

文章编号: 1000-0887(2005) 07_0763_07

波纹壳的格林函数方法

袁 鸿¹, 张湘伟²

(1. 暨南大学 应用力学研究所, 广州 510632;
2. 广东工业大学 建设学院, 广州 510640)

(我刊编委张湘伟来稿)

摘要: 应用轴对称旋转扁壳的基本方程, 研究了在任意载荷作用下具有型面锥度的浅波纹壳的非线性弯曲问题. 采用格林函数方法, 将扁壳的非线性微分方程组化为非线性积分方程组. 再使用展开法求出格林函数, 即将格林函数展成特征函数的级数形式, 积分方程就成为具有退化核的形式, 从而容易得到非线性代数方程组. 应用牛顿法求解非线性代数方程组时, 为了保证迭代的收敛性, 选取位移作为控制参数, 逐步增加位移, 求得相应的载荷. 在算例中, 研究了具有球面度的浅波纹壳的弹性特征. 结果表明, 由于型面锥度的引入, 特征曲线发生显著变化, 随着荷载的增加, 将出现类似扁球壳的总体失稳现象. 本文的解答符合实验结果.

关键词: 波纹壳; 格林函数; 积分方程; 非线性弯曲; 弹性特征
中图分类号: O343.5 **文献标识码:** A

引 言

波纹膜片广泛用作精密仪器中的弹性测量元件, 有时, 为了调节膜片的特性, 将膜片做成一定的锥度或球面度. 例如, 在设计高度表的真空膜盒时, 经常利用型面锥度来提高在真空时膜盒的灵敏度.

在工程实际问题中, 控制方程既可以用微分方程描述, 也可以用积分方程描述. 在数值分析中, 微分增加误差, 而积分减少误差, 因而 Chambers^[1]指出, 采用积分方程求问题的数值解比采用微分方程形式更有效. 积分方程的另一个显著优点就是可以将问题的边界条件结合在方程中. Fu 和 Harb^[2]应用积分方程方法成功地解决了球壳在轴对称载荷作用下的线性问题. 宋卫平和叶开源^[3]利用积分方程和牛顿-样条函数方法讨论了浅正弦波纹膜片的非线性问题. 刘人怀和袁鸿^[4]采用格林函数方法, 将简化的 Reissner 方程化为积分方程, 成功地求解了中心集中载荷作用下带边缘大波纹膜片弯曲问题的特征关系和应力分布.

本文采用格林函数方法, 研究了具有型面锥度的浅波纹壳的非线性弯曲问题. 对于无型面锥度的浅正弦波纹膜片, 我们将计算得到的结果与实验做了比较, 结果是十分令人满意的. 据本文作者所知, 具有型面锥度的波纹膜片, 仅有 Andriyewa^[5]应用差分方法、袁鸿^[6]应用摄动

收稿日期: 2004_05_13; 修订日期: 2005_03_11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272033); 广东省自然科学基金资助项目(032488)

作者简介: 袁鸿(1963), 男, 湖南人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_20_85211772; E_mail: yuanhong@se-nu.edu.cn)

方法讨论过

1 基本方程和边界条件

图1所示波纹壳,它实际上是一个轴对称旋转壳,由一个中心平台(或者刚性硬中心、或者中心开孔)和具有球面度的浅正弦波纹环形膜片组成,其外半径为 a ,内半径为 b (b 是刚性硬中心或者中心孔洞的半径,中心平台情形取 $b=0$)。由于其形状复杂,以前的学者们^[7,8]只研究了球面度为零,即球面曲率半径 R_0 为无穷大的情形。由于球面度不大,可以作为扁壳处理。为了求解方便,引入无量纲量

$$\begin{cases} R = \frac{r}{a}, & g = \frac{12(1-\nu^2)aF}{Eh^3}, & \alpha = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)a^2}, \\ P = \frac{12(1-\nu^2)P_0a^3}{Eh^3}, & Q = \frac{12(1-\nu^2)Q_0a}{2Eh^3}, & \beta = \frac{b}{a}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 r 是径向半径, h 是膜片厚度, F 是应力函数, P_0 是均布载荷, Q_0 是中心集中力, E 和 ν 分别表示弹性模量和泊松比。应用式(1),扁壳的大挠度方程成为^[9]

$$R \frac{d^2}{dR^2} + \frac{d}{dR} - R^{-1} - g \left(\frac{d}{dR} + \alpha \right) = - \left(Q + \frac{1}{2} R^2 P \right), \quad (2)$$

$$R \frac{d^2 g}{dR^2} + \frac{dg}{dR} - R^{-1} g + \frac{1}{2} \left[\frac{d}{dR} + \frac{1}{2} \right] = 0, \quad (3)$$

