应用数学和力学,第 26 卷 第 7 期(2005 年 7 月
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005 07_0770_09

一类耦合非线性波方程的行波解分支

张骥骧[1,2], 李继彬[2]

(1. 东南大学 经济管理学院, 南京 210096;
2. 昆明理工大学 理学院, 昆明 650093

(我刊编委李继彬来稿

摘要: 利用动力系统的 Hopf 分支理论来研究耦合非线性波方程周期行波解的存在性和稳定性 应用行波法把一类耦合非线性波方程转换为三维动力系统来研究,从而给在不同的参数条件下给出了周期解存在和稳定性的充分条件

关 键 词: 行波解; Hopf 分支; 非线性波方程
中图分类号: O175.12 文献标识码: A

引 言

房少梅和郭柏灵[1]考虑了下面有阻尼的非线形波方程的周期问题,

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x - u_{xx} + u_{xxx} + 2vv_x = G_1(u, v) + h_1(x), \\ v_t - v_{xx} + 2(uv)_x + g(v)_x = G_2(u, v) + h_2(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中 、、 是常量, > 0、 0 在周期边界的条件下, 作者证明上述系统具有唯一强解

本文研究当 $G_i(u, v)$ 0, $h_i(u, v)$ 0, $(i = 1, 2)$ 时, 方程(1) 的行波解的分支 令 = $x - ct$, $u = u(x - ct)$, 这里 c 是波速, 带入行波方程(1 得到

$$\begin{cases} - cu + f (u) - u + u + 2vv = 0, \\ - cv + 2(uv) - v + g (v) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

这里 是关于 的导数 对方程(2) 关于 进行一次积分得到

$$\begin{cases} - cu + f(u) - u + u + v^2 = 0, \\ - cv + 2uv - v + g(v) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

如果令 $x_1 = u$、$x_2 = u$ 、$x_3 = v$, 则方程(3 等价于以下三维系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{d} = \dfrac{cx_1 + x_2 - x_3^2 - f(x_1)}{}, \\ \dfrac{dx_3}{d} = \dfrac{- cx_3 + 2x_1x_2 + g(x_3)}{}, \end{cases} \tag{4}$$

收稿日期: 2003_11_21; 修订日期: 2005_03_29
作者简介: 张骥骧(1978 , 男, 安徽淮南人, 博士(联系人. Tel: + 86_25_83689725; E_mail: zhang_jixiang@126.com

其中 > 0、 0 系统(4) 是具有4个参数(, , , c) 的动力系统, 其相空间的轨道决定了(1) 式的所有的行波解, 我们需要研究当 、、 和c 改变时, 系统(4) 的轨道相空间(x_1, x_2, x_3) 中的分支情况

(4 式的一个周期轨道与(1 式的一个周期的行波解相对应 因此要研究(1 式周期波的分支情况, 只需考虑当参数 、、、c 变化时(4 式出现的周期轨道就可以了 在本文中我们主要运用动力系统的分支理论来研究这一问题(见文献[2] 至文献[5]

我们分别讨论$f(x_1) = x_1^2$, $g(x_3) = x_3^2$和$f(x_1) = x_1^3$, $g(x_3) = x_3^3$的情况, 即系统(4 有以下两种形式:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{d} = \dfrac{cx_1 + \quad x_2 - \quad x_3^2 - \quad x_1^2}{}, \\ \dfrac{dx_3}{d} = \dfrac{- \quad cx_3 + \quad 2x_1x_2 + \quad x_3^2}{} \end{cases} \tag{5}$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{d} = \dfrac{cx_1 + \quad x_2 - \quad x_3^2 - \quad x_1^3}{}, \\ \dfrac{dx_3}{d} = \dfrac{- \quad cx_3 + \quad 2x_1x_2 + \quad x_3^3}{} \end{cases} \tag{6}$$

