应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 07_0757_06

扰动非线性 Schrödinger 方程组的动力性态*

余 沛[1], 高 平[2], 郭柏灵[3]

(1. 重庆交通学院 计算机与信息学院, 重庆 400074;
2. 广州大学 应用数学系, 广州 510405;
3. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 研究具周期边界条件的扰动非线性 Schrödinger 方程组的动力性态, 首先, 在常值平面上用线性算子的谱对扰动和未扰动系统进行动力性态分析, 然后利用奇异扰动理论和不动点原理证明局部不变流形的存在性.

关 键 词: 非线性 Schrödinger 方程组; 动力性态; 不变流形
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

考虑扰动非线性 Schrödinger 方程组(CNLS)

$$\begin{cases} \mathrm{i}q_{1t} = q_{1xx} + 2[|q_1|^2 + |q_2|^2 - \omega^2]q_1 + \mathrm{i}\varepsilon(\hat{D}_1 q_1 - r_1), \\ \mathrm{i}q_{2t} = q_{2xx} + 2[|q_1|^2 + |q_2|^2 - \omega^2]q_2 + \mathrm{i}\varepsilon(\hat{D}_2 q_2 - r_2), \end{cases} \tag{1}$$

这里 q_j 是关于 x 为 2π 周期的偶函数, r_j 是常数, $\hat{D}_j$ 是有界耗散算子, 被假设具有形式

$$\hat{D}_j q_j = -\alpha_j q_j + \beta_j \hat{B} q_j, \tag{2}$$

其中 α_j 和 β_j 是正常数, $j = 1, 2$, $\hat{B}$ 是 ∂_{xx} (Laplace 算子) 的 Fourier 截断, 且满足

$$\hat{B}\cos(kx) = \begin{cases} -k^2\cos(kx), & k < K, \\ 0, & k \geqslant K, \end{cases} \tag{3}$$

常数 ω 被假定满足条件 $\omega \in (1/2, 1)$, $\varepsilon > 0$ 是一个小扰动参数.

非线性 Schrödinger 方程组描述在光纤通讯系统中, 两正交脉冲包络线在双折射光纤中的发展, 对于它的研究已有部分结果, 见文献[1]至文献[3], 特别地, 在系统可积时, 文献[5]至文献[7]给出线性稳定性的数值分析.

方程(1)是不可积系统, 不能由精确解来分析动力性态, 我们将(1)限制在四维子空间

* 收稿日期: 2004_05_28; 修订日期: 2005_04_15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471046)
作者简介: 余沛(1963—), 女, 重庆人, 副教授(Tel: +86_23_62652818; E_mail: liupei@cquc.edu.cn);
高平(1962—), 女, 云南曲靖人, 教授, 博士(联系人. Tel: +86_20_86551803; E_mail: pinggaow@sohu.com).

$$\Pi_\varepsilon = \left\{ q = (q_1, q_2) \mid q_x = 0 \right\}$$

上,用奇异扰动理论对扰动和非扰动 CNLS 方程的动力性态分析,然后,在不动点球 S_ω 的邻域内建立整个函数空间的方程,并证明局部不变流形的存在性•

1　四维不变子空间上的动力性态

设 $H^1_{e,p}$ 是由偶的 2π 周期函数构成的Sobolev 空间•　用能量方法易证方程(1) 的Cauchy 问题在 $H^1_{e,p}$ 上是适定的,在此略去•

四维子空间 Π_ε 在流(1) 下是不变的, 且方程在 Π_ε 上可写为

$$\begin{cases} \mathrm{i}q_{1t} = 2[\,|q_1|^2 + |q_2|^2 - \omega^2]\,q_1 - \mathrm{i}\varepsilon(\alpha_1 q_1 + r_1), \\ \mathrm{i}q_{2t} = 2[\,|q_1|^2 + |q_2|^2 - \omega^2]\,q_2 - \mathrm{i}\varepsilon(\alpha_2 q_2 + r_2), \end{cases} \tag{4}$$

