

文章编号: 1000_0887(2005) 06_0714_09

一种适用于非均匀地形的高阶 Boussinesq 水波模型*

王本龙, 刘 桦

(上海交通大学 工程力学系, 上海 200240)

(何友声推荐)

摘要: 推导了适用于变地形情况的高阶 Boussinesq 波浪模型。该模型采用自由表面边界条件作为时间步进方程, 利用势函数满足的 Laplace 方程的解析解形式建立了自由表面边界速度和底面边界速度之间的关系, 使得问题封闭。以 0.5 倍相对水深处的速度为基本未知量, 在对 Laplace 方程解析解进行级数求逆时保留水深梯度的高阶项, 改进了速度场的 Taylor 展开式。对于线性特性, 进行了线性浅化和 Boij 反射的验证性计算。为了检验有背景流动情况下拓展的 Boussinesq 模型的状态, 对波流相互作用问题进行了数值模拟。数值计算结果与现有理论解或其他完全势流的数值解吻合良好, 表明该模型的应用范围可以扩展到含有非均匀变化地形的问题。

关键词: 高阶 Boussinesq 方程; 波流相互作用; 变地形

中图分类号: O353.2 **文献标识码:** A

引 言

海岸工程中需要近海 $1 \text{ km}^2 \sim 10 \text{ km}^2$ 范围的波浪场资料, 一般情况下要考虑地形变化的影响。通常工程位置的波浪场记录是事先未知的。预报波浪从外海向所感兴趣的工程位置的传播已成为海岸工程研究的一个重要任务。波浪在浅水区传播过程中无疑将受到地形和背景流动的影响, 高精度地反映地形的影响是发展波浪传播模型的重要目的之一。

近年来对 Boussinesq 方程的研究主要集中在改善色散性、非线性特性以及对速度场的准确描述, 如 Madsen 和 Schaffer(1998)^[1], Gobbi, Kirby 和 Wei(2000)^[2]。在国内, 洪广文^[3]建立了任意水深变化水域非线性波传播模型, 邹志利^[4]采用摄动法在纯波动情况下的 Boussinesq 方程基础上建立了可以考虑强水流与波浪相互作用的 Boussinesq 方程, 国内的这些工作在模型发展方面是成功的, 但还没有基于高阶 Boussinesq 方程的数值波浪水槽或波浪场的算例报道。

在有背景流环境中波浪的传播也是工程界感兴趣的问题。由于局部地形变化剧烈, 浅化效应和波流相互作用导致波高和平均水位的显著变化, 给航运带来危险。Chen, Madsen 和 Bas-

* 收稿日期: 2003_07_21; 修订日期: 2004_12_03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172058); 教育部博士点研究基金资助项目(2000024817)

作者简介: 王本龙(1977—), 男, 黑龙江人, 博士研究生;

刘桦(联系人, Tel/Fax: + 86_21_62933021; E_mail: hliu@sjtu.edu.cn)。

co(1999)^[5]和 Kristensen(1995)^[6]在研究波流相互作用问题中改进了 Boussinesq 模型的色散关系,但对 kh 较大的深水波不适用。

为了改进从浅水区到深水区速度场垂直分布的精度以及线性、非线性特性, Madsen、Bingham 和 Liu(2002)^[7]提出了一个新的高阶 Boussinesq 波浪模型方程,该模型仅适用于地形缓慢变化的问题。本工作的目的是在不影响浅化梯度的前提下改善对速度场垂向分布的描述,使得该模型的应用范围从缓坡假定拓展到地形显著变化的情况。

本文首先将文献[7]级数求逆的做法进一步延伸以应用到非平底问题。第1节给出了基本的数学模型公式,包含 $\dots h$ 项的级数展开使得对缓坡假定的要求降低;第2节简要地给出了数值离散方程和算法;第3节给出了验证性数值实验,包括线性浅化效应、Booij 反射和波流相互作用;最后一节总结了本项工作的内容。

1 理论基础

这里假定流体无粘、流动无旋。直接从自由表面的运动学边界条件和动力学边界出发^[7]或者将欧拉方程投影到自由表面^[8],可以得到以下2个方程

$$\eta_t - w + \dots \eta \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1a)$$

$$\mathbf{V}_t + g \dots \eta + \dots \left[\frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} - \frac{w}{2}(1 + \dots \eta \cdot \dots \eta) \right] = 0, \quad (1b)$$

$$\text{其中 } \mathbf{V} \equiv \mathbf{u} + w \dots \eta, \quad (1c)$$

η 为波面, \mathbf{u} 和 w 定义为自由表面上的水平速度分量和垂直速度分量, $\dots = (\partial_x, \partial_y, 0)$ 为水平二维梯度算子。底部边界条件为:

$$w_b + \dots h \cdot \mathbf{u}_b = 0, \quad (1d)$$

\mathbf{u}_b 和 w_b 是底面速度分量, h 为水深。 (x, y, z) 为笛卡尔坐标系, (x, y) 平面位于静水面 ($z = 0$), z 轴垂直向上。势流问题的势函数满足 Laplace 方程,其精确解可以用来建立自由表面速度分量与底部速度分量的关系。通常的方法是先用静水面 ($z = 0$) 的速度分量作为基本未知量来表达计算域内势流问题的速度场:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, y, z; t) = \cos(z \dots) \mathbf{u}_0 + \sin(z \dots) w_0, \\ w(x, y, z; t) = \cos(z \dots) w_0 - \sin(z \dots) \mathbf{u}_0, \end{cases} \quad (2)$$

其中 \cos_{\dots} 和 \sin_{\dots} 算子的定义如下:

$$\cos(z \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \dots^{2n}, \quad \sin(z \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots^{2n+1}.$$

定义自由面上流速及底面流速分别为 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, \eta; t)$, $w = w(x, y, \eta; t)$, $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}(x, y, -h; t)$ 和 $w_b = w(x, y, -h; t)$ 。

为了改善色散关系和速度的垂线分布,引入 $\hat{\mathbf{u}}$ 和 \hat{w} 这两个定义在 $z = \hat{z}$ 上的水平流速矢量和垂向流速分量,这里 \hat{z} 是相对水深等值面的 z 坐标,显然是水平坐标 (x, y) 的函数。通过级数求逆的办法,速度场可以表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{u}(x, y, z; t) = \cos((z - \hat{z}) \dots) \hat{\mathbf{u}} + \sin((z - \hat{z}) \dots) \hat{w} + \Gamma_u \dots \hat{z}, \\ w(x, y, z; t) = \cos((z - \hat{z}) \dots) \hat{w} - \sin((z - \hat{z}) \dots) \hat{\mathbf{u}} + \Gamma_w \dots \hat{z}, \end{cases} \quad (3)$$

其中:

$$\Gamma_u \equiv (z - \hat{z})(\cos((z - \hat{z}) \dots) \dots \hat{\mathbf{u}} + \sin((z - \hat{z}) \dots) \dots \hat{w}),$$

$$\Gamma_w \equiv (z - \hat{z})(\cos((z - \hat{z}) \dots) \dots \hat{w} - \sin((z - \hat{z}) \dots) \dots \hat{\mathbf{u}}).$$

从数值计算的角度来讲, 无穷阶 \sin 和 \cos 算子需要进行截断而保留有限项。利用 Taylor 级数直接展开, 该模型不能满足深水区应用的要求。为了扩大模型的 kh 应用范围, 沿用 Padé 级数形式, 其本质是对 Taylor 级数的系数进行优化。这里给出水平二维情况下速度场的表达式:

$$u(x, z; t) = \hat{u} + \lambda \hat{w}_x - \frac{4}{9} \lambda^2 \hat{u}_{xx} - \frac{1}{9} \lambda^3 \hat{w}_{xxx} + \frac{1}{63} \lambda^4 \hat{u}_{xxxx} + \frac{1}{945} \lambda^5 \hat{w}_{xxxxx} + \mathcal{O}_x \left[\lambda \hat{u}_x + \frac{8}{9} \lambda^2 \hat{w}_{xx} - \frac{1}{3} \lambda^3 \hat{u}_{xxx} - \frac{4}{63} \lambda^4 \hat{w}_{xxxx} + \frac{1}{189} \lambda^5 \hat{u}_{xxxxx} \right], \quad (4)$$

$$w(x, z; t) = \hat{w} - \lambda \hat{u}_x - \frac{4}{9} \lambda^2 \hat{w}_{xx} + \frac{1}{9} \lambda^3 \hat{u}_{xxx} + \frac{1}{63} \lambda^4 \hat{w}_{xxxx} - \frac{1}{945} \lambda^5 \hat{u}_{xxxxx} + \mathcal{O}_x \left[\lambda \hat{w}_x - \frac{8}{9} \lambda^2 \hat{u}_{xx} - \frac{1}{3} \lambda^3 \hat{w}_{xxx} + \frac{4}{63} \lambda^4 \hat{u}_{xxxx} + \frac{1}{189} \lambda^5 \hat{w}_{xxxxx} \right], \quad (5)$$

