

文章编号: 1000-0887(2005) 06\_0723\_11

# 三维粘弹性分层介质中平稳 随机波的传播\*

高 强, 林家浩

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

(钟万勰推荐)

**摘要:** 研究平稳随机波在粘弹性分层横观各向同性介质中的传播问题。将岩层考虑为分层介质, 各层性质不同, 岩层位于基岩上面, 并且认为基岩比岩层刚很多, 在基岩处给出随机激励。在频率和波数域中将控制方程化为常微分方程求解。对常微分方程, 应用两点边值问题的精细积分法进行求解。因此, 近年来发展的应用于结构随机振动的虚拟激励法可推广于当前分层岩层响应的计算。

**关键词:** 分层介质; 精细积分法; 虚拟激励法; 波传播; 随机振动  
**中图分类号:** TU352      **文献标识码:** A

## 引 言

分层介质中的波传播在许多物理和实际问题中有着重要的应用, 如地震波在岩层中的传播, 超声波在复合材料中的传播等。此问题的研究对于利用地面爆破或遥感技术进行深层地下水、石油或矿石资源的开采也有重要意义。

现有大量文献讨论分层介质波传播问题的模型和方法。介质可能是液体、固体或是多孔介质。介质的材料可能是各向同性或各向异性的, 弹性的或粘弹性的, 线性的或非线性的, 均匀的或非均匀的。分层介质中的波传播问题的研究主要集中在两个方向: 正问题, 其主要关心的是求解波域或确定折射和反射系数; 反问题, 其主要关心的是确定介质的材料参数。文献[1~7]给出了波传播问题的一些解析方法。Rizzi 和 Doyle<sup>[8,9]</sup>发展了一套基于快速 Fourier 变换的谱方法, 并用于弹性分层固体中波的瞬态分析。文献[10]研究了粘弹性介质中的瞬态波。文献[11~16]给出了不同的模型和方法来处理各向异性介质。文献[17]提出了一种广义 Thomson-Haskell 矩阵法来处理横向不均匀分层介质。文献[18]研究了各向异性分层多孔介质中的非均匀波。文献[19, 20]提出了一种确定分层介质材料参数的谱单元方法。文献[21]将精细

\* 收稿日期: 2004\_01\_08; 修订日期: 2004\_12\_06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472023); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20040141020)

作者简介: 高强(1978—), 男, 博士生(Tel: + 86\_411\_84700230; E\_mail: gaoqiang@ student. dlut. edu. cn); 林家浩(1941—), 男, 教授, 博士生导师(联系人. Tel+ 86\_411\_84709403; Fax: + 86\_411\_84708400; E\_mail: jilin@ dlut. edu. cn)。

积分方法应用于弹性波传播问题。

但是, 目前对于分层介质中波的研究主要集中在确定性波传播问题, 波的随机特性没有考虑。本文联合应用精细积分法<sup>[21]</sup>和虚拟激励法<sup>[22~26]</sup>研究分层介质中的平稳随机波传播问题。

处理波传播问题的常用方法是将波动偏微分方程变换到频率\_波数域中, 转换为常微分方程求解。除对很少一些问题外, 解析求解是很困难的。文献[27]用矩阵法分析了波传播问题, 但精细的数值求解还是很困难。文献[21]用精细积分方法计算了弹性波导的波传播问题。为计算地面运动的随机响应, 首先要讲清楚基岩随机激励的描述。单自由度的随机激励通常用其功率谱来表示, 但基岩是连续体, 故有无限多的激励。假定其激励有平面波的性质, 选择随机波在  $x-y$  平面内传播而  $z$  坐标向下。沿坐标  $x, y$  方向可以将基岩的激励运动也采用 Fourier 展开, 类似于对时间的功率谱, 对波数也有一个功率谱。综合起来, 基岩激励可以用频率\_波数谱函数  $S_{xg}(K_x, K_y, \omega)$ ,  $S_{yg}(K_x, K_y, \omega)$ ,  $S_{zg}(K_x, K_y, \omega)$  来表示。

本文处理平稳随机波在三维粘弹性分层介质中的传播问题。对于在频率\_波数表示下给定的基岩激励, 导出系统的对偶常微分方程组, 该微分方程组的系数是确定性的, 只有在基岩处的边界条件是随机激励。这与结构在地面激励下的随机振动问题是相近的。虚拟激励法<sup>[22~26]</sup>给出了精确高效的算法, 可以用于当前课题。给定频率\_波数, 求解系统在基岩的虚拟激励下的地面响应成为关键的一步。虚拟激励法将随机波传播问题, 化成为求解深度坐标  $z$  的确定性的常微分方程组的两端边值问题, 用精细积分法求解。地面运动的三向频率\_波数谱函数  $S_{uu}(K_x, K_y, \omega)$ ,  $S_{vv}(K_x, K_y, \omega)$ ,  $S_{ww}(K_x, K_y, \omega)$  是需要计算的。地上结构的激励就是此地面运动谱。

虚拟激励法是高效精确的随机响应计算方法, 精细积分法求解常微分方程也是高效精确的, 所以本文对于多层介质的平稳随机响应分析也是高效精确的。

## 1 基本方程

考虑横观各向同性分层介质  $x-y$  平面内的平面波传播问题。设  $z$  轴向下而表面  $z = 0$  为自由, 第  $i$  层介质介于  $(z_{i-1}, z_i)$  之间, 底层基岩  $z = z_l$  有给定的牵连位移(随机激励)  $\hat{u}_g(x, y, t)$ 、 $\hat{v}_g(x, y, t)$ 、 $\hat{w}_g(x, y, t)$  的作用, 如图 1。