1 系统(5 的 Hopf 分支

我们现在考虑系统(5 的局部分支 显然系统(5 有两个平衡点 $O(0, 0, 0)$, $P(c, 0, 0)$ 令 $\boldsymbol{A}(x_1, x_2, x_3)$ 是(5) 式在平衡点(x_1, x_2, x_3) 处线性部分的系数矩阵 于是在原点 $O(0, 0, 0)$,

$$\boldsymbol{A}(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{c}{} & \text{—} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{c}{} \end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}(0, 0, 0)$ 的特征方程为

$$f(\quad) = \left({}^2 - \text{—} - \frac{c}{} \right) \left(+ \frac{c}{} \right)$$

其特征值为

$$_{11} = -\frac{c}{}, \quad _{12,13} = \frac{\sqrt{^2 + 4c}}{2}$$

对于平衡点 $P(c, 0, 0)$, 做变换 $x_1 = x_1 - c$、$x_2 = x_2$、$x_3 = x_3$, 可化为系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{d} = \dfrac{- cx_1 + x_2 - x_3^2 - x_1^2}{}, \\ \dfrac{dx_3}{d} = \dfrac{2cx_2 - cx_3 + 2x_1x_2 + x_3^2}{} \end{cases} \tag{7}$$

显然

$$A(c, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{c}{} & \dfrac{}{} & 0 \\ 0 & \dfrac{2c}{} & -\dfrac{c}{} \end{bmatrix}$$

该矩阵的特征方程为

$$f(\ ) = \left(^2 - \frac{}{} + \frac{c}{} \right)\left(+ \frac{c}{} \right)$$

特征值为

$$_{21} = -\frac{c}{}, \quad _{22,23} = \frac{\sqrt{^2 - 4c}}{2}$$

1 假设 $c > 0$、> 0 并且取参数 的临界值 $= 0$, 则 $_{11} = _{21} < 0$、$_{12,13} = \sqrt{c/}$ 、$_{22,23} = \sqrt{c/}\ \mathrm{i}$ 在这种情况下平衡点 O 是一个具有两维稳定流形和一维不稳定流形的双曲鞍点 平衡点 P 具有两维中心流形和一维稳定流形 对 $\mathrm{Re}(_{22,23})$, 有

$$\frac{d}{d}\left(\frac{}{2}\right)_{=0} = \frac{1}{2} \quad 0,$$

当 穿过零点改变时, 系统将出现 Hopf 分支, 在平衡点 P 附近回出现一个周期轨道

2 假设 $c > 0$、< 0 并且取参数 的临界值 $= 0$, 则 $_{11} = _{21} < 0$、$_{12,13} = \sqrt{c/(-\ )}\ \mathrm{i}$、$_{22,23} = \sqrt{c/(-\ )}$ 在这种情况下平衡点 P 一个具有两维稳定流形和一维不稳定流形的双曲鞍点 平衡点 O 具有两维中心流形和一维稳定流形 对 $\mathrm{Re}(_{12,13})$, 我们可以得到

$$\frac{d}{d}\left(\frac{}{2}\right)_{=0} = \frac{1}{2} \quad 0,$$

我们知道当 穿过零点改变时, 系统将出现 Hopf 分支, 在平衡点 O 附近回出现一个周期轨道

以下考虑从平衡点 P 产生 Hopf 分支的方向和出现周期解的稳定性 当 $= 0$, 系统(7 变成(省略 ~

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{d} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{d} = \dfrac{- cx_1 - x_3^2 - x_1^2}{}, \\ \dfrac{dx_3}{d} = \dfrac{2cx_2 - cx_3 + 2x_1x_2 + x_3^2}{} \end{cases} \tag{8}$$

令

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \sqrt{c} & 0 & 0\\ - & 1 & -\dfrac{{}^{2}+\ c}{2c}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{\ \over c} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \dfrac{2\ c}{{}^{2}+\ c} & \dfrac{2\ \sqrt{c}}{{}^{2}+\ c} & \dfrac{-2\ c}{{}^{2}+\ c}\end{bmatrix}$$

上面的变换可以把系统(8 的线性化系统化为实标准型, 即,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{Y}+\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{Y})),$$

其中

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & -\sqrt{c} & 0\\ \sqrt{c} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{c}{}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}(X)=\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{x_3^2}{}-\dfrac{x_1^2}{}\\ \dfrac{2x_1x_2}{}+\dfrac{x_3^2}{}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ f_2\\ f_3\end{bmatrix}$$