其中 $\lambda = z - \hat{z} = z - \mathcal{O}_h = z + h/2$, 取 $\sigma = -1/2$ 。底部边界条件为:

$$w_b + h_x u_b = 0$$

即

$$\hat{w} - \lambda \hat{u}_x - \frac{4}{9} \lambda^2 \hat{w}_{xx} + \frac{1}{9} \lambda^3 \hat{u}_{xxx} + \frac{1}{63} \lambda^4 \hat{w}_{xxxx} - \frac{1}{945} \lambda^5 \hat{u}_{xxxxx} + h_x (\hat{u} + \lambda \hat{w}_x - c_2 \lambda^2 \hat{u}_{xx} - s_3 \lambda^3 \hat{w}_{xxx} + c_4 \lambda^4 \hat{u}_{xxxx} + s_5 \lambda^5 \hat{w}_{xxxxx}) + \mathcal{O}_x \left[\lambda \hat{w}_x - \lambda^2 \hat{u}_{xx} - \frac{4}{9} \lambda^3 \hat{w}_{xxx} + \frac{1}{9} \lambda^4 \hat{u}_{xxxx} + \frac{1}{63} \lambda^5 \hat{w}_{xxxxx} \right] = 0, \quad (6)$$

这里 $\lambda = -h/2$, $\sigma = -1/2$ 。以 Stokes 理论为目标函数, 在 $0 \leq kh \leq 30$ 范围, 模型的优化系数为:

$$c_2 = 0.413426, \quad c_4 = 0.0304468, \quad s_3 = 0.130874, \quad s_5 = 0.00522772.$$

对于垂直二维问题, 未知量为 $\eta, V, u, w, \hat{u}, \hat{w}$, 基本方程为(1a)、(1b)、(1c)、(4)、(5)、(6), 构成封闭解。

文献[7]通过对此模型的分析得到了 $\Gamma \cdot \hat{z}$ 项对线性浅化梯度没有贡献的结论, 因此省略了 Γ_u 和 Γ_w 项。该结论对无穷阶级数是正确的。附录中, 给出了级数求逆过程中进行级数截断和选取任意 \hat{z} 变量时更一般的结论。尽管本模型中 Γ_u 和 Γ_w 项对线性浅化梯度没有影响, 却影响局部的垂向速度场以及速度场相对于波面的相位滞后。 Γ_u 和 Γ_w 的影响将在第 3 节讨论 Boij 反射时加以分析。

2 数值方法

采用有限差分方法进行数值离散。在由时间步 n 求解时间步 $n+1$ 时, η^n, V^n 为已知量, 需要确定 w 和 u 和用于时间步进方程(1a)、(1b)。由关系式(4)和(5)可以得到用 \hat{u}, \hat{w} 表达的 u, w , 记做:

$$A_1 \hat{u} + B_1 \hat{w} = u, \quad (4)'$$

$$-B_1 \hat{u} + A_1 \hat{w} = w. \quad (5)'$$

由定义知: $V = u + w \cdot \eta = (A_1 - \eta_k B_1) \hat{u} + (B_1 + \eta_k A_1) \hat{w}$ 。底面边界条件(6)可以写成矩阵形式: $A_2 \hat{u} + B_2 \hat{w} = \mathbf{0}$ 。采用的办法是联立 V 的定义和底面边界条件来求解基本未知量 \hat{u} 和 \hat{w} , 即,

$$\begin{bmatrix} A_1 - \eta_k B_1 & B_1 + \eta_k A_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

求得基本未知量 \hat{u} 、 \hat{w} 后利用关系式(4)' 和(5)' 可以得到用于时间步进方程中的 u 、 w 。数值求解过程沿用文献[7]的算法。为了求得 5 阶导数, 采用 7 点中心差分格式。对于时程积分, 采用 5 阶 Cash_Karp_Runge_Kutta 格式。为了消除高频不稳定因素, 每隔 10~ 20 时间步使用一次 Savitsky_Golay 光滑。

3 计算结果和讨论

为了考察新模型的优点, 这里讨论以下 3 个传统的 Boussinesq 方程难以模拟的问题: (a) 波浪从深水到浅水的浅化, $30 \geq kh \geq 0.35$; (b) 波浪在不同斜率斜坡上的反射; (c) 逆流中深水波的壅塞。这些算例都涉及到非均匀地形的影响。算例(a)、(b) 仅考察线性特性, 而算例(c) 考虑了非线性的影响。

算例(a) 波浪浅化是波浪由外海向波浪破碎带传播过程中最重要的波浪演化过程之一。考虑光滑底面

$$h(x) = h_0 - \frac{h_0 - h_1}{2} [1 + \tanh(\sin(\pi x/L) (1 - (2x/L)^2))], \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}. \quad (7)$$