令沿惯性坐标  $x, y, z$  的位移分别为  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ 。应变\_位移关系为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \hat{w}}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}, \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial y}. \end{cases} \quad (1)$$

采用如下的各向同性粘弹性应力\_应变关系

$$P \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = R \times Q \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$P = \sum_{k=0}^m P_k \frac{d^k}{dt^k}, \quad Q = \sum_{k=0}^n q_k \frac{d^k}{dt^k}, \quad (3)$$

其中  $\lambda, G$  为 Lam 常数, 各层不同.  $P, Q$  为微分算子.

运动方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (4)$$

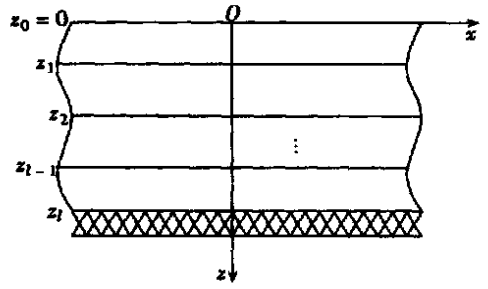


图 1 分层介质模型

其中  $\rho$  是岩层的密度, 各层不同.

设  $x$  和  $y$  方向的波数为  $K_x, K_y$ ,  $\omega$  为频率, 将各未知量表示为传播波的形式

$$\begin{cases} \hat{u} = u(z) \exp[i(K_x x + K_y y)], \quad \hat{v} = v(z) \exp[i(K_x x + K_y y)], \\ \hat{\epsilon} = \epsilon(z) \exp[i(K_x x + K_y y)], \quad \hat{\sigma}_x = \sigma_x(z) \exp[i(K_x x + K_y y)]. \end{cases} \quad (5)$$

基岩的平稳随机激励也可表示为如下传播波形式

$$\left\{ \hat{u}_g, \hat{v}_g, \hat{w}_g \right\}^T = \left\{ x_g(K_x, K_y, t), y_g(K_x, K_y, t), z_g(K_x, K_y, t) \right\}^T \exp[i(K_x x + K_y y)], \quad (6)$$

其中  $x_g(K_x, K_y, t), y_g(K_x, K_y, t), z_g(K_x, K_y, t)$  是平稳随机过程, 它们的功率谱密度  $S_{xg}(K_x, K_y, \omega), S_{yg}(K_x, K_y, \omega), S_{zg}(K_x, K_y, \omega)$  已知. 对于给定的一系列  $K_x, K_y, \omega$ , 根据基岩的功率谱计算地面响应的功率谱  $S_{uu}(K_x, K_y, \omega), S_{vv}(K_x, K_y, \omega), S_{ww}(K_x, K_y, \omega)$  是要解决的问题. 对于给定的功率谱密度  $S_{xg}, S_{yg}, S_{zg}$ , 按虚拟激励法<sup>[22~26]</sup>构造虚拟激励

$$\left\{ u_g, v_g, w_g \right\}^T = \left\{ \sqrt{S_{xg}}, \sqrt{S_{yg}}, \sqrt{S_{zg}} \right\}^T \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)]. \quad (7)$$

如果  $u_0 \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)], v_0 \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)], w_0 \exp[i(K_x x + K_y y - \omega t)]$  是在虚拟激励下地面的响应, 则  $S_{uu} = |u_0|^2, S_{vv} = |v_0|^2, S_{ww} = |w_0|^2$  就是系统在基岩随机激励下, 地面随机响应的功率谱. 以下要做的主要是用精细积分法求解在虚拟激励下, 地面的响应.

## 2 对偶方程

令

$$v = \frac{\sum_{k=0}^n (-i\omega)^k q_k}{\sum_{k=0}^m (-i\omega)^k p_k}, \quad \lambda = v\lambda \quad G = vG. \quad (8)$$

将方程(5) 代入方程(1)和(2), 将结果代入方程(4), 并将结果写为矩阵形式得

$$K_{22} q'' + (K_{21} - K_{12}) q' - (K_{11} - \rho\omega^2 I_3) q = 0, \quad (9)$$

其中  $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial z$ .

$$q = \left\{ u, v, w \right\}^T, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2G \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{21} = -\mathbf{K}_{12}^T = iK_x \begin{bmatrix} 0 & 0 & G \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} + iK_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \\ 0 & \lambda & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{K}_{11} = K_x^2 \begin{bmatrix} \lambda + 2G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} + K_y^2 \begin{bmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} + K_x K_y \begin{bmatrix} 0 & \lambda + G & 0 \\ \lambda + G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (11)$$

式中矩阵  $\mathbf{K}_{11}$ 、 $\mathbf{K}_{12}$  和  $\mathbf{K}_{21}$  是  $K_x$  和  $K_y$  的函数。

引入对偶向量

$$= \left\{ \tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z \right\}^T = \mathbf{K}_{22} \mathbf{q}' + \mathbf{K}_{21} \mathbf{q} \quad (12)$$

运动方程(4)可以表示为如下状态空间形式

$$\mathbf{v}' = \mathbf{H} \mathbf{v}, \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{q}' \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{A} = -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} - \rho \omega^2 \mathbf{I}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{K}_{22}^{-1}. \quad (14)$$