因此, 我们得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}}=-\sqrt{c}\,y_2-4N(y_1,y_2,y_3)-\dfrac{y_2^2}{c},\\ \dfrac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}}=\sqrt{c}\,y_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}}=-\dfrac{c}{}y_3-4cN(y_1,y_2,y_3)-\dfrac{y_2^2}{c}-\\ \qquad\dfrac{1}{2}\dfrac{(\ c+\ ^2)(2\sqrt{\ /c}\,y_1y_2+\ cN(y_1,y_2,y_3))}{c},\end{cases}$$

其中

$$N(y_1,y_2,y_3)=\frac{(-\ \sqrt{c/\ }\ y_3+\ y_2+\ \sqrt{c/\ }\ y_1)^2}{(\ ^2+\ c\ )^2}$$

现在定义

$$\begin{cases}F_1=-\sqrt{c}\,y_2-4N(y_1,y_2,y_3)-\dfrac{y_2^2}{c},\\ F_2=\sqrt{c}\,y_1,\\ F_3=-\dfrac{c}{}y_3-4cN(y_1,y_2,y_3)-\dfrac{y_2^2}{c}-\\ \qquad\dfrac{1}{2}\dfrac{(\ c+\ ^2)(2\sqrt{\ /c}\,y_1y_2+\ cN(y_1,y_2,y_3)}{c}\end{cases}$$

以下使用 Hassard 和 Wan 在文献[6] 中给出的在二维中心流形和一维稳定流形上的方程:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}}=\ z+\ G(z,z,w),\qquad z=\ y_1+\ \mathrm{i}y_2, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}}=\ _{21}w+\ H(z,z,w) \tag{10}$$

限制在中心流形上, (9 式有形式

$$\frac{dz}{d} = \quad z + \quad g_{ij} z^i z^j + \qquad (11$$

经计算可得

$$g_{11} = \frac{1}{4}\left(\frac{^2F_1}{y_1^2} + \frac{^2F_1}{y_2^2} + \left(\frac{^2F_2}{y_1^2} + \frac{^2F_2}{y_2^2}\right)\mathrm{i}\right),$$

$$g_{02} = \frac{1}{4}\left(\frac{^2F_1}{y_1^2} - \frac{^2F_1}{y_2^2} - 2\frac{^2F_2}{y_1\ y_2} + \left(\frac{^2F_2}{y_1^2} - \frac{^2F_2}{y_2^2} + \frac{^2F_1}{y_1\ y_2}\right)\mathrm{i}\right)$$

和

$$g_{20} = \frac{1}{4}\left(\frac{^2F_1}{y_1^2} - \frac{^2F_1}{y_2^2} + 2\frac{^2F_2}{y_1\ y_2} + \left(\frac{^2F_2}{y_1^2} - \frac{^2F_2}{y_2^2} - \frac{^2F_1}{y_1\ y_2}\right)\mathrm{i}\right)$$

$$G_{21} = \frac{1}{8}\left(\frac{^3F_1}{y_1^3} + \frac{^3F_1}{y_1\ y_2^2} + \frac{^3F_2}{y_1^2\ y_2} + \frac{^3F_2}{y_2^3} + \left(\frac{^3F_2}{y_1^3} + \frac{^3F_2}{y_1\ y_2^2} - \frac{^3F_1}{y_1^2\ y_2} - \frac{^3F_1}{y_2^3}\right)\mathrm{i}\right)$$

$$h_{11} = \frac{1}{4}\left(\frac{^2F_3}{y_1^2} + \frac{1}{4}\frac{^2F_3}{y_2^2}\right),$$

$$h_{20} = \frac{1}{4}\left(\frac{^2F_3}{y_1^2} - \frac{^2F_3}{y_2^2} - 2\mathrm{i}\frac{^2F_3}{y_1\ y_2}\right),$$

$$G_{110} = \frac{1}{2}\left(\frac{^2F_1}{y_1\ y_3} + \frac{^2F_2}{y_2\ y_3} + \left(\frac{^2F_2}{y_1\ y_3} - \frac{^2F_1}{y_2\ y_3}\right)\mathrm{i}\right),$$

$$G_{101} = \frac{1}{2}\left(\frac{^2F_1}{y_1\ y_3} - \frac{^2F_2}{y_2\ y_3} + \left(\frac{^2F_1}{y_2\ y_3} - \frac{^2F_2}{y_1\ y_3}\right)\mathrm{i}\right)$$

