应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 06_0749_08

平面弹性裂纹分析的一种有效边界元方法*

闫相桥

(哈尔滨工业大学 复合材料研究所, 哈尔滨 150001)

(王彪推荐)

摘要: 提出了一种简单而有效的平面弹性裂纹应力强度因子的边界元计算方法• 该方法由 Crouch 与 Starfield 建立的常位移不连续单元和闫相桥最近提出的裂尖位移不连续单元构成• 在该边界元方法的实施过程中, 左、右裂尖位移不连续单元分别置于裂纹的左、右裂尖处, 而常位移不连续单元则分布于除了裂尖位移不连续单元占据的位置之外的整个裂纹面及其它边界• 算例(如单向拉伸无限大板中心裂纹、单向拉伸无限大板中圆孔与裂纹的作用)说明平面弹性裂纹应力强度因子的边界元计算方法是非常有效的• 此外, 还对双轴载荷作用下有限大板中方孔分支裂纹进行了分析• 这一数值结果说明平面弹性裂纹应力强度因子的边界元计算方法对有限体中复杂裂纹的有效性, 可以揭示双轴载荷及裂纹体几何对应力强度因子的影响•

关 键 词: 应力强度因子; 边界元; 位移不连续; 裂纹尖端单元
中图分类号: TB33 文献标识码: A

引 言

针对线弹性断裂力学问题, 已经提出了几种边界元数值计算方法• 不同方法的主要差异在于裂尖附近奇异应力场的模拟及裂纹面模拟上• 利用标准的边界元法分析裂纹问题, 把裂纹作为上下裂纹面很近的裂隙来处理, 这导致病态的方程[1]• 为避免这一限制, 人们提出了几种不同的边界元列式• 首先, Cruse[2] 提出格林函数法• 这一方法的优点是避免了裂纹面的模拟, 而且精度很高, 但它仅限于可以求得分析格林函数解的十分简单的裂纹几何体• 其次是多区域技术[3]• 这一技术的优点在于可以模拟任意几何形状的裂纹, 但其缺点是显而易见的: 将原分析区域人为地划分为多区域导致庞大的方程组• 第三是位移不连续法[4]• 这一方法非常适合于分析无限大区域中的裂纹问题, 因为此类问题不存在非裂纹边界• 然而, 它对有限域中裂纹问题也许无效[5]• 第四是双重边界元法[6,7]• 按照这种方法, 对非裂纹边界及一个裂纹面采用位移积分方程, 而对另一个裂纹面采用力积分方程• 关于裂尖附近奇异应力场的模拟, 人们或采用裂尖奇异元[8], 或采用四分之一单元[3], 或通过在裂尖附近细化单元的方法, 其细

* 收稿日期: 2003_09_05; 修订日期: 2004_12_17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272037)
作者简介: 闫相桥(1959—), 男, 河北东光人, 教授, 博导, 博士(Tel: + 86_451_86402367; Fax: + 86_451_86402345; E_mail: Yanxiangqiao@hotmail.com)•

节见文献[9~ 11]•

最近笔者为了模拟裂尖附近奇异应力场提出了裂尖位移不连续单元[12], 并给出根据裂尖位移不连续单元中点处的位移不连续量计算应力强度因子的简单公式• 本文尝试把笔者提出的裂尖位移不连续单元与 Crouch 与 Starfield[4] 建立的常位移不连续单元结合到一起, 以提出一种不论对无限大体还是对有限体中平面弹性裂纹均适用的边界元方法• 在该边界元方法的实施过程中, 左、右裂尖位移不连续单元分别置于裂纹的左、右裂尖处, 而常位移不连续单元则分布于除了裂尖位移不连续单元占据的位置之外的整个裂纹面及其它边界• 文中算例(如单向拉伸无限大板中心裂纹、单向拉伸无限大板中圆孔与裂纹的作用) 说明平面弹性裂纹应力强度因子的边界元计算方法是非常有效的• 此外, 本文还关注双轴载荷作用下矩形板中方孔分支裂纹的应力强度因子• 就笔者所知, 这一裂纹问题的解答尚未得到• 与此研究有接近之处的有 Kitagawa 与 Yuuki[13] 利用复变应力函数法, 获得单轴载荷作用下矩形板中圆孔分支裂纹的应力强度因子, 及 Murakami[14] 利用体力法, 获得单轴载荷作用下无限大板中方孔分支裂纹的应力强度因子, 见文献[15]• 这一数值结果证明, 本文提出的平面弹性裂纹应力强度因子的边界元数值计算方法, 对有限体中复杂裂纹的有效性, 可以揭示双轴载荷及裂纹体几何对应力强度因子的影响•