在深水边界 ($x = -120$), 水深为 $h_0 = 9.55 \text{ m}$ 。左边起始段为 20 m 水平底面, 然后是水平长度为 200 m、满足方程(7) 的斜坡段, 最右端是 20 m 的平底段, 水深为 $h_1 = 0.036 \text{ m}$, 如图 1 所示。空间和时间步长分别为 0.04 m 和 0.03 s。波浪周期为 1.13 s。在水槽两端 kh 数分别为 30 和 0.35。图 2 给出了不同时刻瞬时波面形状的变化过程, 其中实线代表由线性 Stokes 波理论得到的波峰、波谷沿程变化, 虚线为计算所得的瞬时波面。数值计算结果与线性理论符合良好。

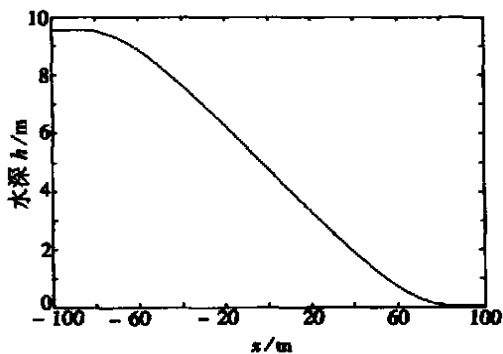


图 1 1/20 斜坡地形水深

算例(b) Booij 反射实验可用来检验水波模

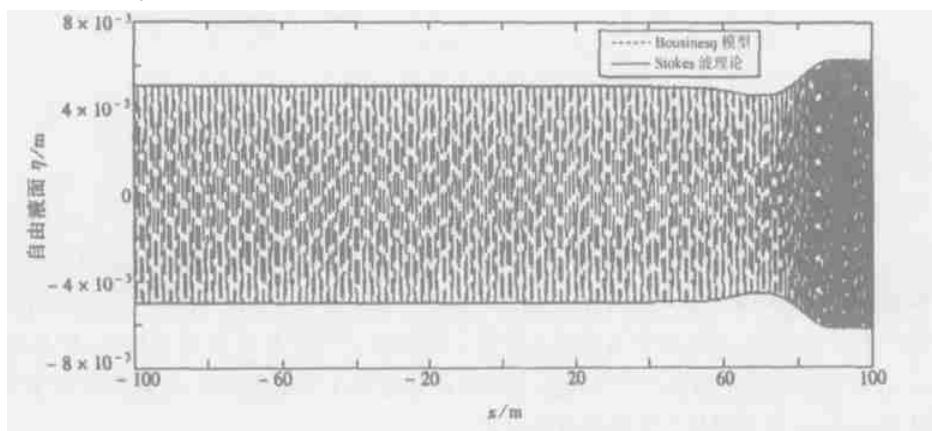


图 2 在 1/20 斜坡上波浪线性浅化波面图

型底坡顶的作用。在 Booij(1983)^[9] 的数值模拟中, 波浪周期为 2 s, 两端平底部分分别为 0.6 m 和 0.2 m。斜坡的斜率取决于斜坡的长度。图 3 给出了本文计算结果与缓坡模型、修正缓坡模型和势流 Laplace 方程有限元数值解的计算结果的比较, 其中有关模型的计算结果取自 Suh、

Lee 和 Park(1997)^[10]。结果表明,忽略速度垂向分布中 Γ_u 和 Γ_w 项得到的计算结果与 Laplace 方程数值解相比存在较大的误差,在级数展开中包含 h_x 项可以明显地提高模型的计算精度。若没有 Γ_u 和 Γ_w 项,反射系数随斜坡长度周期性振荡的基本特征也被抹平。引入 Γ_u 和 Γ_w 项后,结果令人满意。值得指出的是,这里级数展开和求逆仍然基于 Taylor 展开, h_x 定义为小参数并假定 $h_x < 1$ 。

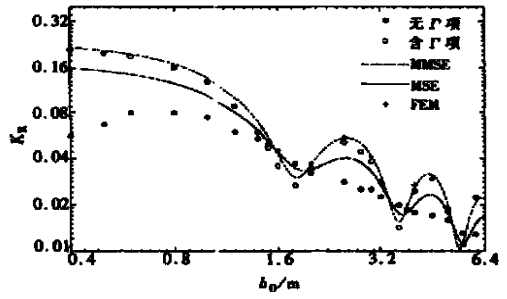


图3 反射系数随斜坡长度的变化

算例(c) 数值波流水槽的设置见图4,假定两端水深相同。首先给出以下几个定义: $[\cdot]^{WI}$ 表示输入的波浪参数; U_C 表示输入的背景流动速度; $[\cdot]_m$ 代表在指定区域对物理量的修正; η 和 u 是前一时步的计算结果。本文构造了耦合的造波、造流及消波、消流方法,各区的计算值更新规则如下:

‡ 造波区+ 消流区

$$\eta_m = C_r \eta^{WI}, u_m = C_r u^{WI} + C_r U_C, \quad C_{r_{x_{min}}} = 0, C_{r_{x_{max}}} = 1$$

‡ 左过渡区(消除左侧反射波)

$$\eta_m = C_r \eta + (1 - C_r) \eta^{WI}, u_m = C_r u + (1 - C_r)(u^{WI} + U_C),$$

$$C_{r_{x_{min}}} = 0, C_{r_{x_{max}}} = 1$$

‡ 右过渡区(消除右行波)

$$\eta_m = C_r \eta, u_m = C_r u + (1 - C_r) U_C, \quad C_{r_{x_{min}}} = 1, C_{r_{x_{max}}} = 0$$

‡ 造流区

$$\eta_m = 0, u_m = C_r U_C, \quad C_{r_{x_{min}}} = 1, C_{r_{x_{max}}} = 0$$

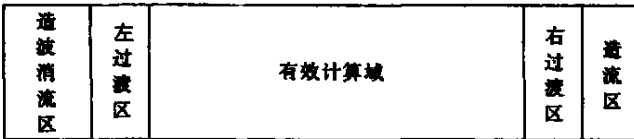


图4 耦合波浪水槽示意图

在每一区段内, C_r 为一光滑函数。这里给出造流区采用的光滑函数:

$$C_r = 1/9^{0.9^{30(1-t)}}, t = \xi/L, \quad \text{当 } 0 < \xi < L;$$

$$C_r = 0, \quad \text{当 } \xi = L,$$

其中 $L = x_{max} - x_{min}$ 是造流区的长度。首先采用稳定流流过潜堤的模型验证造流的效果。水槽计算域为 60 m, 两端水深为 0.8 m, 堤顶水深为 0.2 m。潜堤左侧和右侧的斜率分别为 1/50 和 1/20。为避免奇点,尖角处利用多项式光滑。时间和空间步长分别为 0.005 s 和 0.02 m。Boussinesq 模型的计算结果和非线性浅水方程的计算结果几乎完全相符,其原因为对于无波动的情况 Boussinesq 模型退化为非线性浅水方程。

为了检验耦合造波_造流的效果,讨论波浪在顺流、静水、逆流中高阶谐波的产生。在利用非线性水波模型讨论单一频率线性波输入时,会得到基频波和高频谐波波幅沿波浪传播方向周期性变化的结果。在造波区,水深 0.4 m, 产生周期为 2.5 s 波高为 0.084 m 的一阶 Stokes 波。在造流区产生稳定均匀 Froude 数 $Fr = 0.15$ 的流动。这种强度的流动将对所产生的谐波

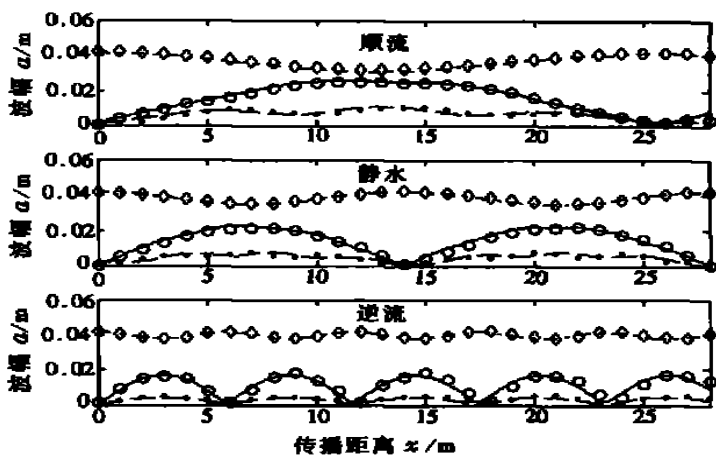


图 5 顺流、静水和逆流中前三阶谐波波幅分布
(以线型区分: - - 表示 1 阶, — 表示 2 阶, ····· 表示 3 阶;

Chen^[5] 的结果以离散点标记: ◇ 代表 1 阶, ○ 代表 2 阶, ● 代表 3 阶)

产生显著影响。数值模拟结果见图 5, 其中拍的长度和强度与文献[5]中的结果吻合良好。结果表明顺流情况下, 基频波和倍频波之间发生强烈的能量交换, 表现为高频波具有较大的波高, 而逆流情况则相反。这些计算结果表明本文提出的耦合造波造流方法是准确有效的。

