $\lambda_k$  传播的波动与两种车流的运动同步, 事实上, 这时两种车流实为同一等级. 对这种情况, 可将方程组(1)的第  $k - 1$  个方程与第  $k$  个方程加以合并,



(a) 扰动来自下游 (b) 扰动来自上游

图 1 对第 k 级车流的扰动影响

并视  $\rho_{k-1} + \rho_k$  为新变量。这样(1)式将退化为  $(m-1) \times (m-1)$  的方程组,但仍保持原有的性质,同时特征速度  $\lambda_k$  在新的方程组中消失。

最后,注意到在不等关系(5)式中特征速度  $\lambda_1$  小于所有等级的车流速度,所以它总是以下游传播的方式对所有等级车流形成影响。这一传播与超车无关,因为即使设置  $v_1 = \dots = v_m$  而使(1)退化为单个方程,特征值  $\lambda_1$  将不会消失。此外,我们看到  $\{\lambda_k\}_{k=2}^m$  总是为正,因而不能描述形成阻塞的交通激波。

关于非线性双曲波的更加准确和完整的描述,应该是在 Riemann 问题意义下给出。然而相应的间断分解即使不是不可能,也将是十分困难,因为在  $m > 2$  时的一般情形特征值没有显式解。即使对于  $m = 2$  的情形,间断分解也将会十分复杂。有鉴于此,本文只对车流穿过激波和在稀疏波内的密度的单调性变化给出合理的描述。这些描述基于方程的严格双曲性质以及交通波的物理特征。

在 Riemann 问题中,一般而言,互不相等的特征速度  $\{\lambda_k\}_{k=2}^m$  是对应间断分解的  $m$  个波<sup>[11~13]</sup>。如果第  $k$  族特征值形成激波,则物理解应满足下面的 Lax 熵条件:

$$\bar{\lambda}_k > s_k > \bar{\lambda}_k^+, \quad \bar{\lambda}_{k+1}^+ > s_k > \bar{\lambda}_{k+1}^-, \quad (6)$$

其中  $s_k$  为激波速度,上标‘-’和‘+’分别表示被激波分隔的左边和右边的状态。由(5)式,对  $s_k$  应有类似的限定性不等关系,使得

$$v_k^\pm > s_k > v_{k-1}^\pm, \quad k \geq 2; \quad s_1 < v_1^\pm. \quad (7)$$

类似地,这里的物理含义仍然是,  $k$  激波总是超越前  $k-1$  种车流,同时被后  $m-k+1$  种车流所超越。

对于交通流问题,我们判断前  $k-1$  种车流穿过  $k$  激波后将将被压缩,从而使其密度变大、速度减小。由于(2)式,  $v_i'(\rho) < 0$ , 所以也可以判断车流的总密度  $\rho$  在过激波后为增加。综上有

$$\begin{cases} \rho_i < \rho_i^+, & \forall i \geq k; \\ \rho^- < \rho^+; v_i^- > v_i^+, & \forall i. \end{cases} \quad (8)$$

在下述的意义下,以上的论断对后  $m-k+1$  种车流仍然是正确的。如果将激波设置为静止,且规定流动的正方向为由右至左,我们看到这些车流的运动是由右侧穿过激波,在被压缩后相对速度由  $s_k - v_i^+$  变为  $s_k - v_i^-$ , 且有  $s_k - v_i^+ > s_k - v_i^- > 0 (i < k)$ 。这即是

$$\rho_i > \rho_i^-, \quad v_i^- > v_i^+, \quad \forall i < k. \quad (9)$$

注意到(8)式和(9)式的相容性,可将其合为下面的不等式:

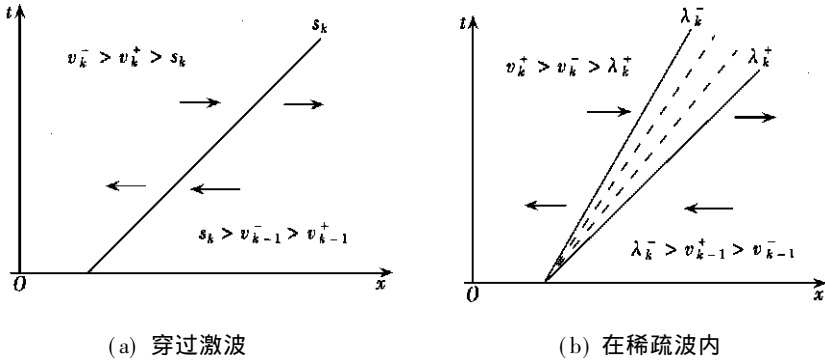


图 2 密度和速度的变化

$$\begin{cases} \rho_i^- > \rho_i^+, & \forall i < k, \\ \rho_i^- < \rho_i^+, & \forall i \geq k; \\ \rho^- < \rho^+, v_k^+ > s_k > v_{k-1}^-, \end{cases} \quad (10)$$