边界条件为

$$(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}(z_l) = \mathbf{s}, \quad (15)$$

其中

$$\mathbf{s} = \left\{ \sqrt{S_{xg}(K_x, K_y, \omega)}, \sqrt{S_{yg}(K_x, K_y, \omega)}, \sqrt{S_{zg}(K_x, K_y, \omega)} \right\}^T, \quad (16)$$

且  $\mathbf{q}$ 、 $\mathbf{q}'$  在界面处连续。

至此,应用虚拟激励方法将平稳随机波传播问题转化为确定性常微分方程的两端边值问题。以下应用精细积分方法求解对偶方程(13)。

### 3 区段方程和矩阵微分方程

在一层介质中,任取一区段  $[z_a, z_b]$ 。记  $\mathbf{q}_a$  为  $z_a$  端的位移向量,  $\mathbf{b}$  为  $z_b$  端的力向量。显然,一旦给定  $\mathbf{q}_a$ 、 $\mathbf{b}$ ,那么在区段  $[z_a, z_b]$  上的位移向量  $\mathbf{q}$  和力向量  $\mathbf{b}$  也就确定了。

因为本问题是线性的,则有以下关系

$$\mathbf{q}_b = \mathbf{F} \mathbf{q}_a - \mathbf{G} \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{Q} \mathbf{q}_a + \mathbf{E} \mathbf{b}, \quad (17)$$

其中  $\mathbf{F}$ 、 $\mathbf{Q}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{E}$  是待定复数矩阵,以下推导它们的微分方程。将方程(17)对  $z$  求导,且认为  $\mathbf{q}_a$ 、 $\mathbf{a}$  是给定的初值,则得

$$\mathbf{q}'_b = \mathbf{F}' \mathbf{q}_a - \mathbf{G}' \mathbf{b} - \mathbf{G}' \mathbf{b}, \quad \mathbf{0} = \mathbf{Q}' \mathbf{q}_a + \mathbf{E}' \mathbf{b} + \mathbf{E}' \mathbf{b}. \quad (18)$$

由(13)式知,对偶方程可写为

$$\mathbf{q}'_b = \mathbf{A} \mathbf{q}_b + \mathbf{D} \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{B} \mathbf{q}_b + \mathbf{C} \mathbf{b}. \quad (19)$$

再由方程(18)和(19)可得

$$\begin{cases} (\mathbf{F}' - \mathbf{A}\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{F}) \mathbf{q}_a + (-\mathbf{G}' - \mathbf{D} - \mathbf{G}\mathbf{C} + \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{G}) \mathbf{b} = \mathbf{0}, \\ (\mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{F} + \mathbf{Q}') \mathbf{q}_a + (-\mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{G} + \mathbf{E}' + \mathbf{E}\mathbf{C}) \mathbf{b} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (20)$$

两端边界条件  $\mathbf{q}_a$ 、 $\mathbf{a}$  是独立的,所以有

$$\begin{cases} \mathbf{F}' = (\mathbf{A} + \mathbf{GB})\mathbf{F}, \mathbf{E}' = \mathbf{E}(\mathbf{BG} - \mathbf{C}), \\ \mathbf{G}' = \mathbf{AG} - \mathbf{GC} - \mathbf{D} + \mathbf{GBG}, \mathbf{Q}' = -\mathbf{EBF}. \end{cases} \quad (21)$$

若令  $z_b \rightarrow z_a$  可得边界条件为

$$\begin{cases} \mathbf{G}(z_a, z_b) = \mathbf{Q}(z_a, z_b) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}(z_a, z_b) = \mathbf{E}(z_a, z_b) = \mathbf{I} \quad (\text{当 } z_a \rightarrow z_b). \end{cases} \quad (22)$$

### 4 区段合并消元

考虑两相邻区段  $[z_a, z_b]$  和  $[z_b, z_c]$  对它们分别应用方程(17)得

$$q_b = F_1 q_a - G_1 b, \quad a = Q_1 q_a + E_1 b, \quad \text{对 } [z_a, z_b]; \quad (23a, b)$$

$$q_c = F_2 q_b - G_2 c, \quad b = Q_2 q_b + E_2 c, \quad \text{对 } [z_b, z_c]. \quad (24a, b)$$

区段  $[z_a, z_b]$  和区段  $[z_b, z_c]$  可以合并为一个区段  $[z_a, z_c]$ , 其区段方程为<sup>[28]</sup>

$$q_c = F_c q_a - G_c c, \quad a = Q_c q_a + E_c c, \quad \text{对 } [z_a, z_c]. \quad (25)$$

从方程(23)中求解出  $q_b, b$

$$\begin{cases} q_b = (\mathbf{I} + \mathbf{G}_1 \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{F}_1 q_a - (\mathbf{G}_1^{-1} + \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{E}_2 c, \\ b = (\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{F}_1 q_a + (\mathbf{I} + \mathbf{Q}_2 \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{E}_2 c. \end{cases} \quad (26)$$

将方程(26)代入方程(23b)、(24a)得

$$\begin{cases} q_c = F_2(\mathbf{I} + \mathbf{G}_1 \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{F}_1 q_a - [\mathbf{G}_2 + F_2(\mathbf{G}_1^{-1} + \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{E}_2] c, \\ a = [\mathbf{Q}_1 + \mathbf{E}_1(\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{F}_1] q_a + \mathbf{E}_1(\mathbf{I} + \mathbf{Q}_2 \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{E}_2 c. \end{cases} \quad (27)$$