1 数值方法

本节扼要描述平面弹性裂纹分析的边界元法, 该方法由常位移不连续单元[4] 和笔者最近提出的裂尖位移不连续单元[12] 构成•

1.1 常位移不连续边界元法之简介[4]

无限大平面体中在位置 $|x| < a, y = 0$ 处具有常位移不连续量 $D_i = (D_x, D_y)$, 其定义为[4]:

$$\begin{cases} D_x = u_x(x, 0_-) - u_x(x, 0_+), \\ D_y = u_y(x, 0_-) - u_y(x, 0_+), \end{cases} \qquad |x| < a, y = 0 \tag{1}$$

由于位移 u_x 和 u_y 沿坐标 x 和 y 方向为正, 故位移不连续量 D_x 和 D_y 沿图 1 所示方向为正•

此问题的解答是由 Crouch 与 Starfield[4] 获得的, 位移场和应力场为:

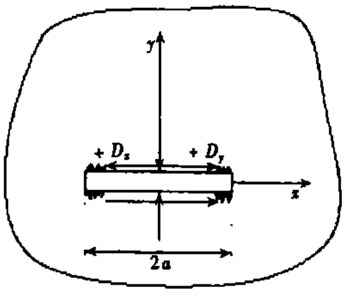
$$\begin{cases} u_x = D_x[2(1-\nu)F_3(x,y) - yF_5(x,y)] + \\ \qquad D_y[-(1-2\nu)F_2(x,y) - yF_4(x,y)], \\ u_y = D_x[2(1-\nu)F_2(x,y) - yF_4(x,y)] + \\ \qquad D_y[2(1-\nu)F_3(x,y) - yF_5(x,y)]; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2GD_x[2F_4(x,y) + yF_6(x,y)] + 2GD_y[-F_5(x,y) + yF_7(x,y)], \\ \sigma_{yy} = 2GD_x[-yF_6(x,y)] + 2GD_y[-F_5(x,y) - yF_7(x,y)], \\ \sigma_{xy} = 2GD_x[-F_5(x,y) + yF_7(x,y)] + 2GD_y[-yF_6(x,y)]; \end{cases} \tag{3}$$

其中 G 和 ν 为材料剪切模量和波松比, 函数 $F_2, \cdots, F_7$ 见文献[4]• Crouch 与 Starfield[4] 利用方程(2) 和(3) 建立了常位移不连续边界元法•

1.2 裂尖位移不连续单元

最近笔者基于无限大平面体中常位移不连续的分析解[4], 提出了裂尖位移不连续单元[12] (可分为左、右裂尖位移不连续单元), 以模拟裂尖附近的应力奇异场• 下面给出左裂尖位移不连续单元的基本公式•



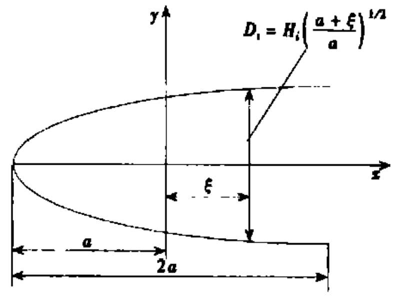


图 1　常位移不连续量 D_x、D_y 的示意图　　图 2　左裂尖位移不连续单元的示意图

图 2 给出的是左裂尖位移不连续单元的示意图, 其位移不连续函数可取为:

$$D_x = H_s\left(\frac{a+\xi}{a}\right)^{1/2},\quad D_y = H_n\left(\frac{a+\xi}{a}\right)^{1/2}, \tag{4}$$

其中 H_s 和 H_n 分别为裂尖单元中点处的切向和法向位移不连续量. 在这里注意到裂尖位移不连续单元与常位移不连续单元具有相同的未知量, 即两个, 但由式(4)定义的位移不连续函数可以模拟裂尖附近的位移场, 从而可以模拟裂尖附近的 $r^{-1/2}$ 应力奇异性.