根据以上给出的 F_i, $i = 1, 2, 3$, 我们可以得到 g_{11}、g_{02}、g_{20}、h_{11}、h_{20} 和 G_{21}、G_{110}、G_{101} 的值, 用 $w(z, z) = \quad w_{ij} z^i z^j + \quad$ 表示两维中心流形, 通过解下面系统

$$\begin{cases} - \dfrac{c}{}w_{11} = - h_{11}, \\ \left(- \dfrac{c}{} - 2\sqrt{\dfrac{c}{}}\mathrm{i}\right) w_{20} = - h_{20}, \end{cases} \qquad (12$$

可以得到 w_{11}、w_{20}, 并且 $g_{21} = G_{21} + (2G_{110}w_{11} + G_{101}w_{20})$

再将系统(11 变换成 Poincar 规范形

$$\frac{d}{d} = \quad + c_1 \quad ^2 \quad + \quad , \qquad (13$$

则我们得到系数 c_1 的表达式:

$$c_1(0) = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{c/}}\left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\right) + \frac{1}{2}g_{21} = M_1 + N_1\mathrm{i},$$

其中

$$M_1 = -\frac{(\ ^3 + 12\ ^2c + 8\ c^2 - \ c\ + 6c^2\ )}{(\ ^2 + c\ )^2(c\ + 4\ ^2)},$$

$$N_1 = -(1/12)(20\ ^6 + 45\ ^4c\ + 40\ ^4c^2 - 192\ ^3c^3 + 72\ ^2c^3\mathrm{B} + 30\mathrm{C}^2c^2\mathrm{B}^2 - 64\mathrm{C}^2c^4 - 120c^4\mathrm{BC} + 8c^4\mathrm{B}^2 + 32c^5\mathrm{B} + 5c^3\mathrm{B}^3)(\sqrt{B^{-1}c}(cB + 4\mathrm{C}^2)c^2(\mathrm{C}^2 + cB)^2)^{-1}\#$$

令 $\mathrm{L}_2 = - 2\mathrm{B}M_1$、$\mathrm{B}_2 = 2M_1$, 根据 Hopf 分支理论[7], 我们可以得到下面结论#

定理 1 对于 B、c、$\mathrm{C} > 0$, 当 $M_1 > 0$ 并且 $\mathrm{A} < 0$、$|A| n 1$ 时, 系统(5) 在平衡点 P 附近存在着由 Hopf 分支产生的一个不稳定的周期解; 当 $M_1 < 0$ 并且 $\mathrm{A} > 0$、$|A| n 1$ 时, 系统 (5) 在平衡点 P 附近存在由 Hopf 分支产生的一个稳定的周期解#

现在我们研究从平衡点 O 附近由 Hopf 分支引起周期解方向和稳定性# 类似上面的分析,得到

$$c_1(0) = \frac{i}{2\sqrt{-(c/B)}}\left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\right) + \frac{1}{2}g_{21} = -\frac{5}{24}\frac{i}{c\sqrt{-Bc}}\#$$

根据文献[6]可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(c_2(0)) = {} & (1/864)(-36c^7B^5 + 792c^6B^4C^2 - 7\,236c^5B^3C^4 - \\ & 36c^5B^3C + 310c^4B^4C + 23\,472c^4B^2C^6 + \\ & 1\,044c^4B^2C^3 - 38\,592c^3BC^8 - 6\,624c^3BC^5 + 6\,048c^2C^7 + 20\,736C^{10}c^2 + \\ & 7\,440C^9)(c^3(Bc - C^2)(Bc - 9C^2)(Bc - 4C^2)(16C^4 - 8cC^2B + c^2B^2))^{-1}\#\end{aligned}$$