对比方程(27)、(25)可得

$$\begin{cases} F_c = F_2(\mathbf{I} + \mathbf{G}_1 \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{F}_1, \quad G_c = \mathbf{G}_2 + F_2(\mathbf{G}_1^{-1} + \mathbf{Q}_2)^{-1} \mathbf{E}_2, \\ Q_c = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{E}_1(\mathbf{Q}_2^{-1} + \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{F}_1, \quad E_c = \mathbf{E}_1(\mathbf{I} + \mathbf{Q}_2 \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{E}_2. \end{cases} \quad (28)$$

方程(28)即为相邻区段的合并方程, 它们在求解常微分方程和特征值问题中有着重要作用。

### 5 初始区段矩阵

方程(28)提供了相邻区段的合并方程。但是, 到目前为止, 已知的是系统矩阵  $A, B, C, D$ , 并没有给出任何区段矩阵  $F, Q, G, E$ 。下面给出典型区段矩阵的计算方法。

设第  $i$  层介质的厚度为  $h_i(z_i - z_{i-1})$ 。首先, 将它分为  $2^{N_1}$  个等厚度子层, 厚度为  $h_i = h_i/2^{N_1}$ 。然后, 将每个子层再分为  $2^N$  (本文  $N$  取为 20) 个等厚度微层, 厚度为  $\tau$ 。若令  $a$  端在  $z_i$  处,  $b$  端在  $z_{i-1}$  处<sup>[21, 28]</sup>, 则

$$-\tau = \tau = -h_i/2^N = -h_i/1\,048\,576.$$

由于  $\tau$  非常小, 区段矩阵  $F, Q, G, E$  可用 Taylor 级数展开来计算

$$\begin{cases} \mathbf{Q}(\tau) = \theta_1 \tau + \theta_2 \tau^2 + \theta_3 \tau^3 + \theta_4 \tau^4, \quad \mathbf{G}(\tau) = \gamma_1 \tau + \gamma_2 \tau^2 + \gamma_3 \tau^3 + \gamma_4 \tau^4, \\ \mathbf{F}(\tau) = \varphi_1 \tau + \varphi_2 \tau^2 + \varphi_3 \tau^3 + \varphi_4 \tau^4, \quad \mathbf{F}(\tau) = \mathbf{I} + \mathbf{F}(\tau), \\ \mathbf{E}(\tau) = \phi_1 \tau + \phi_2 \tau^2 + \phi_3 \tau^3 + \phi_4 \tau^4, \quad \mathbf{E}(\tau) = \mathbf{I} + \mathbf{E}(\tau). \end{cases} \quad (29)$$

将上述方程代入方程(21)给出

$$\theta_1 = -\mathbf{B}, \quad \gamma_1 = -\mathbf{D}, \quad \varphi_1 = \mathbf{A}, \quad \phi_1 = -\mathbf{C}; \quad (30)$$

$$\begin{cases} \theta_2 = -(\phi_1 \mathbf{B} + \mathbf{B}\varphi_1)/2, \quad \gamma_2 = (\mathbf{A}\gamma_1 - \gamma_1 \mathbf{C})/2, \\ \varphi_2 = (\mathbf{A}\varphi_1 + \gamma_1 \mathbf{B})/2, \quad \phi_2 = (\mathbf{B}\gamma_1 - \phi_1 \mathbf{C})/2; \end{cases} \quad (31)$$

$$\begin{cases} \theta_3 = -(\phi_2 \mathbf{B} + \mathbf{B}\varphi_2 + \phi_1 \mathbf{B}\varphi_1)/3, \quad \gamma_3 = (\mathbf{A}\gamma_2 - \gamma_2 \mathbf{C} + \gamma_1 \mathbf{B}\gamma_1)/3, \\ \varphi_3 = (\mathbf{A}\varphi_2 + \gamma_2 \mathbf{B} + \gamma_1 \mathbf{B}\varphi_1)/3, \quad \phi_3 = (\mathbf{B}\gamma_2 + \phi_1 \mathbf{B}\gamma_1 - \phi_2 \mathbf{C})/3; \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} \theta_4 = -(\phi_3 \mathbf{B} + \mathbf{B}\varphi_3 + \phi_2 \mathbf{B}\varphi_1 + \phi_1 \mathbf{B}\varphi_2)/4, \\ \gamma_4 = (\mathbf{A}\gamma_3 - \gamma_3 \mathbf{C} + \gamma_2 \mathbf{B}\gamma_1 + \gamma_1 \mathbf{B}\gamma_2)/4, \\ \varphi_4 = (\mathbf{A}\varphi_3 + \gamma_3 \mathbf{B} + \gamma_2 \mathbf{B}\varphi_1 + \gamma_1 \mathbf{B}\varphi_2)/4, \\ \phi_4 = (\mathbf{B}\gamma_3 + \phi_1 \mathbf{B}\gamma_2 + \phi_2 \mathbf{B}\gamma_1 - \phi_3 \mathbf{C})/4. \end{cases} \quad (33)$$