基于无限大平面体中常位移不连续的分析解[4], 根据微积分学的理论, 易于求得由式(4)定义的裂尖位移不连续函数引起的在点 (x, y) 处的位移场和应力场[12]:

$$\begin{cases} u_x = H_s[2(1-\nu)B_3(x,y) - yB_5(x,y)] + \\ \qquad H_n[-(1-2\nu)B_2(x,y) - yB_4(x,y)], \\ u_y = H_s[2(1-\nu)B_2(x,y) - yB_4(x,y)] + \\ \qquad H_n[2(1-\nu)B_3(x,y) - yB_5(x,y)]; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = 2GH_s[2B_4(x,y) + yB_6(x,y)] + 2GH_n[-B_5(x,y) + yB_7(x,y)], \\ \sigma_{yy} = 2GH_s[-yB_6(x,y)] + 2GH_n[-B_5(x,y) - yB_7(x,y)], \\ \sigma_{xy} = 2GH_s[-B_5(x,y) + yB_7(x,y)] + 2GH_n[-yB_6(x,y)]; \end{cases} \tag{6}$$

其中函数 $B_2(x, y) \sim B_7(x, y)$ 可见文献[12].

把方程(5)和(6)与方程(2)和(3)比较可以看出, 由裂尖位移不连续单元引起的位移场和应力场, 与由常位移不连续单元引起的位移场和应力场具有相同的形式, 只要将方程(2)和(3)中的 $F_i(x, y)$ $(i = 2, 3, \cdots, 7)$ 替代为 $B_i(x, y)$ $(i = 2, 3, \cdots, 7)$, 将 D_x 和 D_y 分别替代为 H_s 和 H_n 即可. 这使得该边界元法容易实施.

对右裂纹尖端有与方程(4)~(6)类似的方程, 这里不再列出.

表 1　单轴载荷作用下无限大板中心裂纹应力强度因子随单元数目的变化

单元数目	3	5	7	10	15	25
$K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$	0.962 1	0.977 5	0.983 8	0.988 5	0.992 1	0.995 0

表 2　单轴载荷作用下无限大板中心裂纹应力强度因子随裂尖单元尺寸 a_{cra} 与普通单元尺寸 a_{con} 之比的变化

$a_{\mathrm{cra}}/a_{\mathrm{con}}$	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1.00
$K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$	1.204 8	1.169 0	1.139 4	1.114 3	1.092 8	1.074 2	1.057 8	1.043 3	1.030 3
$a_{\mathrm{cra}}/a_{\mathrm{con}}$	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45
$K_{\mathrm{I}}/(\sigma\sqrt{\pi a})$	1.018 6	1.008 0	0.998 4	0.989 6	0.981 5	0.974 1	0.967 1	0.960 7	0.954 7

1.3 数值方法的实施

Crouch 与 Starfield[4] 利用方程(2)、(3)建立了常位移不连续边界元法• 本文可以类似地利用方程(5)、(6)针对裂尖单元建立边界元方程，进而在把 Crouch 与 Starfield 建立的常位移不连续单元与笔者提出的裂尖位移不连续单元，有机地结合在一起，以建立一种不仅对无限大体中平面裂纹问题，而且对有限体中平面裂纹问题均适用的边界元法• 在该边界元方法的实施过程中，左、右裂尖位移不连续单元分别置于裂纹的左、右裂尖处，而常位移不连续单元，则分布于除了裂尖位移不连续单元占据的位置之外的整个裂纹面及其它边界•

2 应力强度因子的计算公式及算例

线弹性裂纹分析的主要目标是确定裂纹尖端的应力强度因子 K_{I} 和 K_{II}• 基于裂尖附近的位移场，有下列公式[12]：

$$K_{\mathrm{I}} = -\frac{\sqrt{2\pi}GH_{\mathrm{n}}}{2(1-\nu)\sqrt{a}},\quad K_{\mathrm{II}} = -\frac{\sqrt{2\pi}GH_{\mathrm{s}}}{2(1-\nu)\sqrt{a}}. \tag{7}$$

为了证明本文提出的边界元法对分析线弹性平面裂纹问题的有效性，下面列举一些算例•

2.1 无限大板中心裂纹

首先对单轴载荷作用下无限大板中心裂纹进行分析• 设裂纹长度为 $2a$，无限远处作用的载荷集度为 σ• 由于此问题的对称性可取其一半来分析• 表 1 给出的是应力强度因子 K_{I} 的数值解与精确解之比随单元数目的变化，在计算中取裂尖单元尺寸与普通单元尺寸相同• 表 2 给出的应力强度因子随裂尖单元尺寸与普通单元尺寸之比的变化，在这一计算中取单元的总数目为 11，即 10 个普通单元和 1 个裂尖单元• 由表 1 可见，利用本文建立的杂交位移不连续边界元法，对此裂纹问题获得的应力强度因子的数值解与其精确解吻合的很好• 由表 2 可见，取裂尖单元尺寸与普通单元单元尺寸之比大致为 0.9~ 1.3 才能获得较好的数值结果，这可作为本文提出方法的限制条件• 在下面的算例中，取裂尖单元与普通单元具有大致相同的大小•