其中  $k = 1$  时将最后一个不等号取消。以上分析结果如图 2(a) 所示。

对于由特征线  $\lambda_k$  形成的稀疏波, 车流密度和速度变化的情况正好与激波相反, 也就是说, 各型车流在稀疏波内随流动将膨胀和加速。为简单计, 下面只给出在稀疏波两侧状态的不等关系, 它们已可反映所有密度在稀疏波区内的单调性变化。这些不等关系为

$$\begin{cases} \rho_i^- < \rho_i^+, & \forall i < k, \\ \rho_i^- > \rho_i^+, & \forall i \geq k; \\ \rho^- > \rho^+, \end{cases} \quad (11)$$

如图 2(b) 所示。

最后, 我们指出, 所讨论的交通流模型方程不存在接触间断, 否则某一  $\lambda_k$  接触间断将与不等关系(5)中的两相邻速度同步, 从而使

$$s_k = \lambda_k^\pm = v_{k-1}^\pm = v_k^\pm$$

在  $u$  的某一解向量区域连续地成立。这里  $s_k$  为接触间断速度。然而, 由前面的讨论, 这一等式只对  $u \in \partial D$  成立。

### 3 WENO 格式及其数值模拟

虽然前面已经证明了方程组(1)下有  $m$  个互不相等的特征值, 但这些特征值在  $m > 2$  时没有显式解, 所以对方程组不能进行特征分解。对于这种情况, 通常采用与差分格式相对应的 Lax-Friedrichs 流向量函数分裂, 即

$$f(u) = f^+(u) + f^-(u),$$

其中  $f^+(u) = f(u) + \alpha u$ ,  $f^-(u) = f(u) - \alpha u$ ,  $\alpha \geq \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i(u)|$ 。

以上保证了 Jacobi 矩阵  $f_u^+$  的非负定性和  $f_u^-$  的非正定性, 即

$$f_u^+ = f_u + \alpha I \geq 0, f_u^- = f_u - \alpha I \leq 0$$

在对于方程(1)的空间离散中考虑迎风, 有

$$\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x} (f_{i+1/2}^+ - f_{i-1/2}^+) + \frac{1}{\Delta x} (f_{i+1/2}^- - f_{i-1/2}^-) = 0 \quad (12)$$

现给定  $f_i^\pm = f^\pm(u_i)$ , 采用 5 阶 WENO 重构来逼近数值流通量  $f_{i\pm 1/2}^\pm$ 。进一步, 再给出初始条件, 则数值格式(12)可化为下面的常微分方程形式:

$$u_t = L(u), \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

本文采用 3 阶的 TVD\_Runge\_Kutta 时间离散。

关于以上格式的诸多细节,可参考文献[6~9],以及文献[14,15]。

在数值算例中,我们取以下的速度函数:

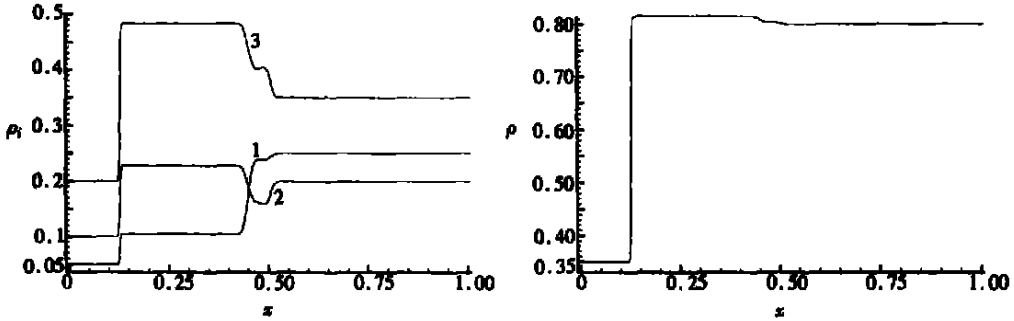
$$v_i = b_i v(\rho), \quad i = 1, \dots, m,$$

$$v(\rho) = v_f \left[ 1 - \rho / \rho_{jam} \right].$$

其中  $v_f = v_{m, f}$ ,  $b_i = v_{i, f} / v_{m, f}$ 。由(4)式,显然有

$$b_1 < b_2 < \dots < b_{m-1} < b_m = 1.$$

此外,在所有数值结果中将速度、密度、空间和时间变量分别除以  $\rho_{jam}$ 、 $v_f$ 、 $L$  和  $T$ , 其中  $L$  和  $T$  分别为计算的空间和时间长度。在讨论中,不给出单位的量也将被视为上述的无量纲变量。为简单计,所有算例中取  $v_f = 20 \text{ m/s}$ ,  $\alpha = v_f$ ; 计算中无需给出  $\rho_{jam}$  的值。