令 $Mc = \mathrm{Re}(c_2(0))$、$L_4 = -2BMc$、$B_4 = 4Mc$, 由[5], 我们可以得到下面定理#

定理 2　对于 c, $C > 0$ 并且 $B < 0$, 当 $Mc > 0$ 并且 $A > 0$、$|A| n 1$ 时, 系统(5) 在平衡点 O 附近存在由 Hopf 分支产生的一个不稳定的周期解; 当 $Mc < 0$ 和 $A < 0$, $|A| n 1$ 时, 系统(5) 在平衡点 O 附近存在由 Hopf 分支产生的一个稳定的周期解#

2　系统(6 的 Hopf 分支

现在研究系统(6 的局部分支# 首先我们考虑(6 式的平衡点情况, 很容易可以得出:

1　当 $c [0$ 时, 系统(6) 有一个平衡点 $O(0, 0, 0)$;

2　当 $0 < c < 81/12$ 时, 系统(6) 有 5 个平衡点: $O(0, 0, 0)$、$A_1(\sqrt{c}, 0, 0)$、$A_2(-\sqrt{c}, 0, 0)$、$B_1(k, 0, \sqrt{c})$、$B_2(k, 0, -\sqrt{c})$,

其中
$$k = \frac{\sqrt[3]{-108c + 12\sqrt{-12c^3 + 81c^2}}}{6} + \frac{2c}{\sqrt[3]{-108c + 12\sqrt{-12c^3 + 81c^2}}};$$

3　当 $c \backslash 81/12$, 系统(6) 有 3 个平衡点: $O(0, 0, 0)$、$A_1(\sqrt{c}, 0, 0)$、$A_2(-\sqrt{c}, 0, 0)\#$

在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处有

$$\boldsymbol{A}(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{B} & \frac{A}{B} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c}{C} \end{bmatrix}\#$$

其特征方程为

$$f(K) = \left(K + \frac{c}{C}\right)\left(K^2 - \frac{A}{B}K - \frac{c}{B}\right)\#$$

故特征值为

$$K_{31} = -\frac{c}{K}, \quad K_{32,33} = \frac{A ? \sqrt{A^2 + 4Bc}}{2B}\#$$

对于平衡点 $A_1(\sqrt{c}, 0, 0)$, 做变换 $x_1 = x_1 - \sqrt{c}$、$x_2 = x_2$、$x_3 = x_3$, 可得

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dN} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dN} = -\dfrac{2cx_1 - Ax_2 + 3\sqrt{c}x_1^2 + x_3^2 + x_1^3}{B}, \\ \dfrac{dx_3}{dN} = -\dfrac{cx_3 - 2\sqrt{c}x_2 - 2x_1x_2 - x_3^3}{C}\# \end{cases} \tag{14}$$

显然,

$$A(\sqrt{c}, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2c}{B} & \frac{A}{B} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{c}}{C} & -\frac{c}{C} \end{bmatrix} \#$$

其特征方程和特征值为

$$f(K) = \left(K + \frac{c}{C}\right)\left(K^2 - \frac{A}{B}K + \frac{2c}{B}\right),$$

$$K_{41} = -\frac{c}{C},\quad K_{42,43} = \frac{A ? \sqrt{A^2 - 8Bc}}{2B} \#$$

对于平衡点 $A_2(-\sqrt{c}, 0, 0)$, 令 $x_1 = x_1 + \sqrt{c}$、$x_2 = x_2$、$x_3 = x_3$, 系统(6 变为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dN} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dN} = -\frac{2cx_1 - Ax_2 - 3\sqrt{c}x_1^2 + x_3^2 + x_1^3}{B}, \\ \frac{dx_3}{dN} = -\frac{2\sqrt{c}x_2 + cx_3 - 2x_1x_2 - x_3^3}{C} \# \end{cases} \qquad (15$$

于是

$$A(-\sqrt{c}, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2c}{B} & \frac{A}{B} & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{c}}{C} & -\frac{c}{C} \end{bmatrix} \#$$