式中 α 是变形前子午线切线方向与水平方向的夹角, β 是旋转壳子午线方向的转角。在外边界 $R=1$ 处,各种边界条件可以统一写成

$$[(1+\beta) + (1-\beta)] + (1-\beta) \frac{d}{dR} = 0, \quad (4)$$

$$[(1-\beta) - (1+\beta)]g + (1+\beta) \frac{dg}{dR} = 0, \quad (5)$$

β 和 β_1 取值1或者-1,由外边缘支承条件决定

- A. 夹紧固定: $\beta = 1, \beta_1 = 1$;
- B. 滑动固定: $\beta = 1, \beta_1 = -1$;
- C. 自由支承: $\beta = -1, \beta_1 = -1$;
- D. 简单支承: $\beta = -1, \beta_1 = 1$;

在内边界 $R=\beta_1$ 处,边界条件也可以写成统一形式

$$[(1+\beta_1) + \beta_1(1-\beta_1)] + (1-\beta_1) \frac{d}{dR} = 0, \quad (6)$$

$$[(1-\beta_1) - \beta_1(1+\beta_1)]g + (1+\beta_1) \frac{dg}{dR} = 0, \quad (7)$$

β_1 和 β_{11} 取值1或者-1,由内边界条件决定

- A. 中心开孔,内边界自由: $\beta_{11} = -1, \beta_{11} = -1, \beta_{11} = -$;
- B. 内边界与刚性硬中心连接: $\beta_{11} = 1, \beta_{11} = 1, \beta_{11} = -$;
- C. 中心平台,此时 $\beta_{11} = 0$: $\beta_{11} = 1, \beta_{11} = -1, \beta_{11}$ 有限

除了上面列出的边界条件外,还应补充一个在外边界 $R=1$ 处垂直方向位移的约束条件

$$w(1) = 0 \quad (8)$$

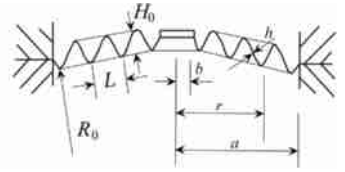


图1 具有球面度的波纹膜的轴向截面

2 积分方程及其求解

采用格林函数方法, 可以将基本微分方程(2)、(3)及其边界条件(4)~(7)化为下列积分方程组

$$(\quad) = \int_0^1 K_1(x, \quad) \left[g(\quad + \quad) - \left[Q + \frac{1}{2} x^2 P \right] \right] dx, \quad (9)$$

$$g(\quad) = - \int_0^1 \frac{1}{2} K_2(x, \quad) \left[\quad + \frac{1}{2} \right] dx, \quad (10)$$

式(9)和(10)中, 积分号下的 \quad 、 \quad 和 g 是 x 的函数 $K_1(x, \quad)$ 是算子

$$L = x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - x^{-1}$$

在边界条件(4)和(6)下的格林函数, $K_2(x, \quad)$ 是算子 L 在边界条件(5)和(7)下的格林函数

显然, 如果求得了

$$K_1(x, \quad) = G(x, \quad, b, b_1, \quad, 1, \quad), \quad (11)$$

则比较式(4)、(6)与式(5)、(7), 可以得到

$$K_2(x, \quad) = G(x, \quad, -t, -t_1, -\quad, -1, \quad), \quad (12)$$

式(9)和(10)就是积分方程描述的旋转扁壳的控制方程组, 将式(10)代入(9)中, 就得到只含一个未知量 \quad 的非线性积分方程

直接求出齐次二阶常微分算子 L 的两个线性无关解, 再遵循常微分方程教科书中的标准方法, 容易得到格林函数 $K_1(x, \quad)$ 和 $K_2(x, \quad)$, 它们是 x, \quad 的简单二元函数, 但这样得到的结果不便于对(9)和(10)进行数值计算. 下面应用展开法来求格林函数, 得到的 $K_1(x, \quad)$ 和 $K_2(x, \quad)$ 是用级数形式表示的, 代入(9)和(10)中, 获得具有退化核形式的积分方程, 从而很容易化为非线性代数方程组求解