(a) 各型车流密度  $\rho_i$  (b) 总密度  $\rho$

图3 激波和稀疏波

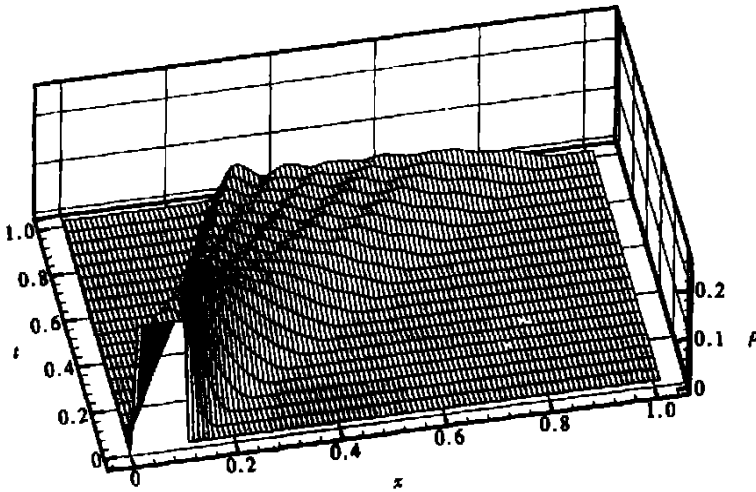


图4 初始扰动波从 5 个特征方向传播所引起的交通流总密度变化

算例 1 激波和稀疏波邻近的密度变化

取  $m = 3$ ,  $b_1 = 0.6$ ,  $b_2 = 0.8$ ,  $T = 240 \text{ s}$ ,  $L = 4000 \text{ m}$ ,  $\Delta x = 10 \text{ m}$ ,  $\Delta t = 0.6 \Delta x / \alpha$ , 初值函数设为 Riemann 问题:

$$u(x, 0) = \begin{cases} (0.05, 0.1, 0.2)^T, & \text{当 } x < 0.3, \\ (0.25, 0.2, 0.35)^T, & \text{当 } x \geq 0.3. \end{cases}$$

各型车流密度和总车流密度变化的结果分别如图3(a)和图3(b)所示。

在图3中,  $x = 0.125$ 处为1\_激波, 穿过激波后各车流密度都有所增加。大约在  $x = 0.125$  至  $x = 0.4$  之间为解变量的第2\_常数区域, 约在  $x = 0.4$  至  $x = 0.45$  之间为2\_稀疏波。在这一区域密度  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  和  $\rho$  递减, 而密度  $\rho_1$  单增。大约在  $x = 0.45$  至  $x = 0.5$  之间区域为解函数的第3\_常数区域。约在  $x = 0.5$  与  $x = 0.525$  处为3\_稀疏波, 在这一区域  $\rho_1$  和  $\rho_2$  单增,  $\rho_3$  和  $\rho$  递减。最后, 约在  $x > 0.525$  以后的部分为解函数的第4\_常数区域。

以上对于 Riemann 问题的数值模拟显然与理论分析结果(10)和(11)完全一致。

算例2 从  $m$  个方向传播的初始扰动

取  $m = 5$ ,  $b_1 = 0.4$ ,  $b_2 = 0.55$ ,  $b_3 = 0.7$ ,  $b_4 = 0.85$ ,  $L = 10\ 000$  m,  $T = 400$  s,  $\Delta x = 100$  m,  $\Delta t = 0.6\Delta x/\alpha$ 。对  $x \in (0, 0.1]$ , 取

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} (0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05)^T, & \text{当 } x \in (0, 0.1], \\ (0, 0, 0, 0, 0)^T, & \text{否则。} \end{cases}$$

数值结果分别如图4和图5所示。

如所预料, 由某一位置出发的混合车流作为初始无车流状态的一个扰动, 使交通波以  $m = 5$  个特征速度传播, 结果在图4中车流总密度出现5\_交通流波峰。图5中给出了  $T$  时刻各型车流的密度分布, 而且可以预料这些车流随时间将进一步分离, 直至完全分开。

## 4 结 论

本文证明了多车流混合推广LWR交通流模型的双曲性质。基于不等关系(5), 我们讨论了模型从理论分析和数值模拟的角度进行研究, 分析问题的物理意义, 运用WENO格式进行数值逼近。本文具体描述了密度在过激波和在稀疏波内的单调性变化, 如(10)和(11)式, 以及图3所示。