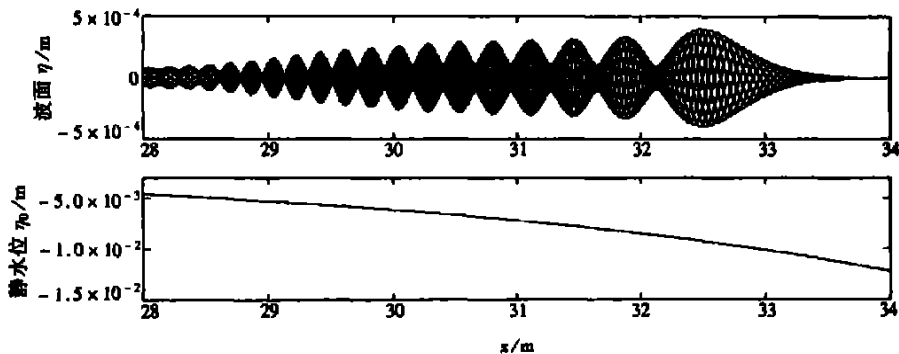


图 6 一个周期内不同时刻的瞬时波面图(上图)和平均水位的跌落(下图)

(波浪周期为 $T = 1.2$ s, 远场流速 $U_c = -0.16$ m/s)

Chen(1998) 等人^[11] 回顾了不同 Boussinesq 模型包含波流相互作用的色散关系, 并采用 Pad [4, 4] Boussinesq 模型数值模拟了波流相互作用。图 6 显示的是本模型的计算结果, 给出了一个波浪周期内壅塞点附近的波面。利用本文建立的高阶 Boussinesq 模型, 大波数的反射波也能被很好地模拟。由于反射波波数的快速变大和网格尺度的原因, 反射波远离壅塞点会被强烈的耗散。图 7 给出了入射波和反射波波数的分布。利用线性波浪理论, 在逆流环境中包含 Doppler 效应的色散关系为 $\omega + |k U_c| = \sqrt{gk \tanh(kh)}$; 利用非线性浅水方程求解定常流动, 得到当地实际水位和流速, 可以计算得到入射波和反射波的波数; 即图 7 中的两支波数分布的理论曲线。在 U_c 足够大的位置, 色散关系具有两个相同的解, 该位置为波浪壅塞点。在逆流情况下, 反射波的相速度方向与入射波相同, 与能量传播相联系的群速度方向与入射波相反。计算结果还表明, 与群速度相关的波前运动规律为, 波前从造波区出发后沿水槽前行, 到

达壅塞点后被反射,但整个过程中波峰始终沿入射波方向前进。计算实际波数分布的过程如图 8 所示,实线为瞬时波面图;利用 Savitsky_Golay(48, 48, 8) 空间滤波分离出低波数的入射波和高波数的反射波,结果以点线表示。在接近波浪壅塞点附近,这种分离技术不能很好地识别波数相近的信号,会造成波数分布的伪振荡。利用相邻两个波峰的距离近似求得两波峰中间点的波数,其中对于小于入射波波高千分之一的波浪忽略不计。与 Stokes 波浪理论比较,计算结果令人满意。对于实际逆流中波浪的变形,还需引入波浪破碎模型,这将在另文中讨论。

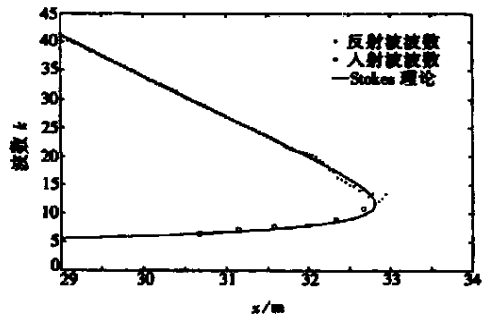


图 7 波数沿程分布(波高 $H = 1.0 \times 10^{-4} \text{m}$, 波周期 $T = 1.2 \text{s}$, 远场流速 $U_c = -0.16 \text{m/s}$)

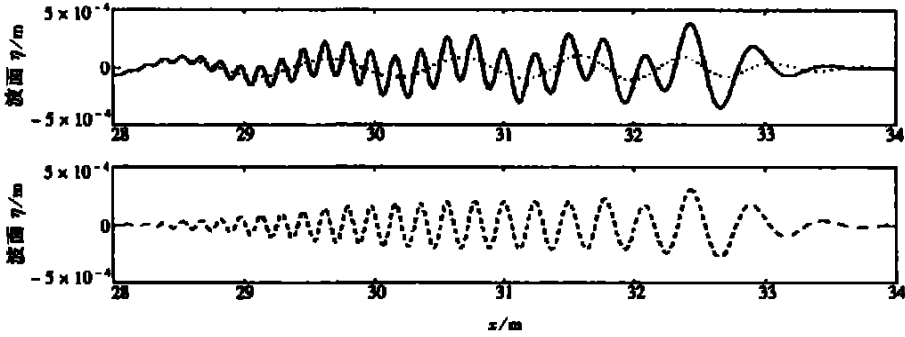


图 8 瞬时波浪的分解(上图中的实线为计算所得波面,点线为滤波所得的入射波波面,下图为滤波所得的反射波波面)