2.2 无限大板中圆孔与裂纹

第二，对单轴载荷作用下无限大板中一个圆孔和一个裂纹(见图 3)的作用进行分析• 在本分析中，考虑下列情况：

$$R/a = 2,\quad b/a = 3.2,\ 3.5,\ 4,\ 5,\ 8.$$

关于边界单元的划分，在裂纹和圆孔边界上划分的单元数目分别为 200 和 800• 在裂纹尖端 A 和 B 处的应力强度因子 $K_{\mathrm{I}A}$ 和 $K_{\mathrm{I}B}$ 归一化为：

$$F_A = K_{\mathrm{I}A}/(\sigma\sqrt{\pi a}),$$

$$F_B = K_{\mathrm{I}B}/(\sigma\sqrt{\pi a}),$$

其数值结果见表 3• 为了比较，表 3 也给出了 Erdogan 等人[16] 利用奇异积分方程法获得的数值解•

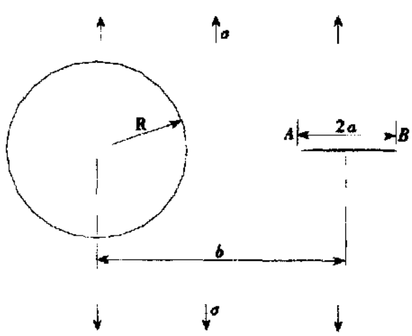


图 3 单轴载荷作用下无限大板中一个圆孔洞和一个裂纹

对 $b/a = 3.5$, $R/a = 2$ 这一情况，研究了单元划分对数值结果的影响• 把在裂纹和圆孔边界上划分的单元数目分别用 n_{cra} 和 n_{cir} 来表示，表 4 给出了应力强度因子随单元划分数目的变化•

表 3　无限大板中一个圆孔洞和一个裂纹作用的应力强度因子

b/a	3.2		3.5		4		5		8	
	F_A	F_B	F_A	F_B	F_A	F_B	F_A	F_B	F_A	F_B
本文	2.2650	1.4149	1.7173	1.2887	1.3918	1.1871	1.1732	1.1007	1.0438	1.0326
文献[16]	2.274	1.417	1.722	1.290	1.394	1.188	1.174	1.102	1.045	1.033
相对误差 $\eta/(\%)$	0.4	0.1	0.3	0.1	0.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.0

表 4　无限大板中一个圆孔洞和一个裂纹作用的应力强度因子随单元划分数目的变化

n_{cra}	25	50	75	150	
n_{cir}	100	200	300	600	
F_A	1.6954	1.7082	1.7111	1.7181	1.722(文献[16])
相对误差 $\eta/(\%)$	1.5	0.8	0.6	0.2	
F_B	1.2826	1.2862	1.2864	1.2890	1.290(文献[16])
相对误差 $\eta/(\%)$	0.6	0.3	0.3	0.1	

从表 3 和表 4 可见, 本数值方法对分析此类孔洞与裂纹的作用问题是非常有效的•

3　矩形板中方孔裂纹分析

本节利用本文提出的边界元方法, 分析双向载荷作用下矩形板中方孔分支裂纹问题, 如图 4 所示•　这一数值结果说明, 平面弹性裂纹应力强度因子的边界元计算方法, 对有限体中复杂裂纹的有效性, 可以揭示双轴载荷及裂纹体几何对应力强度因子的影响•