本文的结论为理解模型方程所涉及的复杂问题提供了基本的手段和工具, 并提出将来涉及以下的三个方面的相关的研究可能。

首先, 模型的合理性及其在实际中的应用是交通流建模和交通工程界人士所关心的问题, 对此本文的数值结果将可以与实际观测结果进行比较。

其次, 基于本文对于非线性波许多性质的描述和理解, 针对所讨论的模型方程也可以引入或发展其它的数值方法。

最后, 对于本文所描述的关于非线性波传播的一些性质, 仍然需要给出严格的数学证明。这不仅具有理论意义, 而且在一般意义上有助于对双曲守恒律的更深入的了解。

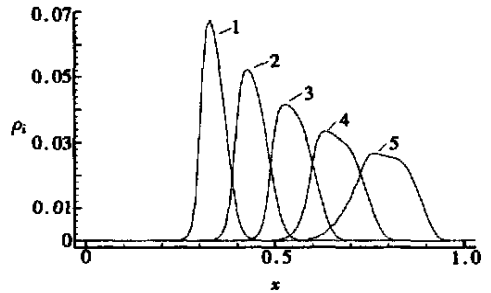


图5 初始扰动波所引起的各型车流密度变化 ( $T = 400$  s)

## [参 考 文 献]

- [1] 戴世强, 冯苏苇, 顾国庆. 交通流动力学: 它的内容、方法和意义[J]. 自然杂志, 1997, 11(4): 196—201.
- [2] Helbing D. Traffic and related self-driven many-particle systems[J]. Rev Mod Phys, 2001, 73(4): 1067—1141.

- [3] Lighthill M H, Whitham G B. On kinematics wave—II a theory of traffic flow on long crowded roads [J]. Proc Roy Soc London , Ser A, 1955, **22**: 317—345.
- [4] Richards P I. Shock waves on the highway[J]. Operations Research , 1956, **4**(2): 42—51.
- [5] Wong G C K, Wong S C. a multi\_class traffic flow model—an extension of LWR model with heterogeneous drivers[J]. Transpn Res A, 2002, **36**(9): 827—841.
- [6] Harten A, Engquist B, Osher S, et al. Uniformly high order essentially non\_oscillatory schemes III [J]. J Comput Phys, 1987, **71**(2): 231—303.
- [7] Jiang G, Shu C\_W. Efficient implementation of weighted ENO schemes[J]. J Comput Phys, 1996, **126** (1): 202—228.
- [8] Liu X\_D, Osher S, Chan T. Weighted essentially nonoscillatory schemes[J]. J Comput Phys , 1994, **115**(1): 200—212.
- [9] Shu C\_W. Lecture Notes in Mathematics\_Essentially Non\_Oscillatory and Weighted Essentially Non\_Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws[ R]. 1697, Cetraro, Italy: Springer, 1997, 329—432.
- [10] Whitham G B. Linear and Nonlinear Waves [M]. NY: John Wiley and Sons, 1974.
- [11] Lax P D. Shock Waves and Entropy. In: Zangtanello E A Ed. Nonlinear Functional Analysis [M]. New York: Academic Press, 1971.
- [12] Lax P D. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves [M]. Philadelphia: SIAM, 1973.
- [13] Toro E F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics [M]. Berlin: Springer-Verlay, 1999.
- [14] Shu C\_W. TVB uniformly high order scheme for conservation laws[J]. Mathematics of Computation , 1987, **49**(179): 105—121.
- [15] Shu C\_W. Total\_variation\_diminishing time discretizations[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computation , 1988, **9**(4): 1073—1084.

## Description and WENO Numerical Approximation to Nonlinear Waves of a Multi\_Class Traffic Flow LWR Model

ZHANG Peng<sup>1,2</sup>, DAI Shi\_qiang<sup>1</sup>, LIU Ru\_xun<sup>2</sup>

(1. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,  
Shanghai 200072, P. R. China ;

2. Department of Mathematics, University of Science & Technology of China,  
Hefei 230026, P. R. China)

**Abstract:** A strict proof of the hyperbolicity of the multi\_class LWR(Lighthill\_Whitham\_Richards) traffic flow model, as well as the descriptions on those nonlinear waves characterized in the traffic flow problems were given. They were mainly about the monotonicity of densities across shocks and in rarefactions. As the system had no characteristic decomposition explicitly, a high resolution and higher order accuracy WENO(weighted essentially non\_oscillatory) scheme was introduced to the numerical simulation, which coincides with the analytical description.

**Key words:** hyperbolicity; characteristic; traffic wave; WENO scheme