

文章编号: 1000-0887(2005) 06-0665-06

# 磁电弹性体修正后的 H<sub>R</sub> 混合变分 原理和状态向量方程\*

卿光辉<sup>1</sup>, 邱家俊<sup>2</sup>, 刘艳红<sup>1</sup>

(1. 中国民用航空学院 机电分院, 天津 300300;  
2. 天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300072)

(钟万勰推荐)

摘要: 以三维弹性体的 Hellinger-Reissner(H<sub>R</sub>)混合变分原理为基础, 建立了三维磁电弹性体修正后的 H<sub>R</sub> 混合变分原理, 通过变分运算得到了磁电弹性板的状态向量方程, 并应用该原理导出了平面内离散元素的状态向量方程, 为半解析法在磁电弹性板问题上的应用奠定了理论基础。最后指出: 纯弹性体、单一压电体或单一压磁体修正后的 H<sub>R</sub> 混合变分原理都是目前原理的特例

关键词: 磁电弹性体; 变分原理; 层合板; 状态向量方程; 半解析法

中图分类号: O343.2; O176 文献标识码: A

## 引 言

磁电弹性材料是一种新型的智能材料, 有复杂的机\_电\_磁耦合效应。近年来, 有关单一压电材料或单一压磁材料问题的文献很多, 但是研究磁电弹性层合板壳问题的文献相对较少。刘金喜等研究了横观各向同性磁电弹性材料的通解<sup>[1]</sup>。丁皓江和江爱民是磁电弹性体问题边界元法的开拓者<sup>[2]</sup>。Wang 和 Fang 等应用状态空间方法分析了四边简支磁电弹性层合板在静载荷作用下的变形问题<sup>[3]</sup>。Pan 和 Heyliger 等采用扩展的 Stroh 公式研究了四边简支磁电弹性层合板的变形和自由振动问题<sup>[4, 5]</sup>。

状态空间方法<sup>[3]</sup>和 Stroh 公式<sup>[4, 5]</sup>解析法共有的特点之一是控制方程中包含了广义位移和广义应力变量。状态空间方法和 Stroh 公式的优越性表现为: 不需引入任何有关位移和应力模式的假设; 状态空间方法与传递矩阵法联合求解板壳问题时, 不限制板或壳的厚度。

新的半解析法<sup>[6, 7]</sup>继承了状态空间解析法和传统有限元法的诸多优点: 适宜求解层合板壳复杂的边界问题; 沿板的厚度方向不需引入任何有关位移和应力模式的假设, 不限板壳的厚度; 未知量少并能保证层间应力的连续性。

姚伟岸首次开展了磁电弹性体变分原理研究<sup>[8]</sup>, 为磁电弹性体提出了以所有变量为自变量的最一般的广义变分原理。本文根据三维弹性体的 H<sub>R</sub> 混合变分原理, 建立了磁电弹性体

\* 收稿日期: 2004\_05\_08; 修订日期: 2005\_01\_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072038); 教育部博士点基金资助项目(2000005616)

作者简介: 卿光辉(1968—), 男, 湖南人, 副教授, 博士(联系人。Tel/Fax: + 86\_22\_27401727; E\_mail: qingluke@126.com)。

修正后的 H\_R 混合变分原理, 该原理是应用半解析法<sup>[6,7]</sup> 分析磁电弹性板壳问题的理论基础。

## 1 基本方程

假设磁电弹性体是各向异性的, 则其本构关系可由下面的方程给出<sup>[4]</sup>:

$$\begin{cases} \sigma_i = C_{ik} \gamma_k - e_{ki} E_k - q_{ki} H_k, \\ D_i = e_{ik} \gamma_k + \epsilon_{ki} E_k + d_{ki} H_k, \\ B_i = q_{ik} \gamma_k + d_{ki} E_k + \mu_{ki} H_k, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\sigma_{ij}$ 、 $D_i$  和  $B_i$  分别为应力、电位移和磁感应强度分量,  $\gamma_{ij}$ 、 $E_i$  和  $H_i$  分别为应变、电场强度和磁场强度分量,  $C_{ij}$ 、 $\epsilon_{ij}$  和  $\mu_{ij}$  分别为弹性刚度系数、介电常数和磁导率,  $e_{ij}$ 、 $q_{ij}$  和  $d_{ij}$  分别是压电、压磁和磁电常数。