取极坐标 $q_j = \sqrt{I_j}\exp\theta_j$, $(j = 1, 2)$, 方程(4) 变为

$$\begin{cases} I_{1t} = -2\varepsilon(\alpha_1 I_1 + r_1\sqrt{I_1}\cos\theta_1), \quad \theta_{1t} = -2[I_1 + I_2 - \omega^2] + \varepsilon r_1\sin\theta_1/\sqrt{I_1}, \\ I_{2t} = -2\varepsilon(\alpha_2 I_2 + r_2\sqrt{I_2}\cos\theta_2), \quad \theta_{2t} = -2[I_1 + I_2 - \omega^2] + \varepsilon r_2\sin\theta_2/\sqrt{I_2}\text{•} \end{cases} \tag{5}$$

当 $\varepsilon = 0$ 时,得到无扰动系统在 Π_ε 上的一般解:它由原点 $p = q = 0$ 和三维子流形 $S_\omega = \left\{ (I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) \mid I_1 + I_2 = \omega^2 \right\}$ 构成•

当 $\varepsilon > 0$ 时, 对固定的(δ_1, δ_2), 方程(5) 有3 个不动点分别是原点邻域内的焦点 O_ε, S_ω 邻域内的焦点 P_ε 和鞍点 Q_ε•

将方程(5) 分别在鞍点 $Q_\varepsilon(I_{q1}, \theta_{q1}, I_{q2}, \theta_{q2})$ 和焦点 $P_\varepsilon(I_{p1}, \theta_{p1}, I_{p2}, \theta_{p2})$ 线性化,得到线性化系统的特征值

$$\lambda_q^{(1,2)} = \frac{\sqrt{2\varepsilon\omega}}{2}[(\delta_1 r_1^2 - \alpha_1^2\omega^2\varepsilon_1^2)^{1/2} + (\delta_2 r_2^2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2^2)^{1/2}]^{1/4} - \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$\lambda_q^{(3,4)} = -\frac{\sqrt{2\varepsilon\omega}}{2}[(\delta_1 r_1^2 - \alpha_1^2\omega^2\delta_1^2)^{1/2} + (\delta_2 r_2^2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2^2)^{1/2}]^{1/4} - \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$\lambda_p^{(1,2)} = \mathrm{i}\frac{\sqrt{2\varepsilon\omega}}{2}[(\delta_1 r_1^2 - \alpha_1^2\omega^2\delta_1^2)^{1/2} + (\delta_2 r_2^2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2^2)^{1/2}]^{1/4} - \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$\lambda_q^{(3,4)} = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{2\varepsilon\omega}}{2}[(\delta_1 r_1^2 - \alpha_1^2\omega^2\delta_1^2)^{1/2} + (\delta_2 r_2^2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2^2)^{1/2}]^{1/4} - \frac{\varepsilon}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

于是,当 $\varepsilon > 0$ 时, S_ω 附近的 2 个不动点:鞍点 Q_ε 和焦点 P_ε 分别具有增长率 λ_q 和 λ_p•

引入坐标

$$\tau = \nu t, \quad J_k = I_k - \delta_k\omega^2 = \nu y_k \qquad (\nu = \sqrt{\varepsilon}, k = 1, 2),$$

方程(5) 化为

$$\begin{cases} j_{1\tau} = -2[\alpha_1(\delta_1\omega^2 + \nu y_1) + r_1\sqrt{\delta_1\omega^2 + \nu y_1}\cos\theta_1], \\ \theta_{1\tau} = -2(j_1 + j_2) + \dfrac{\nu r_1}{\sqrt{\delta_1\omega^2 + \nu y_1}}\sin\theta_1, \\ j_{2\tau} = -2[\alpha_2(\delta_2\omega^2 + \nu y_2) + r_2\sqrt{\delta_2\omega^2 + \nu y_2}\cos\theta_2], \\ \theta_{2\tau} = -2(j_1 + j_2) + \dfrac{\nu r_2}{\sqrt{\delta_2\omega^2 + \nu y_2}}\sin\theta_2, \end{cases} \tag{6}$$