考虑方程

$$LZ + kxZ = 0, \quad (13)$$

在边界条件(4)和(6)下的特征值问题 (13)是一阶柱贝塞尔方程, 其解为

$$Z_1(\quad k) = C_1 J_1(\quad k) + C_2 N_1(\quad k), \quad (14)$$

上式中, J_1 是第一类贝塞尔函数, N_1 是第二类贝塞尔函数, C_1 和 C_2 是待定常数. 将式(14)代入边界条件(4)和(6)中, 并考虑到贝塞尔函数的性质

$$\frac{d}{dx} Z_1(\quad k) = - \frac{1}{x} Z_1(\quad k) + k Z_0(\quad k), \quad (15)$$

式中

$$Z_0(\quad k) = C_1 J_0(\quad k) + C_2 N_0(\quad k), \quad (16)$$

就得到关于 C_1 和 C_2 的两个线性齐次代数方程, 令其系数行列式等于零, 得到决定特征值 k 的方程

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0, \quad (17)$$

其中

$$a_{11} = \left[(1 + b_1) + \left(1 - \frac{1}{x} \right) (1 - b_1) \right] J_1(\quad k) + k(1 - b_1) J_0(\quad k), \quad (18)$$

$$a_{12} = \left[(1 + b_1) + \left(1 - \frac{1}{x} \right) (1 - b_1) \right] N_1(\quad k) + k(1 - b_1) N_0(\quad k), \quad (19)$$

$$a_{21} = \left[(1 + b) + (-1)(1 - b) \right] J_1(\quad k) + k(1 - b) J_0(\quad k), \quad (20)$$

$$a_{22} = [(1+b) + (-1)(1-b)] N_1(k) + k(1-b) N_0(k), \quad (21)$$

取

$$C_1 = a_{22}, C_2 = a_{21}, \quad (22)$$

并将上面的 C_1 和 C_2 值代入式(14)中, 得到特征函数 $Z_1(kx)$ 对于具有中心平台的情形 $C_1 = 0$, 为了保证特征函数有界, 必须令 $C_2 = 0$, 此时特征函数较为简单

$$Z_1(kx) = J_1(kx), \quad (23)$$

决定特征值 k 的特征方程也大为简化为

$$a_{21} = 0 \quad (24)$$

由数学物理方程理论可知, $Z_1(kx)$ 是一族完备正交基本函数, 下面将格林函数 $K_1(x, \xi)$ 按特征函数 $Z_1(kx)$ 展开

$$K_1(x, \xi) = \sum_{i=1} A_i Z_1(kx), \quad (25)$$

由于 $K_1(x, \xi)$ 满足

$$LK_1(x, \xi) = -\delta(x - \xi), \quad (26)$$

将式(25)代入上式中, 利用式(13)和 $Z_1(kx)$ 的正交性质, 得到

$$A_j = -\frac{Z_1(k\xi)}{\int_0^1 x Z_1^2(kx) dx}, \quad (27)$$

将式(27)代入(25)中, 格林函数 $K_1(x, \xi)$ 可以表示成

$$K_1(x, \xi) = -\sum_{i=1} \frac{Z_1(k\xi) Z_1(kx)}{\int_0^1 x Z_1^2(kx) dx}, \quad (28)$$

同理, 可以得到格林函数 $K_2(x, \xi)$

$$K_2(x, \xi) = -\sum_{i=1} \frac{Z_1(k\xi) Z_1(kx)}{\int_0^1 x Z_1^2(kx) dx}, \quad (29)$$

只要在式(13)~(24)中, 用 $-i, -i+1, -i, -i-1, k$ 分别代替 b, b_1, ν, ν, k , 就得到决定特征函数 $Z_1(kx)$ 和特征值 k 的公式

实际计算中, 总是取有限项进行求解 为此, 考虑近似格林函数

$$K_1(x, \xi) = -\sum_{i=1}^N \frac{Z_1(k\xi) Z_1(kx)}{\int_0^1 x Z_1^2(kx) dx}, \quad (30)$$

$$K_2(x, \xi) = -\sum_{i=1}^M \frac{Z_1(k\xi) Z_1(kx)}{\int_0^1 x Z_1^2(kx) dx} \quad (31)$$

将上面两式代入式(9)和(10)中, 得到具有退化核的积分方程, 经过整理, 化为如下代数方程组

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^M g_i^M C_{jk}^M + \sum_{k=1}^M g_k^M C_{jk}^M - QC_j^1 - \frac{1}{2} PC_j^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^2 C_{ij}^0 = 0, \quad (32)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N g_i^N C_{jk}^N + \sum_{j=1}^N g_j^N C_{jk}^N - \sum_{k=1}^2 \sum_{k=1}^M g_k^M C_{2k}^0 = 0, \quad (33)$$