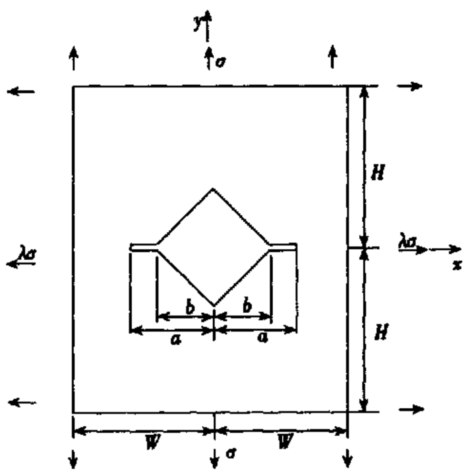


图 4　双轴载荷作用下矩形板中方孔分支裂纹

对这一裂纹问题, 可以利用关于 x 轴和 y 轴的对称性条件•　为了说明本节所获结果的准确性, 首先考虑下列情况:

$$\lambda = 0,\quad b/W = 0.1,\quad a/b = 1.1,$$

这可看作无限大板中方孔裂纹问题•　关于边界单元的划分, 在四分之一方孔边界上划分 100 个单元, 在其它边界上按照上面所述的所有单元具有大致相同尺寸的限制条件划分•　其归一化应力强度因子(归一化因子为 $\sigma\sqrt{\pi a}$)列于表 5 中•　为了比较, 表 5 还列出了文献[15]报道的结果•　由表 5 可见本数值结果与文献[15]报道的结果非常一致•

表 5　方孔裂纹的应力强度因子

	$W/b = H/b = 10$	无限大板[15]
$a/b = 1.1$	1.0864	1.07

进而考虑下列情况•　载荷参数 λ 取为

$$\lambda = 0, 1, -1•$$

选取两种几何参数

$H/W = 1, \quad b/W = 0.25,$

$a/W = 0.26, 0.27, 0.28, 0.29, 0.30, 0.35, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.85, 0.90;$

$H/W = 1, \quad b/W = 0.50,$

$a/W = 0.51, 0.52, 0.525, 0.53, 0.54, 0.55, 0.60, 0.70, 0.78, 0.85, 0.90.$

关于边界单元的划分, 在四分之一方孔边界上划分的单元数目分别是 100、200, 在其它边界上按照上面所述的所有单元具有大致相同尺寸的限制条件划分. 本问题的归一化应力强度因子(归一化因子为 $\sigma\sqrt{\pi a}$) 的数值结果列于表 6、7 中. 从表 6、7 可见, 载荷参数 λ 和裂纹体几何对应力强度因子的影响为:

1) 对于非常小的裂纹, 载荷参数 λ 对应力强度因子的影响是很明显的. 例如, 对于$(b/W = 0.25, a/W = 0.26)$ 和$(b/W = 0.5, a/W = 0.51)$ 两种情况, $\lambda = -1$ 时的应力强度因子比 $\lambda = 0$ 时应力强度因子分别大 26.5% 和 45.1%.

2) 随着 a/W 增加, 这种影响减小. 例如, 对于$(b/W = 0.25, a/W = 0.9)$ 和$(b/W = 0.5, a/W = 0.9)$ 两种情况, $\lambda = -1$ 时的应力强度因子比 $\lambda = 0$ 时应力强度因子分别大 1.8% 和 13.4%.

表 6 双轴载荷作用下矩形板中方孔分支裂纹的应力强度因子 $(b/W = 0.25)$

a/W	λ		
	0	1	−1
0.26	1.197 4	1.880 6	1.514 2
0.27	1.232 0	1.922 8	1.541 2
0.28	1.250 3	1.952 1	1.548 5
0.29	1.263 4	1.976 5	1.550 3
0.30	1.274 3	1.998 3	1.550 3
0.35	1.322 2	1.091 1	1.553 3
0.40	1.374 3	1.174 1	1.574 5
0.50	1.502 1	1.340 1	1.664 1
0.60	1.662 2	1.524 7	1.799 7
0.70	1.865 7	1.750 9	1.980 5
0.80	2.168 1	2.080 7	2.255 5
0.85	2.414 8	2.344 3	2.485 3
0.90	2.833 7	2.784 1	2.883 3

表 7 双轴载荷作用下矩形板中方孔分支裂纹的应力强度因子 $(b/W = 0.5)$

a/W	λ		
	0	1	−1
0.51	1.821 7	1.999 6	2.643 8
0.52	1.902 0	1.060 0	2.744 0
0.525	1.930 3	1.084 1	2.776 5
0.53	1.955 1	1.106 4	2.803 8
0.54	1.998 8	1.148 1	2.849 5
0.55	2.038 2	1.187 8	2.888 6
0.60	2.213 7	1.378 0	3.049 4
0.70	2.557 5	1.780 3	3.334 7
0.78	2.853 7	2.156 4	3.551 0
0.85	3.167 6	2.580 9	3.754 3
0.90	3.511 0	3.041 4	3.980 6

4 结 论

本文提出了一种平面弹性裂纹应力强度因子的边界元计算方法. 算例说明本数值方法对平面弹性裂纹问题既简单而又有效. 此外, 本文还对双轴载荷作用下矩形板中方孔分支裂纹问题进行了分析, 这一数值结果说明本数值方法对有限体中复杂裂纹的有效性, 可以揭示双轴载荷及裂纹体几何对应力强度因子的影响.