将方程(6) 在 $\boldsymbol{y}_q$ 处线性化, 并令 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_q$, 则有

$$\boldsymbol{y}_\tau = \boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{y}_q, \nu)\boldsymbol{y} + o(\boldsymbol{y}^2),$$

其中向量 $\boldsymbol{y} = (j_1, \theta_1, j_2, \theta_2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}_q = (j_{q1}, \theta_{q1}, j_{q2}, \theta_{q2})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{y}_q, \nu)$ 表示 4×4 矩阵, 具有特征值

$$\lambda_{(1,2)} = \frac{\sqrt{2\omega}}{2}\left[(\delta_1 r_1^2 - \alpha_1^2\omega^2\delta_1^2)^{1/2} + (\delta_2 r_2^2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2^2)^{1/2}\right]^{1/4} - \frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_2) + O(\nu^2),$$

$$\lambda_{(3,4)} = -\frac{\sqrt{2\omega}}{2}\left[(\delta_1 r_1^2 - \alpha_1^2\omega^2\delta_1^2)^{1/2} + (\delta_2 r_2^2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2^2)^{1/2}\right]^{1/4} - \frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_2) + O(\nu^2),$$

分别对应特征向量 $\boldsymbol{e}_1(\nu)$、$\boldsymbol{e}_2(\nu)$、$\boldsymbol{e}_3(\nu)$ 和 $\boldsymbol{e}_4(\nu)$, 这些特征向量光滑地依赖于 ν, 这表明 Q_ε 或 $\boldsymbol{y}_q$ 是一鞍点•

注意到 Q_ε 是点 $Q_0 = (j_{01}, \theta_{01}, j_{02}, \theta_{02})$ 的一个 $O(\nu)$ 阶扰动, 其中

$$j_{01} = 0,\quad \theta_{01} = \arctan\frac{\sqrt{r_1^2 - \alpha_1^2\omega^2\delta_1}}{\alpha_1\omega\sqrt{\delta_1}} - \pi,\quad j_{02} = 0,\quad \theta_{02} = \arctan\frac{\sqrt{r_2^2 - \alpha_2^2\omega^2\delta_2}}{\alpha_2\omega\sqrt{\delta_2}} - \pi, \tag{7}$$

而方程(6) 是下面保守系统的一个 $O(\nu)$ 阶扰动•

$$\begin{cases} j_{1\tau} = -2(\alpha_1\delta_1\omega^2 + r_1\omega\sqrt{\delta_1}\cos\theta_1), & \theta_{1\tau} = -2(j_1+j_2), \\ j_{2\tau} = -2(\alpha_2\delta_2\omega^2 + r_2\omega\sqrt{\delta_2}\cos\theta_2), & \theta_{2\tau} = -2(j_1+j_2), \end{cases} \tag{8}$$

这个系统是可积的 Hamiltonian 系统, 具有 Hamiltonian 量

$$\mathcal{H} = -(j_1+j_2)^2 + 2\omega^2(\delta_1\alpha_1\theta_1 + \delta_2\alpha_2\theta_2) + 2\omega(r_1\sqrt{\delta_1}\sin\theta_1 + r_2\sqrt{\delta_2}\sin\theta_2) \tag{9}$$

的 Hamiltonian 形式为

$$j_{1\tau} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta_1},\quad \theta_{1\tau} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial j_1},\quad j_{2\tau} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta_2},\quad \theta_{2\tau} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial j_2},$$

为此, 平衡点球 S_ω 上的 4 条直线被保持下来, 此 4 条直线是(8) 的不动点, 表示为

$$j_1 = j_2,\quad \theta_1 = \pm\arccos\left(-\frac{\alpha_1\sqrt{\delta_1}\,\omega}{r_1}\right),\quad \theta_2 = \pm\arccos\left(-\frac{\alpha_2\sqrt{\delta_2}\,\omega}{r_2}\right), \tag{10}$$