式中, $j = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, M$ $\sum_{i=1}^N$ 是 g 的展开系数的前 N 个, g_k^M 是 g 的展开系数的前

M 个 其它系数为

$$C_{ij}^0 = \int_0^1 x Z_1^2(\ j x) dx, \tag{34}$$

$$C_{2k}^0 = \int_0^1 x Z_1^2(\ kx) dx, \tag{35}$$

$$C_{ijk} = \int_0^1 Z_1(\ i x) Z_1(\ j x) Z_1(\ kx) dx, \tag{36}$$

$$C_{jk} = \int_0^1 Z_1(\ j x) Z_1(\ kx) dx, \tag{37}$$

$$C_j^1 = \int_0^1 Z_1(\ j x) dx, \tag{38}$$

$$C_j^2 = \int_0^1 x^2 Z_1(\ j x) dx, \tag{39}$$

求得 N_i 和 g_k^M 后, 和 g 可以按照

$$(x) = \sum_{i=1}^N N_i Z_1(\ i x), \tag{40}$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^M g_k^M Z_1(\ kx) \tag{41}$$

得到 作为 和 g 的函数, 不难求出壳中的内力和位移, 然而, 本文研究的重点将放在计算内边界或中心平台处的挠度 w_0 上 根据 $w = dw/dr$ 及式(8) 和式(40), w_0 可以由 N_i 表示为

$$[12(1- \nu^2)]^{1/2} \frac{w_0}{h} = - \sum_{i=1}^N N_i C_i^1, \tag{42}$$

式(42) 中, C_i^1 由式(38) 给出

下面采用牛顿法求解式(32) 和(33) 对于具有型面锥度的波纹膜片, 有可能存在极值点失稳, 在极值点附近, 牛顿法将失效 为了求出极值点和越过极值点继续分析失稳后特性, 将式(42) 与(32) 和(33) 一起联立求解 对每一个给定的 w_0 值, 求出相对应的 N_i 、 g_k^M 和 P (或者 Q) 值, 即给定挠度求载荷 这样一来, 克服了以载荷作为控制参数可能出现的不收敛性

实际计算中, 给挠度 w_0 一个充分小的值, 按式(32)、(33) 和(42) 进行迭代, 直到满足精度要求 这样一来, 就得到了对应于这个 w_0 值的非线性解(P 或者 Q 值), 以后给 w_0 以增量, 并把对应于上一个 w_0 值的收敛解用来开始对新的 w_0 值实施迭代过程, 以这种方式得到对应于任何内边界或中心平台处的挠度 w_0 值的解答

3 算 例

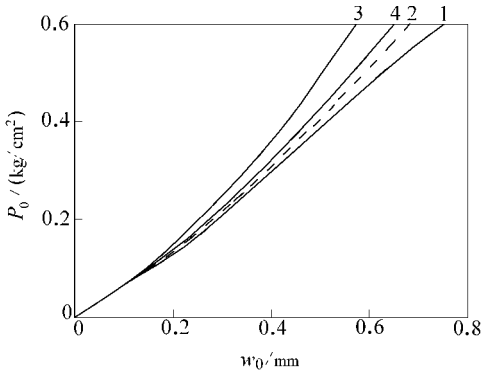
图 1 是由中心平台和具有球面度的浅正弦波纹环形膜片组成的轴向截面, 各有关数据为: $E = 10^4 \text{ kg/mm}^2$, $\nu = 0.3$, $h = 0.22 \text{ mm}$, $a = 25 \text{ mm}$, $L = 6.6 \text{ mm}$, $H_0 = 0.75 \text{ mm}$, 光滑中心的半径 $r_0 = 1.9 \text{ mm}$, 球面曲率半径分别为 $R_0 = \infty$ 、 $R_0 = 250 \text{ mm}$ 和 $R_0 = 100 \text{ mm}$ 的 3 种情形, 边界夹紧固定, 讨论均布载荷下其特征曲线

图 1 所示波纹膜片的轴向截面可以由膜片切线方向与 r 方向的夹角 θ 用下式描述出来

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leq R \leq 0.076 \text{ 时,} \\ -25R/R_0 - 0.357 \sin(23.8R + 6.045), & \text{当 } 0.076 < R \leq 1 \text{ 时} \end{cases}$$