4 结束语

本文给出了改进底坡项的高阶 Boussinesq 模型。在级数展开中引入一阶坡度项,可以放松 Boussinesq 方程对底面缓坡适用范围的要求。尽管这种修正没有影响浅化梯度,却对斜坡上波浪的反射有了显著改进。这是由于这两种现象的物理机制不同。局部的速度垂向分布对反射的影响远远大过浅化问题。尽管浅化是波浪在海岸带传播中最重要的现象之一,当地形变化剧烈时,反射的重要性也值得注意。利用本文的修正,高阶 Boussinesq 模型可以用于模拟波浪反射现象。

利用改进的 Boussinesq 模型,本文也初步研究了波流相互作用现象。建立了简单可靠的耦合造波造流水槽。这将为进一步研究波流相互作用和波浪破碎数值模拟奠定基础。

附 录

这里对缓坡假定情况下的 Boussinesq 模型进行 Fourier 分析。方程(3)给出了速度场的分布,为了区分缓坡项的作用,将缓坡项写作:

$$\begin{cases} \Gamma_u \equiv (z - \hat{z})(H \cos((z - \hat{z}) \cdot \dots) \cdot \dots \hat{u} + H \sin((z - \hat{z}) \cdot \dots) \cdot \dots \hat{w}), \\ \Gamma_w \equiv (z - \hat{z})(H \cos((z - \hat{z}) \cdot \dots) \cdot \dots \hat{w} - H \sin((z - \hat{z}) \cdot \dots) \cdot \dots \hat{u}), \end{cases} \quad (A1)$$

这里 $H \cos_{\cdot}$ 和 $H \sin_{\cdot}$ 算是 \cos_{\cdot} 和 \sin_{\cdot} 截断或优化后的形式。讨论一维问题,地形函数为 $h = h(\delta x)$, 其中 $\delta \ll$

1• 线性控制方程为:

$$\eta_t - w_0 = 0; u_{0t} + \eta_x = 0; w_b + h_x u_b = 0 \quad (\text{A2a, b, c})$$

仿照 Agnon、Madsen 和 Schaffer (1999)^[12] 的推导过程, 我们得到一般情况下浅化梯度的表达 $\eta = \eta_S + \Delta_S$, 其中 η_S 是通过 Stokes 理论得到的线性浅化梯度, 残项 Δ_S 具有如下的表达形式:

$$\Delta_S = \frac{2k^2 h^2 \sigma}{2kh + \sinh(2kh)} \left\{ (1 + \sigma) [\sinh((1 + \sigma)kh) \text{Hcosh}(- (1 + \sigma)kh) + \text{Hsinh}(- (1 + \sigma)kh) \cosh((1 + \sigma)kh)] - \sigma [\sinh(\sigma kh) \text{Hcosh}(- \sigma kh) + \text{Hsinh}(- \sigma kh) \cosh(\sigma kh)] \right\}, \quad (\text{A3})$$

Hcosh_- 和 Hsin_- 算子具有同文献[12]中 \cosh 和 \sinh 相同的规则。从该定义知道 Hcosh_- 算子对于自变量是偶函数而 Hsin_- 算子是奇函数。易知存在两种模式使得 $\Delta_S = 0$:

1) 模式 1

$$\begin{cases} \sinh((1 + \sigma)kh) \text{Hcosh}(- (1 + \sigma)kh) = \text{Hsinh}((1 + \sigma)kh) \cosh((1 + \sigma)kh), \\ \sinh(\sigma kh) \text{Hcosh}(\sigma kh) = \text{Hsinh}(\sigma kh) \cosh(\sigma kh), \end{cases} \quad (\text{A4})$$

这种模式对应为 Γ 项中算子取通常 \sin_- 和 \cos_- 算子的形式, 也是文献[7]得出浅化梯度与 Γ 项无关的理由。

2) 模式 2

$$\begin{cases} (1 + \sigma) \sinh((1 + \sigma)kh) \text{Hcosh}((1 + \sigma)kh) = \sigma \sinh(\sigma kh) \text{Hcosh}(\sigma kh), \\ (1 + \sigma) \text{Hsinh}((1 + \sigma)kh) \cosh((1 + \sigma)kh) = \sigma \text{Hsinh}(\sigma kh) \cosh(\sigma kh), \end{cases} \quad (\text{A5})$$