具有特征值

$$\mu_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}\sqrt{\omega(r_1\sqrt{\delta_1}\sin\theta_1 + r_2\sqrt{\delta_2}\sin\theta_2)},\quad \mu_{3,4} = 0• \tag{11}$$

(8) 的两不动直线在流(6) 的扰动下消失, 而另外两直线上的每一点被保持, 且变成 P_ε 或 Q_ε• 当 $r_1\sqrt{\delta_1}\sin\theta_1 + r_2\sqrt{\delta_2}\sin\theta_2 < 0$, (11) 中 $\mu_{1,2}$ 为实数时, 用 l_q 表示(10) 中对应的直线; 当 $r_1\sqrt{\delta_1}\sin\theta_1 + r_2\sqrt{\delta_2}\sin\theta_2 > 0$, $\mu_{1,2}$ 为纯虚数时, 用 l_c 表示(10) 中所对应的直线• 用 l_1 和 l_2 表示(10) 中剩余两直线, 此时(11) 中 $\mu_{1,2} = 0$• 用 Q_0 表示 l_q 上使 $j_1 = j_2 = 0$ 的点, Q_0 有坐标(7)• 由特征值(11), 我们用 $W^{\mathrm{s}}_{\Pi_c}(l_q)$、$W^{\mathrm{u}}_{\Pi_c}(l_q)$ 和 $W^{\mathrm{c}}_{\Pi_c}(l_q)$ 分别表示 Π_c 上 l_q 的二维稳定流形, 不稳定流形和中心流形• 用 $W^{\mathrm{cs}}_{\Pi_c}(l_q)$ 和 $W^{\mathrm{cu}}_{\Pi_c}(l_q)$ 表示 l_q 的三维中心稳定流形和中心不稳定流形• 由于 $W^{\mathrm{c}}_{\Pi_c}(l_q)$ 在流(8) 下是标准双曲型, 它在流(6) 的扰动下不变•

用 $W^{(\mathrm{c},\varepsilon)}_{\Pi_c}(l_q)$ 表示二维局部不变的中心流形, 用 $W^{(\mathrm{cs},\varepsilon)}_{\Pi_c}(l_q)$ 和 $W^{(\mathrm{cu},\varepsilon)}_{\Pi_c}(l_q)$ 表示三维局部不变的中心稳定流形和中心不稳定流形• 用 $W^{\mathrm{s}}_{\Pi_c}(Q_\varepsilon)$ 表示鞍点 Q_ε 的稳定流形, Q_ε 的不稳定流形用 $W^{\mathrm{u}}_{\Pi_c}(Q_\varepsilon)$ 表示, 它是一维的•

2 S_ω 邻域的方程

为了研究不动点球 S_ω 的一个邻域内非线性问题解的动力学行为, 利用 $(J, \theta, \boldsymbol{f})$ 坐标, 这里 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ 满足

$$I_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q_k q_k \mathrm{d}x = \rho_k^2 + \langle f_k f_k \rangle \qquad (k = 1, 2),$$

且 $\boldsymbol{f} \in \Pi_c^{\perp}$, $\langle\cdot\rangle$ 表示一个周期上的空间均值, $\boldsymbol{f}$ 有空间均值零· 再用文献[4] 中的规范变换, S_ω 邻域的方程可写为

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_t = -2\varepsilon[\alpha(\boldsymbol{J}+\delta\omega^2)+\boldsymbol{R}\sqrt{\boldsymbol{J}+\delta\omega^2}\cos\theta]+k_1(\boldsymbol{J},\theta,\boldsymbol{u},\varepsilon), \\ \theta_t = -2\boldsymbol{CJ}+\varepsilon\boldsymbol{R}\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\boldsymbol{J}+\delta\omega^2}}+k_2(\boldsymbol{J},\theta,\boldsymbol{u},\varepsilon), \\ \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{L}_\varepsilon u+\boldsymbol{V}_\varepsilon u+k_3(\boldsymbol{J},\theta,\boldsymbol{u},\varepsilon), \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_\varepsilon = \boldsymbol{J}\partial_{xx} - \varepsilon(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{B}) - 4\omega^2\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{V}_\varepsilon = -4\boldsymbol{JIS}+\varepsilon\boldsymbol{I}g(\boldsymbol{J},\theta)\boldsymbol{J}-4\rho_1\rho_2\boldsymbol{K},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_1 & 0\\ 0 & r_2\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix}\delta_1 & 0\\ 0 & \delta_2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix}\beta_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \beta_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \beta_2\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \delta_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \delta_2 & 0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