磁电弹性体广义的应变-位移关系为:

$$\gamma_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad E_i = -\phi_{,i}, \quad H_i = -\psi_{,i}, \quad (2)$$

其中  $u_i$  为位移,  $\phi$  和  $\psi$  分别为标量电势和标量磁势。

## 2 H\_R 混合变分原理

根据弹性体的 H\_R 混合变分原理<sup>[9~11]</sup>, 磁电弹性体相应的变分公式可表示为:

$$\delta \Pi = \delta \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \iint_{\Omega} L_R dx dy \right\} dz - \delta \iint_{\Gamma_u} \mathbf{T}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}) d\Gamma - \delta \iint_{\Gamma_o} \mathbf{T}^T \mathbf{Q} d\Gamma = 0, \quad (3)$$

式中

$$\mathbf{Q} = [u \quad v \quad w \quad \phi \quad \psi]^T, \quad \mathbf{Q} = [u \quad v \quad w \quad \phi \quad \psi]^T, \\ \mathbf{T} = [T_x \quad T_y \quad T_z \quad T_e \quad T_m]^T, \quad \mathbf{T} = [T_x \quad T_y \quad T_z \quad T_e \quad T_m]^T,$$

$L_R$  是广义的 Reissner 能密度函数

$$L_R = \mathbf{P}^T (\mathbf{D}_1 + \Phi_{21}^T \mathbf{D}_2) + \frac{1}{2} \mathbf{D}_2^T \Phi_{22} \mathbf{D}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \Phi_{11} \mathbf{P} - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \Omega \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F}, \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{P} = [\alpha_x \quad \alpha_y \quad \alpha_z \quad D_x \quad B_x]^T, \quad \mathbf{D}_1 = [\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_z \quad -E_x \quad -H_x]^T, \\ \mathbf{D}_2 = [\gamma_{yx} \quad \gamma_y \quad \gamma_{xy} \quad -E_y \quad -H_y \quad -H_x \quad -H_y]^T, \\ \mathbf{F} = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad f_e \quad f_m]^T,$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho\omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\rho$  为材料密度,  $\omega$  是圆频率,  $\Phi_{ij}$  是与材料特性相关的常数矩阵。

## 3 修正后的 H\_R 混合变分原理

考虑一磁电弹性板, 厚度方向为  $z$  坐标方向, 将应变-位移关系写成向量形式:

$$\mathbf{D}_1 = \partial \mathbf{Q} / \partial z + \mathbf{G}_1 \mathbf{Q}, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{G}_2 \mathbf{Q}, \quad (5)$$

其中

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta \end{bmatrix},$$

$$\alpha = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \beta = \frac{\partial}{\partial y}.$$

将式(5)代入式(4)可得修正后的混合变分原理:

$$\delta \Pi = \delta \int_{z_1}^{z_2} \left\{ \iint_{\Omega} L_{MR} dx dy \right\} dz - \delta \iint_{\Gamma_u} \mathbf{T}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{Q}) d\Gamma - \delta \iint_{\Gamma_o} \mathbf{T}^T \mathbf{Q} d\Gamma = 0, \quad (6)$$

其中

$$L_{MR} = \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z} + \mathbf{P}^T (\mathbf{G}_1 \mathbf{Q} + \Phi_{21}^T \mathbf{G}_2 \mathbf{Q}) + \frac{1}{2} (\mathbf{G}_2 \mathbf{Q})^T \Phi_{22} \mathbf{G}_2 \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \Omega \mathbf{Q} - \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \Phi_{11} \mathbf{P} - \mathbf{Q}^T \mathbf{F}.$$

将  $L_{MR}$  表达为 Hamilton 原理形式<sup>[10]</sup>, 有

$$L_{MR} = \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z} - H, \quad (7)$$