将矩阵  $F$ 、 $E$  改写为  $F = I + F$ 、 $E = I + E$ ，可知在小区段  $\tau$  上矩阵  $F$ 、 $E$  是数值很小的矩阵。在计算中必须将矩阵  $F$ 、 $E$  单独存储，以避免损失计算精度。因此，方程(28)须用下式代替

$$\begin{cases} \mathbf{G}_c = \mathbf{G} + (\mathbf{I} + \mathbf{F})\mathbf{G}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\mathbf{G})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{E}), \\ \mathbf{Q}_c = \mathbf{Q} + (\mathbf{I} + \mathbf{E})\mathbf{Q}(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{F}), \\ \mathbf{F}_c = (\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{Q}/2)(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{Q})^{-1} + (\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{Q}/2) + \\ \quad \mathbf{F}(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{F}, \\ \mathbf{E}_c = (\mathbf{E} - \mathbf{Q}\mathbf{G}/2)(\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{Q})^{-1} + (\mathbf{I} + \mathbf{Q}\mathbf{G})^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{Q}\mathbf{G}/2) + \\ \quad \mathbf{E}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}\mathbf{G})^{-1}\mathbf{E}. \end{cases} \quad (34)$$

## 6 $2^N$ 型算法

求得区段  $\tau$  的区段矩阵  $F(\tau)$ 、 $E(\tau)$ 、 $Q(\tau)$ 、 $G(\tau)$  后，即可应用方程(34) 得到区段矩阵  $F(h_i)$ 、 $E(h_i)$ 、 $Q(h_i)$ 、 $G(h_i)$ 。由于所有区段为等厚度，所以有  $F_1 = F_2$ 、 $Q_1 = Q_2$  等。每一次区段合并，区段的数目将减少一半。完成  $N = 20$  次区段合并后，即可得到矩阵  $F(h_i)$ 、 $E(h_i)$ 、 $Q(h_i)$ 、 $G(h_i)$ 。

对于第  $i$  层介质，计算典型子层区段矩阵的过程如下：

应用方程(29)~(33) 计算该层  $F(\tau)$ 、 $E(\tau)$ 、 $Q(\tau)$ 、 $G(\tau)$ ；

for (itera=0; itera< N; itera++) {

    执行方程(34)；

$Q = Q_c$ ； $G = G_c$ ； $F = F_c$ ； $E = E_c$ ；

}

$Q(h_i) = Q_c$ ； $G(h_i) = G_c$ ； $F(h_i) = I + F_c$ ； $E(h_i) = I + E_c$ ；

然后计算各层的区段矩阵  $Q(h_i)$ 、 $G(h_i)$ 、 $F(h_i)$ 、 $E(h_i)$ ，过程如下

$Q_1 = Q_2 = Q(h)$ ； $G_1 = G_2 = G(h)$ ； $F_1 = F_2 = F(h)$ ； $E_1 = E_2 = E(h)$

for (itera=0; itera< N<sub>1</sub>; itera++) {

    执行方程(28)；

$Q_1 = Q_2 = Q_c$ ； $G_1 = G_2 = G_c$ ； $F_1 = F_2 = F_c$ ； $E_1 = E_2 = E_c$ ；

}

$Q(h_i) = Q_c$ ； $G(h_i) = G_c$ ； $F(h_i) = F_c$ ； $E(h_i) = E_c$ ；

将各层区段矩阵合并为整体区段矩阵的过程和上面描述的过程类似，即

```

for ( layer= 1; layer ≤ layers; layer+ + ) {
if( layer = = 1 ) {
    Qc = Q( h1 ); Gc = G( h1 ); Fc = F( h1 ); Ec = E( h1 );
}
else {
    Q1 = Q( hlayer ); G1 = G( hlayer ); F1 = F( hlayer ); Ec = E( hlayer );
    Q2 = Qc; G2 = Gc; F2 = Fc; E2 = Ec;
}
}
}

```

执行方程(28);

至此, 矩阵  $Q_c, G_c, F_c, E_c$  就是整个系统的区段矩阵。令  $z = 0$  是  $b$  端, 而  $z = z_l$  是  $a$  端, 则  $b = 0, q_a = s$ , 于是方程 (17) 给出

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix}^T = q_b = Fs, \tag{35}$$

地面位移响应的功率谱密度为

$$\begin{Bmatrix} S_{uu} \\ S_{vv} \\ S_{ww} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{conj}(u_0) \cdot u_0 \\ \text{conj}(v_0) \cdot v_0 \\ \text{conj}(w_0) \cdot w_0 \end{Bmatrix}, \tag{36}$$

其中  $\text{conj}(\cdot)$  表示  $(\cdot)$  的复共轭。

## 7 数值算例

岩层的材料参数取自 Gutenberg 地球模型<sup>[3]</sup>, 如表 1。粘弹性参数为  $p_0 = 1.0, p_1 = 0.05, q_0 = 1, q_1 = 0.1$ , 基岩平稳随机激励功率谱密度为  $S_{xg} = 1.0 \text{ m}^2 \cdot \text{s}, S_{yg} = 1.0 \text{ m}^2 \cdot \text{s}, S_{zg} = 1.0 \text{ m}^2 \cdot \text{s}$ 。

表 1 岩层参数

层数	$N(\text{N/m}^2)$	$G(\text{N/m}^2)$	$\rho(\text{kg/m}^3)$	厚度 $h/\text{m}$
1	$3.3 \times 10^{10}$	$3.5 \times 10^{10}$	$2.74 \times 10^3$	$1.9 \times 10^4$
2	$4.4 \times 10^{10}$	$4.3 \times 10^{10}$	$3.00 \times 10^3$	$1.9 \times 10^4$
3	$8.0 \times 10^{10}$	$7.2 \times 10^{10}$	$3.32 \times 10^3$	$1.2 \times 10^4$