3 不变流形

在 S_ω 的一个邻域内, 方程组(12)可视为如下线性系统的一个小扰动

$$\boldsymbol{J}_t = \boldsymbol{0}, \quad \theta_t = -2\boldsymbol{CJ}, \quad \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{L}_\varepsilon \boldsymbol{u}\cdot \tag{13}$$

为研究方程(12)解的局部行为, 分析算子 $\boldsymbol{L}_\varepsilon$ 的谱· 用 Fourier 展开, 可得到特征值 λ 的一个表达式

$$[\lambda+\varepsilon d_1(k)^2+k^2(k^2-4\omega^2\delta_1)][(\lambda+\varepsilon d_2(k))^2+k^2(k^2-4\omega^2\delta_2)] = 0,$$

于是

$$\lambda^{(1)} = -\varepsilon d_1(k)+\mathrm{i}k\sqrt{k^2-4\omega^2\delta_1}, \quad \lambda^{(2)} = -\varepsilon d_2(k)+\mathrm{i}k\sqrt{k^2-4\omega^2\delta_2},$$

其中 $k = 1, 2, 3, \cdots$, 且

$$d_i(k) = \begin{cases}\alpha_i + k^2\beta_i, & k < K\\ \alpha_i, & k \geqslant K\end{cases} \qquad (i = 1, 2)$$

表示 D_i 的符号, 取 $\delta_1 = \delta_2 = 1/2$, $\omega \in (\sqrt{2}/2, 1)$, 则对 $k = 1$, 有

$$\sigma^\varepsilon_{1s,u} = \pm\sigma_1 - \varepsilon d_1(1), \quad \sigma^\varepsilon_{2s,u} = \pm\sigma_2 - \varepsilon d_2(1),$$

且

$$\sigma^\varepsilon_{s,u} = (\sigma^\varepsilon_{1s,u}, \sigma^\varepsilon_{2s,u})^{\mathrm{T}}, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sqrt{2\omega^2-1} > 0\cdot$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 对应于特征值 $\sigma^\varepsilon_{s,u}$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{e}_{s,u} = (e^1_{s,u}, e^2_{s,u}, e^3_{s,u}, e^4_{s,u}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\omega}(1, \mp\sigma_1, 1, \mp\sigma_2)^{\mathrm{T}}\cdot$$

对于 $k \geqslant 2$ 特征值是具有负实部的共轭对,

$$\lambda_k^{(1)} = \pm \mathrm{i}\,\Omega_k - \varepsilon d_1(k), \quad \lambda_k^{(2)} = \pm \mathrm{i}\,\Omega_k - \varepsilon d_2(k),$$

其中 $\Omega_k = k\sqrt{k^2 - 2\omega^2} > 0,\ k = 2, 3, \cdots$•

将零均值函数 $\boldsymbol{u}$ 分解为

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{v}_u e_u(x) + \boldsymbol{v}_s e_s(x) + \boldsymbol{v}_0(x),$$

这里 $\boldsymbol{v}_u$ 和 $\boldsymbol{v}_s$ 是实的向量,

$$\boldsymbol{v}_0(x) \in [\mathrm{span}(\Pi_c, e_u, e_s)]^{\perp}•$$

采用这组变量, 综合中心变量 $\boldsymbol{v}_c = (\boldsymbol{J}, \theta, \boldsymbol{v}_0)^{\mathrm{T}}$, 线性方程组(13) 分解为

$$\boldsymbol{v}_{u,t} = \sigma_u^{\varepsilon}\boldsymbol{v}_u, \quad \boldsymbol{v}_{s,t} = -\sigma_s^{\varepsilon}\boldsymbol{v}_s, \quad \boldsymbol{v}_{c,t} = A\boldsymbol{v}_c, \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{A} = (0, -2C, L\varepsilon)^{\mathrm{T}}$ 由(13) 定义•