其中  $H$  为 Hamilton 能密度函数

$$H = - \mathbf{P}^T (\mathbf{G}_1 \mathbf{Q} + \Phi_{21}^T \mathbf{G}_2 \mathbf{Q}) - \frac{1}{2} ((\mathbf{G}_2 \mathbf{Q})^T \Phi_{22} \mathbf{G}_2 \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \Omega \mathbf{Q}) + \frac{1}{2} \mathbf{P}^T \Phi_{11} \mathbf{P} + \mathbf{Q}^T \mathbf{F}.$$

#### 4 状态向量方程和 Hamilton 正则方程

以  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$  为相互独立的变量对式(6)进行变分和分部积分可得状态向量方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z} + (\mathbf{G}_1 + \Phi_{21}^T \mathbf{G}_2) \mathbf{Q} - \Phi_{11} \mathbf{P} = \mathbf{0}, \\ - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z} + (\mathbf{G}_1^T + \mathbf{G}_2^T \Phi_{21}) \mathbf{P} + (\mathbf{G}_2^T \Phi_{22} \mathbf{G}_2 - \Omega) \mathbf{Q} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (8a)$$

或 Hamilton 正则方程:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}}, \quad \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial z} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}}. \quad (8b)$$

对应于板上下表面的广义位移和广义应力边界条件分别为:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q} = [u \quad v \quad w \quad \phi \quad \psi]^T, \\ \mathbf{T} = \mathbf{T} = [n_x \sigma_x \quad n_x \sigma_y \quad n_x \sigma_z \quad n_{ex} D_x \quad n_{mx} B_x]^T.$$

在板的侧面边界上:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q} = [u \quad v \quad w \quad \phi \quad \psi]^T, \\ T_x = n_x \sigma_x + n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{xz} + n_{ex} D_x + n_{mx} B_x = T_x, \\ T_y = n_x \sigma_{xy} + n_y \sigma_y + n_z \sigma_{yz} + n_{ey} D_y + n_{my} B_y = T_y, \\ T_z = n_x \sigma_{xz} + n_y \sigma_{yz} + n_z \sigma_z + n_{ez} D_z + n_{mz} B_z = T_z, \\ T_e = n_{ex} D_x + n_{ey} D_y + n_{ez} D_z = T_e, \\ T_m = n_{mx} B_x + n_{my} B_y + n_{mz} B_z = T_m,$$

式中  $n_i$ 、 $n_{ei}$  和  $n_{mi}$  ( $i = x, y, z$ ) 分别为应力、电位移和磁感应强度的方向余弦。

## 5 离散元素的状态向量方程

考虑一极化方向为  $z$  方向的正交异性磁电弹性层合板(图 1), 用 Hamilton 等参元<sup>[6,7]</sup> (图 2) 离散任一层的  $x-y$  平面, 场函数和形函数分别为:

$$\begin{cases} u = [N(x, y)] \{ \mathbf{u}(z) \}, v = [N(x, y)] \{ \mathbf{v}(z) \}, w = [N(x, y)] \{ \mathbf{w}(z) \}, \\ \phi = [N(x, y)] \{ \Phi(z) \}, \psi = [N(x, y)] \{ \Phi(z) \}, \\ \tau_{xz} = [N(x, y)] \{ \tau_{xz}(z) \}, \tau_{yz} = [N(x, y)] \{ \tau_{yz}(z) \}, \sigma_z = [N(x, y)] \{ \sigma(z) \}, \\ D_z = [N(x, y)] \{ D_z(z) \}, B_z = [N(x, y)] \{ B_z(z) \}, \\ N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (9)$$