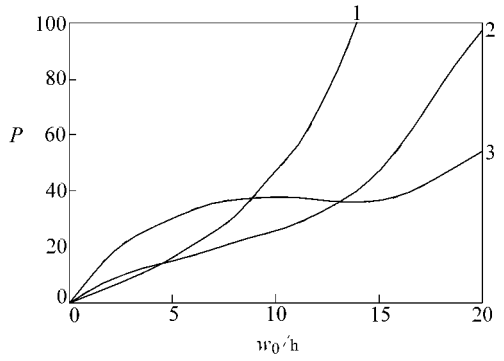
图 2 绘出了波纹膜片无型面锥度即球面曲率半径 $R_0 = \infty$ 的特征曲线, 曲线 1 是采用本文方法得到的特征曲线, 曲线 2 是 Feodosiev^[7] 的实验结果, 曲线 3 是 Feodosiev^[7] 采用 Galerkin 方

法得到的计算结果, 曲线 4 是陈山林^[8]使用修正迭代法得到的计算结果 从图上可知, 本文的计算结果在实验值的下方, 与实验值接近



1 本文, 2 文献[7], 3 Galerkin^[7], 4 文献[8]

图 2 均布载荷下的特征曲线



1: $R_0 =$, 2: $R = 250$ mm, 3: $R = 100$ mm

图 3 均布载荷下型面锥度对特征曲线的影响

图 3 表示均布载荷下型面锥度对特征曲线的影响, 横坐标是无量纲挠度, 纵坐标是无量纲均布载荷 曲线 1 是波纹膜片球面曲率半径 $R_0 =$ 的特征曲线, 曲线 2 是球面曲率半径 $R_0 = 250$ mm 的特征曲线, 曲线 3 是球面曲率半径 $R_0 = 100$ mm 的特征曲线 从图上看到, 由于型面锥度的引入, 特征曲线发生显著变化, 随着荷载的增加, 将出现类似扁球壳的总体失稳现象

4 结 论

本文将具有型面锥度的波纹膜片作为扁壳处理, 得到了具有型面锥度的波纹膜片的非线性弹性特征曲线, 为具有型面锥度的波纹膜片的设计提供了理论依据 本文中提出的解决方法适应于任意轴向截面的浅波纹壳体

[参 考 文 献]

[1] Chambers L G. Integral Equation : A Short Course [M]. London: International Textbook Company Limited, 1976.

[2] Fu K C, Harb A I. Integral equation method for spherical shell under axisymmetric loads[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1990, **116**(2): 309-323.

[3] 宋卫平, 叶开沅. 中心集中载荷作用下波纹园板的变形应力和稳定性研究[J]. 中国科学 A 辑, 1989, **32**(1): 40-47.

[4] LIU Ren_huai, YUAN Hong. Nonlinear bending of corrugated annular plate with large boundary corrugation[J]. Applied Mech Eng, 1997, **2**(3): 353-367.

[5] . . . [M]. : , 1981.

[6] 袁鸿. 波纹壳的摄动解法[J]. 应用力学学报, 1999, **16**(1): 144-148.

[7] . . . [M]. : , 1949. 186-206.

[8] 陈山林. 浅正弦波纹园板在均布载荷下的大挠度弹性特征[J]. 应用数学和力学, 1980, **1**(2): 261-272.

[9] Libai A, Simmonds J G. The Nonlinear Theory of Elastic Shells of One Spatial Dimension [M]. Boston: Academic Press, 1988. 206) 212.

YUAN Hong¹, ZHANG Xiang_wei²

(1. Institute of Applied Mechanics, Jinan University,

Guangzhou 510632, P. R. China;

2. Faculty of Construction, Guangdong University of Technology,

Guangzhou 510640, P. R. China)

Abstract: By using the fundamental equations of axisymmetric shallow shells of revolution, the nonlinear bending of a shallow corrugated shell with taper under arbitrary load has been investigated. The nonlinear boundary value problem of the corrugated shell was reduced to the nonlinear integral equations by using the method of Green's function. To solve the integral equations, expansion method was used to obtain Green's function. Then the integral equations were reduced to the form with degenerate core by expanding Green's function as series of characteristic function. Therefore, the integral equations become nonlinear algebraic equations. Newton's iterative method was utilized to solve the nonlinear algebraic equations. To guarantee the convergence of the iterative method, deflection at center was taken as control parameter. Corresponding loads were obtained by increasing deflection one by one. As a numerical example, elastic characteristic of shallow corrugated shells with spherical taper was studied. Calculation results show that characteristic of corrugated shells changes remarkably. The snapping instability which is analogous to shallow spherical shells occurs with increasing load if the taper is relatively large. The solution is close to the experimental results.

Key words: corrugated shell; Green's function; integral equation; nonlinear bending; elastic characteristic