这种情况对应为 $\sigma = -1/2$ 这一选择。

对于这两种模态, 浅化梯度与线性理论一致。此外, 另一特殊选择是 $\sigma = 0$ 。这是通常将基本变量取在静止水面 Boussinesq 模型的做法。对于其他模型, 浅化梯度将背离线性理论。值得指出的是以上讨论是基于无穷级数展开, 对于有限项级数展开的结果还不能给出严谨的证明。原因是在推导过程中利用了一些双曲正弦和双曲余弦的关系。对于有限项截断的模型, 只能对特定的模型进行分析。检验文献[7]中所讨论的有限项模型, 当 Hcos_- 和 Hsin_- 算子与 \cos_- 和 \sin_- 算子同为 Taylor 级数或 Padé 级数的系数展开时, 对于 $\sigma = -1/2$ 的情况, Γ 项的存在与否不会影响线性浅化梯度。在对底面边界条件进行优化后这一结论仍然成立。这也是本文中优化系数与文献[7]一致的原因。注意本文中优化系数的定义与文献[7]中优化系数的定义略有不同, 但是经过化简后, 它们是一致的。

[参 考 文 献]

- [1] Madsen P A, Schaffer H A. Higher_order Boussinesq type equations for surface gravity waves: derivation and analysis[J]. Phil Trans Roy Soc, London A, 1998, (356): 3123—3184.
- [2] Gobbi M F, Kirby J T, Wei G. A fully nonlinear Boussinesq model for surface wave — II: Extension to $O(kh)^4$ [J]. J Fluid Mech, 2000, (405): 181—210.
- [3] HONG Guang_wen. Higher_order model of nonlinear and dispersive wave in water of varying depth with arbitrary sloping bottom[J]. China Ocean Engineering, 1997, 11(3): 243—260.
- [4] 邹志利. 含强水流高阶 Boussinesq 水波方程[J]. 海洋学报, 2000, 22(4): 41—50.
- [5] CHEN Qn, Madsen P A, Basco D R. Current effects on nonlinear interactions of shallow_water waves[J]. Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, 1999, 125(4): 176—186.
- [6] Kristensen M K. Boussinesq equations and wave_current interaction[D]. Master's thesis. International Research Center for Computed Hydrodynamics (ICCH) at Danish Hydraulic Institute, Denmark and ISVA, Technical University of Denmark, 1995, 130—142.
- [7] Madsen P A, Bingham H B, Liu H. A new Boussinesq method for fully nonlinear waves from shallow to deep water[J]. J Fluid Mech, 2002, (462): 1—30.
- [8] Wu T Y. A unified theory for modeling water waves[A]. In: Advances in Applied Mechanics [C]. Boston: Academic Press, 2000, 37: 1—88.

- [9] Booij N. A note on the accuracy of the mild slope equation[J]. Coastal Engineering, 1983, 7(2): 191—203.
- [10] Suh K D, Lee C, Park W S. Time dependent equations for wave propagation on rapidly varying topography[J]. Coastal Engineering, 1997, 32(2/3): 91—117.
- [11] Chen Q, Madsen P A, Schaffer H A, et al. Wave current interaction based on an enhanced Boussinesq approach[J]. Coastal Engineering, 1998, 33(1): 11—39.
- [12] Agnon Y, Madsen P A, Schaffer H A. A new approach to high order Boussinesq models[J]. J Fluid Mech, 1999, (399): 319—333.

Higher Order Boussinesq Type Equations for Water Waves on Uneven Bottom

WANG Benlong, LIU Hua

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University,
Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract: Higher order Boussinesq type equations for wave propagation over variable bathymetry were derived. The time dependent free surface boundary conditions were used to compute the change of the free surface in time domain. The free surface velocities and the bottom velocities were connected by the exact solution of the Laplace equation. Taking the velocities on half relative water depth as the fundamental unknowns, terms relating to the gradient of the water depth were retained in the inverse series expansion of the exact solution, with which the problem was closed. With enhancements of the finite order Taylor expansion for the velocity field, the application range of the present model was extended to the not so mild slope bottom. For linear properties, some validation computations of linear shoaling and Booij's tests were carried out. The problems of wave current interactions were also studied numerically to test the performance of the enhanced Boussinesq equations associated with the effect of currents. All these computational results confirm perfectly to the theoretical solution as well as other numerical solutions of the full potential problem available.

Key words: higher order Boussinesq model; wave current interaction; uneven bottom