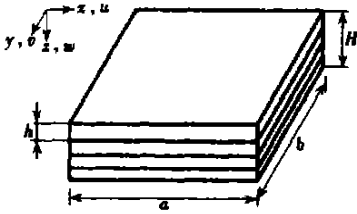


图 1 磁电弹性层合板

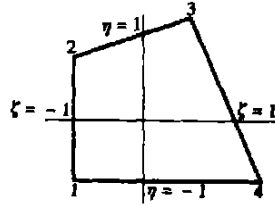


图 2 元素的局部坐标

假设应力边界条件和位移边界条件满足  $T = \bar{T}$ ,  $Q = \bar{Q}$ , 将式(9)代入式(6), 执行变分操作, 有元素的状态向量方程

$$\begin{bmatrix} M^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^e \end{bmatrix} \frac{d}{dz} \begin{bmatrix} P^e(z) \\ Q^e(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^e(0) \\ Q^e(0) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F^e(z) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中

$$M^e = \iint \text{diag}(N^T N) |J| d\xi d\eta,$$

$$P^e(z) = [\tau_{xz}(z) \quad \tau_{yz}(z) \quad \sigma_z(z) \quad D_z(z) \quad B_z(z)]^T,$$

$$Q^e(z) = [u(z) \quad v(z) \quad w(z) \quad \Phi(z) \quad \psi(z)]^T,$$

$$F^e(z) = \iint [N^T f_x(z) \quad N^T f_y(z) \quad N^T f_z(z) \quad N^T f_e(z) \quad N^T f_m(z)] |J| d\xi d\eta,$$

$$K_{11}^e = \iint \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -k_{13}N^T \alpha N & -k_{15}N^T \alpha N & -k_{17}N^T \alpha N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -k_{14}N^T \beta N & -k_{16}N^T \beta N & -k_{18}N^T \beta N \\ N^T \alpha N & N^T \beta N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -k_{9}N^T \alpha N & -k_{11}N^T \beta N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -k_{10}N^T \alpha N & -k_{12}N^T \beta N & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta,$$

$$K_{22}^e = - [K_{11}^e]^T,$$

$$K_{12}^e = \iint \begin{bmatrix} a+s & b & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ c & d+s & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & s & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_{23}\alpha N^T \alpha N + k_{25}\beta N^T \beta N & e \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & e & k_{27}\alpha N^T \alpha N + k_{28}\beta N^T \beta N \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= k_{19} \alpha \mathbf{N}^T \alpha \mathbf{N} + k_{22} \beta \mathbf{N}^T \beta \mathbf{N}, & \mathbf{b} &= k_{20} \alpha \mathbf{N}^T \beta \mathbf{N} + k_{22} \beta \mathbf{N}^T \alpha \mathbf{N}, \\ \mathbf{c} &= k_{20} \beta \mathbf{N}^T \alpha \mathbf{N} + k_{22} \alpha \mathbf{N}^T \beta \mathbf{N}, & \mathbf{d} &= k_{21} \beta \mathbf{N}^T \beta \mathbf{N} + k_{22} \alpha \mathbf{N}^T \alpha \mathbf{N}, \\ \mathbf{e} &= k_{24} \alpha \mathbf{N}^T \alpha \mathbf{N} + k_{26} \beta \mathbf{N}^T \beta \mathbf{N}, & \mathbf{s} &= -\rho \omega^2 \mathbf{N}^T \mathbf{N}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{21}^e = \iint \begin{bmatrix} k_1 \mathbf{N}^T \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_2 \mathbf{N}^T \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_3 \mathbf{N}^T \mathbf{N} & k_4 \mathbf{N}^T \mathbf{N} & k_5 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_4 \mathbf{N}^T \mathbf{N} & k_6 \mathbf{N}^T \mathbf{N} & k_7 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_5 \mathbf{N}^T \mathbf{N} & k_7 \mathbf{N}^T \mathbf{N} & k_8 \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} | \mathbf{J} | d\xi d\eta,$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \left[ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \right] \{ \mathbf{x} \} & \left[ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \right] \{ \mathbf{y} \} \\ \left[ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \right] \{ \mathbf{x} \} & \left[ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \right] \{ \mathbf{y} \} \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix},$$