为计算地面响应, 取  $\omega \in [0, 6] \text{ s}^{-1}, \Delta\omega = 0.02 \text{ s}^{-1}$ , 考虑如下 4 种工况: 1)  $K_x = 0.0002, K_y = 0.0002$ , 计算结果见图 2; 2)  $K_x = 0.0002, K_y = 0.0003$ , 计算结果见图 3; 3)  $K_x = 0.0003, K_y = 0.0002$ , 计算结果见图 4; 4)  $K_x = 0.0003, K_y = 0.0003$ , 计算结果见图 5。在每种工况中, 分别计算基岩位于第 1 层、第 2 层和第 3 层介质底部时地面位移响应的功率谱密度, 并分别以点线、虚线和实线表示。

图 2 和图 5 表明, 在工况 1 和工况 4 中, 地面响应  $u$  和  $v$  的功率谱密度相同。这是因为基岩  $x$  和  $y$  方向的波数和激励相同。比较图 3 和图 4 可以看出, 工况 2 中地面响应  $u, v, w$  的功率谱密度和工况 3 中地面响应  $v, u, w$  的功率谱密度分别相同, 这是因为工况 2 中基岩  $x, y$  方向的波数和激励与工况 3 中基岩  $y, x$  方向的波数和激励相同, 而且两种情况中沿  $z$  方向的激励相同。图 2 至图 5 均表明, 基岩离地面越远, 地面响应就越小。

表 2 列出了各种工况的响应功率谱最大值  $S_{\max}$  和对应的频率  $\omega_{\max}$ 。该表表明  $u$  和  $v$  的  $S_{\max}$  对应的  $\omega_{\max}$  相等, 但不同于  $w$  的  $S_{\max}$  对应的  $\omega_{\max}$ 。这是因为介质为横观各向同性, 位移  $u$  和  $v$  相耦合, 但它们与位移  $w$  并不耦合的缘故。