在 S_ω 的一个 δ 邻域, 非线性系统(12) 可视为线性方程组(13) 的一个扰动• 在此线性流下, 对于 $\varepsilon = 0$, S_ω 有二维的稳定与不稳定流形, 以及余维数为 4 的中心流形• 现在, 我们的注意力集中在中心流形 $E^{\mathrm{c}}(S_\omega)$, 中心稳定流 $E^{\mathrm{cs}}(S_\omega)$ 与中心不稳定流 $E^{\mathrm{cu}}(S_\omega)$ 上,

$$E^{\mathrm{cs}}(S_\omega) = [\mathrm{span}\{e_u\}]^{\perp}, \quad E^{\mathrm{cu}}(S_\omega) = [\mathrm{span}\{e_s\}]^{\perp}, \quad E^{\mathrm{c}}(S_\omega) = [\mathrm{span}\{e_s, e_u\}]^{\perp}•$$

我们将证明, 对于 $\varepsilon > 0$, 这些不变流形在 S_ω 的一个邻域内被保持下来• 为此, 用局部化函数 $\psi_\sigma(s)$ 局部化方程组(12), 有

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_t = -2\varepsilon[\alpha(\boldsymbol{J}_\sigma + \delta\omega^2) + \boldsymbol{R}\sqrt{\boldsymbol{J}_\sigma + \delta\omega^2}\cos\theta] + K_1(\boldsymbol{J}_\sigma, \theta, \boldsymbol{u}_\sigma, \varepsilon), \\ \theta_t = -2\boldsymbol{C}\boldsymbol{J}_\sigma + \varepsilon\boldsymbol{R}(\boldsymbol{J}_\sigma + \delta\omega^2)^{-1/2}\sin\theta + K_2(\boldsymbol{J}_\sigma, \theta, \boldsymbol{u}_\sigma, \varepsilon), \\ \boldsymbol{u}_t = L_\varepsilon\boldsymbol{u} + [V_\varepsilon\boldsymbol{u}_\sigma + K_3(\boldsymbol{J}_\sigma, \theta, \boldsymbol{u}_\sigma, \varepsilon)], \end{cases} \tag{15}$$

利用 $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_u, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}_c)^{\mathrm{T}}$ 作为变量, 则(15) 能写为

$$\boldsymbol{v}_{u,t} = \sigma_u^{\varepsilon}\boldsymbol{v}_u + R_u^{\sigma}(\boldsymbol{v}, \varepsilon), \quad \boldsymbol{v}_{s,t} = -\sigma_u^{\varepsilon}\boldsymbol{v}_s + R_s^{\sigma}(\boldsymbol{v}, \varepsilon), \quad \boldsymbol{v}_{c,t} = A\boldsymbol{v}_c + R_c^{\sigma}(\boldsymbol{v}, \varepsilon), \tag{16}$$

其中 $R^{\sigma}(\boldsymbol{v}, \varepsilon)$ 及其一阶导数是 $O(\sigma + \varepsilon)$ 阶的•

这种局部化方程组有 C^l 不变流形, 它们是 E^{cs}、E^{cu} 和 E^{c} 的光滑变形• 反过来, 对原来的方程组, 这些流形将在 S_ω 的 σ 邻域内局部不变•

定理 1 存在 S_ω 的一个 σ 邻域 U_σ, 一个 $\varepsilon_0(\sigma) > 0$ 和一个整数 $l > 3$, 使得: $\forall\, \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, 方程组(12) 在 U_σ 中有一个余维数为 2 的局部不变流形•

$$W_\varepsilon^{\mathrm{cs}} = \left\{\boldsymbol{v} \in H^1 \mid \boldsymbol{v}_u = h_u(\boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{v}_c; \varepsilon)\right\},$$