其中  $k_i (i = 1, 2, 3, \dots, 28)$  是与材料参数相关的常数。

## 6 结 论

本文建立了磁电弹性体修正后的 H<sub>R</sub> 混合变分原理, 通过变分运算推导了磁电弹性板的状态向量方程和 Hamilton 正则方程, 并根据文献[6, 7]中的方法导出了  $x-y$  平面内离散元的状态向量方程, 该原理是应用半解析法分析复杂几何形状和复杂边界条件的磁电弹性层合板问题的理论基础。

很容易注意到, 如果设材料参数  $e_{\bar{j}} = q_{\bar{j}} = d_{\bar{j}} = \varepsilon_{\bar{j}} = \mu_{\bar{j}} = 0$ , 式(6)就是通常的弹性体修正后的 H<sub>R</sub> 原理<sup>[9~11]</sup>; 若材料参数  $q_{\bar{j}} = d_{\bar{j}} = \mu_{\bar{j}} = 0$  或  $e_{\bar{j}} = \varepsilon_{\bar{j}} = \mu_{\bar{j}} = 0$ , 式(6)就是单一压电体或压磁体修正后的 H<sub>R</sub> 原理。所以纯弹性体、单一压电体或压磁体修正后的混合变分原理都是磁电弹性体修正后的混合变分原理的特例。

关于数值实例及其工程应用和详细的讨论将在后继的文章中给出。

### [参 考 文 献]

- [1] 刘金喜, 王祥琴, 王彪. 横观各向同性电磁弹性固体耦合方程的一般解[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(7): 684—690.
- [2] 丁皓江, 江爱民. 横观各向同性磁电弹性体的基本解和边界积分方程[J]. 中国科学, E 辑, 2003, 33(9): 845—855.
- [3] WANG Jian\_guo, FANG Shi\_sheng, CHEN Lin\_feng. State vector approach to analysis of multilayered magneto\_electro\_elastic plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(7): 1669—1680.
- [4] Pan E. Exact solution for simply supported and multilayered magneto\_electro\_elastic plates[J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(4): 608—618.
- [5] Pan E, Heyliger P. Free vibrations of simply supported and multilayered magneto\_electro\_elastic plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 252(3): 429—442.
- [6] 唐立民, 褚致中, 邹贵平, 等. 混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和叠层板的计算[J]. 计算结构力学及其应用, 1992, 9(4): 347—360.
- [7] 欧阳华江, 钟万勰, 杨琦, 等. 一类基于 Hamilton 体系的半解析法[J]. 计算结构力学及其应用, 1993, 10(2): 129—136.

- [8] 姚伟岸. 电磁弹性固体三维问题的广义变分原理[J]. 计算力学学报, 2003, 20(4): 487—489.
- [9] Reissner E. On a variational theorem in elasticity[J]. Journal of Mathematics and Physics, 1950, 29(1): 90—95.
- [10] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995, 155—159.
- [11] Steele C R, Kim Y Y. Modified mixed variational principle and the state\_vector equation for elastic bodies and shells of revolution[J]. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59(3): 587—595.

## Modified H\_R Mixed Variational Principle for Magnetoelastoelectric Bodies and State\_Vector Equation

QING Guang\_hui<sup>1</sup>, QIU Jia\_jun<sup>2</sup>, LIU Yan\_hong<sup>1</sup>

(1. Aeronautical Mechanics & Avionics Engineering College, Civil Aviation  
University of China, Tianjin 300300, P. R. China;

2. Department of Mechanics and Engineering Measurement, School of Mechanical  
Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

**Abstract:** Based upon the Hellinger-Reissner (H\_R) mixed variational principle for three-dimensional elastic bodies, the modified H\_R mixed variational theorem for magnetoelastoelectric bodies was established. The state\_vector equation of magnetoelastoelectric plates was derived from the proposed theorem by performing the variational operations. To lay a theoretical basis of the semi-analytical solution applied with the magnetoelastoelectric plates, the state\_vector equation for the discrete element in plane was proposed through the use of the proposed principle. Finally, it is pointed out that the modified H\_R mixed variational principle for pure elastic, single piezoelectric or single piezomagnetic bodies are the special cases of the present variational theorem.

**Key words:** magnetoelastoelectric body; variational principle; laminated plates; state\_vector equation; semi-analytical solution