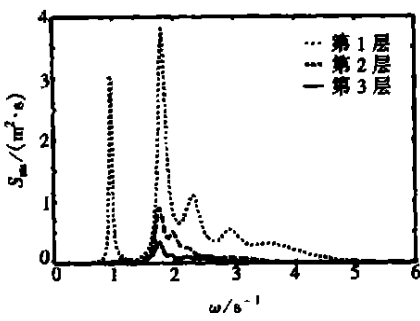


图 2(a) 工况 1  $u$  的功率谱密度

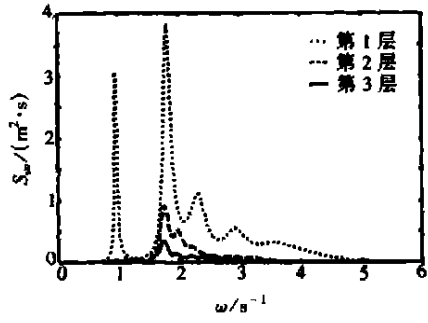


图 2(b) 工况 1  $v$  的功率谱密度

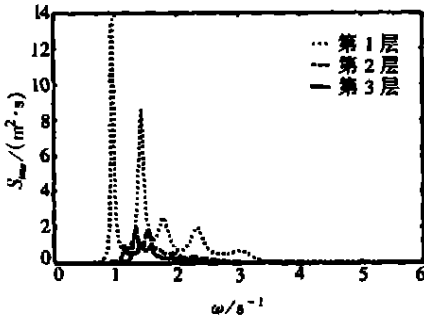


图 2(c) 工况 1  $w$  的功率谱密度

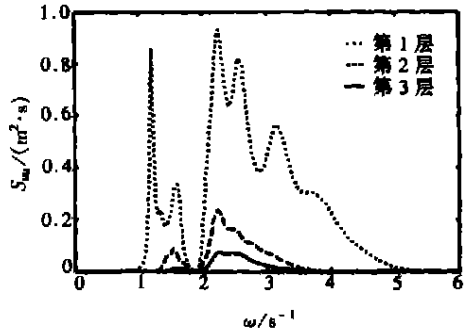


图 3(a) 工况 2  $u$  的功率谱密度

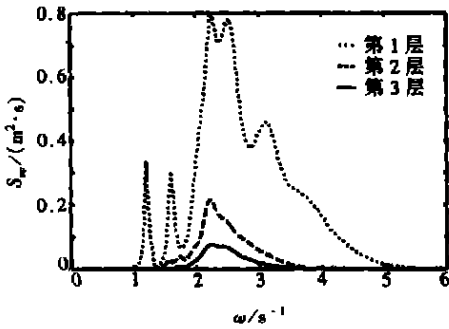


图 3(b) 工况 2  $v$  的功率谱密度

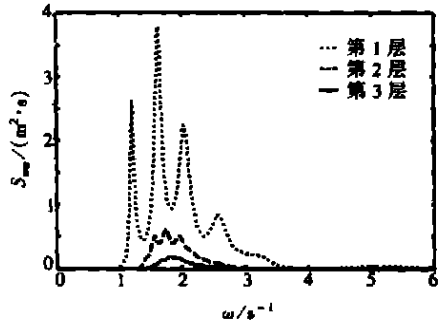


图 3(c) 工况 2  $w$  的功率谱密度

表 2

响应功率谱密度的最大值及其对应的频率

层数	位移	工况 1		工况 2		工况 3		工况 4	
		$\omega_{max}$	$S_{max}$	$\omega_{max}$	$S_{max}$	$\omega_{max}$	$S_{max}$	$\omega_{max}$	$S_{max}$
1	$u$	1.80	3.844 4	2.24	0.932 4	2.24	0.797 1	2.74	0.498 1
	$v$	1.80	3.844 4	2.24	0.797 1	2.24	0.932 4	2.74	0.498 1
	$w$	0.96	13.657 1	1.62	3.791 6	1.62	3.791 6	1.78	1.737 6
2	$u$	1.76	0.908 9	2.22	0.233 1	2.22	0.215 6	2.64	0.065 4
	$v$	1.76	0.908 9	2.22	0.215 6	2.22	0.233 1	2.64	0.065 4
	$w$	1.32	2.077 4	1.74	0.616 8	1.74	0.616 8	1.92	0.223 0
3	$u$	1.74	0.348 16	2.26	0.073 9	2.26	0.076 1	2.66	0.018 1
	$v$	1.74	0.348 16	2.26	0.076 1	2.26	0.073 9	2.66	0.018 1
	$w$	1.40	1.085 3	1.80	0.186 0	1.80	0.186 0	2.14	0.046 3



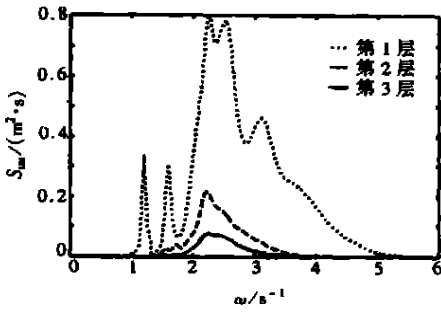


图 4(a) 工况 3  $u$  的功率谱密度

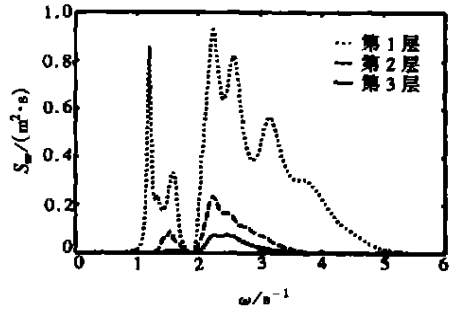


图 4(b) 工况 3  $v$  的功率谱密度

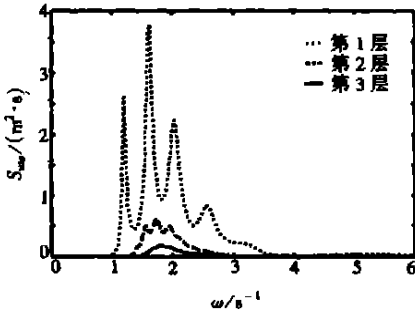


图 4(c) 工况 3  $w$  的功率谱密度

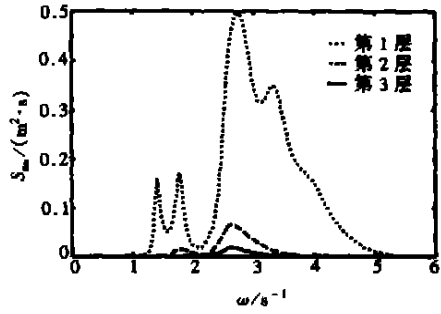


图 5(a) 工况 4  $u$  的功率谱密度

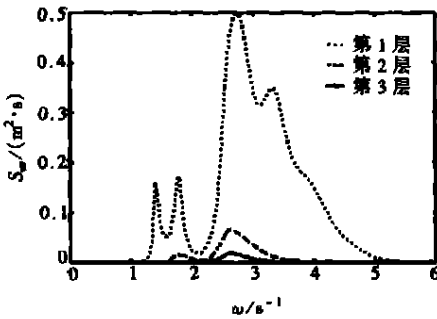


图 5(b) 工况 4  $v$  的功率谱密度

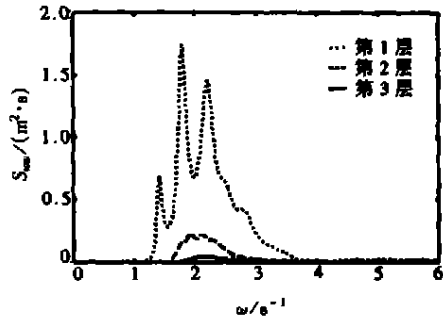


图 5(c) 工况 4  $w$  的功率谱密度

## 8 结 论

本文研究了平稳随机波在三维各向同性粘弹性分层介质中的传播问题，提出了联合应用精细积分法和虚拟激励法的数值方法。虚拟激励法将随机波传播问题转化为确定性常微分方程的两端边值问题，然后应用精细积分法精确求解，给出了基岩平稳随机激励下地面响应的功率谱密度。不但处理了基岩作均匀运动的情况(相当于  $k_x = k_y = 0$ )；还处理了基岩的行波效应(相当于  $k_x \neq 0$  或  $k_y \neq 0$ )。得到的是计算机上高度精确的数值解。

### [参 考 文 献]

- [1] Ewing W M, Jardetzky W S, Press F. Elastic Waves in Layered Media [M]. New York: McGraw\_Hill, 1957.
- [2] Brekhovskikh L M. Waves in Layered Media [M]. New York: Academic Press, 1980.