[参 考 文 献]

[1] Cruse T A. Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by boundary integral equation method[A]. In: Swedlow J L Ed. Surface Cracks Physics Problems and Computational Solutions

[C]. New York: ASME, 1972, 153—170.

[2] Cruse T A. Two dimensional BIE fracture mechanics analysis[J]. Appl Math Modeling, 1978, **2**(3): 287—293.

[3] Blandford G E, Ingraffea A R, Liggett J A. Two_dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1981, **17**(4): 387—404.

[4] Crouch S L, Starfield A M. Boundary Element Method in Solid Mechanics[M]. London: Geore Allon & Unwin, 1983, 79—109.

[5] Pan E. A general boundary element analysis of 2_D linear elastic fracture mechanics[J]. Internat J Fracture, 1997, **28**(1): 41—59.

[6] Portela A, Aliabadi M H, Rook D P. The dual boundary element method: effective implementation for crack problems[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1992, **33**(12): 1269—1287.

[7] Mi Y, Aliabadi M H. Dual_boundary element method for three dimensional fracture mechanics analysis[J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 1992, **10**(2): 161—171.

[8] Tanaka M, Itoh H. New crack elements for boundary element analysis of elastostatics considering arbitrary stress singularities[J]. Appl Math Modelling, 1987, **11**(4): 357—363.

[9] Cruse T A. Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics[M]. Dordrecht: Kluwer, 1989, 1—120.

[10] Aliabadi M H, Rooke D P. Numerical Fracture Mechanics[M]. Southampton: Computational Mechanics Publications and Dordrecht: Kluwer, 1991, 1—150.

[11] Aliabadi M H. Boundary element formulation in fracture mechanics[J]. Applied Mechanics Review, 1997, **50**(1): 83—96.

[12] YAN Xiang_qiao. A special crack_tip displacement discontinuity element[J]. Mechanics Research Communications, 2004, **31**(6): 651—659.

[13] Kitagawa H, Yuuki R. Analysis of the non_linear shaped cracks in a finite plate by the conformal mapping method[J]. Trans Japan Soc Mech Engrs, 1977, **43**(376): 4354—4362.

[14] Murakami Y. A method of stress intensity factor calculation for the crack emanating from an arbitrarily shaped hole or the crack in the vicinity of an arbitrarily shaped hole[J]. Trans Japan Soc Mech Engrs, 1978, **44**(378): 423—432.

[15] Murakami Y. Stress Intensity Factors Handbook[M]. New York: Pergamon Press, 1987, 266—267.

[16] Erdogan F, Gupta G D, Ratwani M. Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack[J]. ASME J Appl Mech, 1974, **41**(6): 1007—1013.

An Effective Boundary Element Method for Analysis of Crack Problems in a Plane Elastic Plate

YAN Xiang_qiao
(Research Laboratory on Composite Materials,
Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P.R.China)

Abstract: A simple and effective boundary element method for stress intensity factor calculation for crack problems in a plane elastic plate is presented. The boundary element method consists of the constant displacement discontinuity element presented by Crouch and Starfield and the crack_tip displacement discontinuity elements proposed by YAN Xiao_qiao. In the boundary element implementation the left or the right crack_tip displacement discontinuity element was placed locally at the corresponding left or right each crack tip on top of the constant displacement discontinuity elements that cover the entire crack surface and the other boundaries. Test examples (i.e., a center crack in an infinite plate under tension, a circular hole and a crack in an infinite plate under tension) are included to illustrate that the numerical approach is very simple and accurate for stress intensity factor calculation of plane elasticity crack problems. In addition, specifically, the stress intensity factors of branching cracks emanating from a square hole in a rectangular plate under biaxial loads were analysed. These numerical results indicate the present numerical approach is very effective for calculating stress intensity factors of complex cracks in a 2_D finite body, and are used to reveal the effect of the biaxial loads and the cracked body geometry on stress intensity factors.

Key words: stress intensity factor; boundary element method; displacement discontinuity; crack_tip element