这里 h_u 关于它的所有标量是 C^l 的, 且是 θ 的 2π 周期函数• 进而, 对于 $\varepsilon = 0$, W_0^{cs} 沿 S_ω 与 E^{cs} 切向相交•

类似地, 有局部不变流形

$$W_\varepsilon^{\mathrm{cu}} = \left\{\boldsymbol{v} \in H^1 \mid \boldsymbol{v}_s = h_s(\boldsymbol{v}_u, \boldsymbol{v}_c; \varepsilon)\right\},$$

其中 h_s 关于它的所有标量是 C^l 的, 且是 θ 的 2π 周期函数• 进而, 当 $\varepsilon = 0$, W^{cu} 沿 S_ω 与 E^{cu} 切向相交•

一个余维数为 4 的"慢流形" M_ε 的存在性由以下推论给出:

推论 2 让 M_ε 表示交集

$$M_\varepsilon = W_\varepsilon^{\mathrm{cs}} \cap W_\varepsilon^{\mathrm{cu}},$$

则 M_ε 是一个余维数为 4 的局部不变流形• (在 U_σ 内)

$$M_\varepsilon = \left\{\boldsymbol{v} \in H^1 \mid \boldsymbol{v}_u = h_u^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{v}_c; \varepsilon), \ \boldsymbol{v}_s = h_s^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{v}_c; \varepsilon)\right\},$$

其中函数 h_u^c 和 h_s^c 关于它们的标量是 C^l 的, 且是 θ 的 2π 周期函数· 进而, 当 $\varepsilon = 0$ 时, M 沿 S_ω 与 E^c 切向相交·

定理 1 的证明是用(16)建立积分方程, 应用不动点原理得到, 由于证明过程完全类似文献[4]中定理 5.2 的证明· 这里我们不再重复·

[参 考 文 献]

[1] Ablowitz M J, Ohta Y, Trubatch A D. On discretizations of the vector nonlinear schrödinger equation [J]. Physics Letter A, 1999, **253**(5/6): 287—304.

[2] Ablowitz M J, Ohta Y, Trubatch A D. On integrability and chaos in discrete systems[J]. Chaos Solitons Fractals, 2000, **11**(1/3): 159—169.

[3] Yang J, Tan Y. Fractal dependence of vector_soliton colli_sions in birefringent fibers[J]. Physics Letter A, 2001, **280**(3): 129—138.

[4] Li Y, Mclaughlin D W, Shattah J, et al. Persistent homoclinic orbits for a perturbed nonlinear Schrödinger equation[J]. Communication on Pure and Applied Mathematics, 1996, **49**(11): 1175—1255.

[5] Wright Otis C, Forest Gregory M. On the backlund_gauge transformation and homoclinic orbits of a coupled nonlinear Schrodinger system[J]. Physica D, 2000, **141**(1/2): 104—116.

[6] Forest M G, McLaughlin D W, Muraki D J, et al. Nonfocusing instabilities in coupled integrable nonlinear Schrodinger PDEs[J]. Journal Nonlinear Science, 2000, **10**(3): 291—331.

[7] Forest M G, Sheu S P, Wright O C. On the construction of orbits homoclinic to plane waves in integrable coupled nonlinear Schrodinger systems[J]. Physics Letters A, 2000, **266**(1): 24—33.

Dynamicl Character for a Perturbed Coupled Nonlinear Schrödinger System

YU Pei[1], GAO Ping[2], GUO Bo_ling[3]

(1. School of Computer and Information, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, P.R. China;
2. Department of Applied Mathematics, Guangzhou University, Guangzhou 510405, P.R. China;
3. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, P.O. Box 8009, Beijing 100088, P.R. China)

Abstract: The dynamics for a perturbed coupled nonlinear Schrödinger system with periodic boundary condition was studiesd. First, the dynamics of perturbed and unperturbed systems on the invariant plane was analyzed by the spectrum of the linear operator. Then the existence of the locally invariant manifolds was proved by the sigular perturbation theory and the fixed_point argument.

Key words: coupled nonlinear Schrödinger system; dynamics; invariant manifold