- [3] Aki K, Richards P G. Quantitative Seismology [M]. San Francisco: W H Freeman and Company, 1980.
- [4] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity [M]. New York: McGraw\_Hill, 1951.
- [5] Graff K F. Wave Motion in Elastic Solids [M]. Oxford: Clarendon Press, 1975.
- [6] Achenback J D. Wave Propagation in Elastic Solids [M]. Amsterdam: the North\_Holland, 1973.
- [7] Doyle J F. Wave Propagation in Structures [M]. New York: Springer, 1989.
- [8] Rizzi S A, Doyle J F. Spectral analysis of wave motion in plane solids with boundaries [J]. Trans ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1992, **114**(2): 133—140.
- [9] Rizzi S A, Doyle J F. Spectral element approach to wave motion in layered solids [J]. Trans ASME Journal of Vibration and Acoustics, 1992, **114**(4): 569—577.
- [10] Alshaiikh I A B U, Turhan D, Mengi Y. Two dimensional transient wave propagation in viscoelastic layered media [J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, **244**(5): 837—858.
- [11] Gulyayev V I, Lugovyy P Z, Ivanchenko G M. Discontinuous wave fronts propagation in anisotropic layered media [J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, **40**(1): 237—247.
- [12] Verma K L. On the propagation of waves in layered anisotropic media in generalized thermoelasticity [J]. International Journal of Engineering Science, 2002, **40**(20): 2077—2096.
- [13] Caviglia G, Morro A. Reflection and transmission in anisotropic dissipative multilayers [J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2002, **21**(16): 1055—1067.
- [14] Caviglia G, Morro A. Riccati equations for wave propagation in planarly stratified solids [J]. European Journal of Mechanics A/Solids, 2000, **19**(4): 721—741.
- [15] Caviglia G, Morro A. Wave propagation in multilayered anisotropic solids [J]. International Journal of Engineering Science, 2000, **38**(8): 847—863.
- [16] Thomson C J. Modelling surface waves in anisotropic structures—I: Theory [J]. Physics of Earth and Planetary Interiors, 1997, **103**(3): 195—206.
- [17] ZHANG Jian\_feng, LI You\_ming. Numerical simulation of elastic wave propagation in inhomogeneous media [J]. Wave Motion, 1997, **25**(12): 109—125.
- [18] Vashishth A K, Khurana P. Inhomogeneous waves in anisotropic porous layered overlying solid bedrock [J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, **258**(4): 577—594.
- [19] Khoury R A L, Scarpas A, Kasbergen C, et al. Spectral element technique for efficient parameter identification of layered media—Part III: Viscoelastic aspects [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, **39**(8): 2189—2201.
- [20] Khoury R A L, Kasbergen C, Scarpas A, et al. Poroelastic spectral element for wave propagation and parameter identification in multi\_layer systems [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, **39**(15): 4073—4091.
- [21] ZHONG Wan\_xie. The method of precise integration of finite strip and wave guide problems [A]. In: Lee P K K, Tham L G, Cheung Y K Eds. Proceeding of International Conference on Computational Methods in Structural and Geotechnical Engineering [C]. Hong Kong: China Translation & Printing Services Ltd, 1994, 51—59.
- [22] LIN Jia\_hao. A fast CQC algorithm of PSD matrices for random seismic responses [J]. Computers and Structures, 1992, **44**(3): 683—687.
- [23] LIN Jia\_hao, Williams F W, ZHANG Wen\_shou. A new approach to multiphase\_excitation stochastic seismic response [J]. Microcomputers in Civil Engineering, 1993, **8**(4): 283—290.
- [24] Williams F W, Bennett P N, LIN Jia\_hao. Localization investigation of stationary random wave transmission along damped ordered structural chains [J]. Proc Inst Mech Engrs, Part C, 1997, **211**: 217—

228.

- [25] LIN Jia\_hao, FAN Yue, Bennett P N, et al. Propagation of stationary random waves along substructural chains[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 1995, **180**(5): 757—767.
- [26] LIN Jia\_hao, ZHANG Wen\_shou, LI Jian\_jun. Structural responses to arbitrarily coherent stationary random excitations[J]. Computers and Structures, 1994, **50**(5): 629—633.
- [27] Kennett B L N. Seismic Wave Propagation in Stratified Media [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
- [28] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

## Stationary Random Waves Propagation in 3D Viscoelastic Stratified Solid

GAO Qiang, LIN Jia\_hao

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,  
Dalian University of Technology, Dalian 116023, P. R. China)

**Abstract:** Propagation of stationary random waves in viscoelastic stratified transverse isotropic materials is investigated. The solid was considered multi-layered and located above the bedrock, which was assumed to be much stiffer than the soil, and the power spectrum density of the stationary random excitation was given at the bedrock. The governing differential equations are derived in frequency and wave\_number domains and only a set of ordinary differential equations (ODEs) must be solved. The precise integration algorithm of two\_point boundary value problem was applied to solve the ODEs. Thereafter, the recently developed pseudo\_excitation method for structural random vibration is extended to the solution of the stratified solid responses.

**Key words:** layered material; precise integration; pseudo\_excitation method; wave propagation; random vibration