其特征方程和特征值分别为

$$f(K) = \left(C + \frac{c}{C}\right)\left(K^2 - \frac{A}{B}K + \frac{2c}{B}\right),$$

$$K_{51} = -\frac{c}{K},\quad K_{52,53} = \frac{A ? \sqrt{A^2 - 8Bc}}{2B} \#$$

1 假设 $c > 0$、$B > 0$ 并且取临界值 $A = 0$, 则 $K_{31} = K_{41} = K_{51} < 0$、$K_{32,33} = ? \sqrt{c/B}$、$K_{42,43} = K_{52,53} = ? \sqrt{2c/B}i$# 在这种情况下平衡点 O 是一个具有两维稳定流形和一维不稳定流形的双曲鞍点# 平衡点 A_1、A_2 具有两维中心流形和一维的稳定流形# 对于 $\mathrm{Re}(K_{42,43})$ 和 $\mathrm{Re}(K_{52,53})$, 我们可以得到

$$\frac{d}{dA}\left(\frac{A}{2B}\right)_{A=0} = \frac{1}{2B}\ X\ 0\#$$

众所周知, 当 A 穿过零点符号改变时, 系统(6) 在平衡点 A_1、A_2 附近将会出现一个由 Hopf 分支引起的周期轨道#

2 假设 $c > 0$、$B < 0$ 且对 A 取临界值 $A = 0$, 则 $K_{31} = K_{41} = K_{51} < 0$、$K_{32,33} = ? \sqrt{c/(-B)}i$、$K_{42,43} = K_{52,53} = ? \sqrt{2c/(-B)}$# 在这种情况下 A_1、A_2 是一个具有两维稳定流形和一维不稳定中心流形的双曲鞍点# 平衡点 O 具有两维中心流形和一维稳定流形# 由于

$$\frac{d}{dA}\left(\frac{A}{2B}\right)_{A=0} = \frac{1}{2B}\ X\ 0\#$$

当 A 穿过零点符号改变时, 系统(6) 在平衡点 O 附近将会出现一个由 Hopf 分支引起的周期轨道#

下面我们要考虑在平衡点 A_1 产生 Hopf 分支的方向和出现周期轨道的稳定性# 因为方法类似, 我们在这里不在详细叙述, 最后可以得到

$$c_1(0) = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{c/B}}\left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\right) + \frac{1}{2}g_{21} = M_2 + N_2\mathrm{i},$$

其中

$$M_2 = \frac{2C(-32c^3C^4 - 8c^5B^2 + B^3c^{(11/2)} - 16c^{(5/2)}C^6 - 32c^4BC^2 - 12c^{(7/2)}BC^4)}{c^2(2C^2 + cB)^4(cB + 8C^2)},$$

$$\begin{aligned}N_2 = -&(1/12)\sqrt{2}(2\,2160c^{(7/2)}C^6B + 2\,448c^3C^8B - 512c^3C^6 + \\ &1\,368c^{(9/2)}B^2C^4 + 144B^4c^6C^2 + 792c^5C^4B^3 + 1\,152c^2C^{10} + \\ &2\,016c^4C^6B^2 - 384c^4C^4B + 324c^{(11/2)}B^3C^2 + 9B^5c^7 + 1\,152c^{(5/2)}C^8 + \\ &18c^{(13/2)}B^4 + 32c^6B^3)(\sqrt{B}c^{(3/2)}(2C^2 + cB)^4c(cB + 8C^2))^{-1}\#\end{aligned}$$

令 $L_2 = -2BM_2$、$B_2 = 2M_2$, 则根据文献[5], 得到以下结果

定理 3 对于 B、c、C > 0, 当 $M_2 > 0$ 并且 A < 0、| A | n 1, 系统(6) 在平衡点 A_1 附近存在由 Hopf 分支产生的一个不稳定的周期解; 当 $M_2 < 0$ 并且 A > 0、| A | n 1时, 系统 (6) 在平衡点 A_1 附近存在由 Hopf 分支产生的一个稳定的周期解#

考虑从平衡点 $A_2(-\sqrt{c}, 0, 0)$ 产生分支的方向和周期轨道的稳定性# 类似上面的分析, 得到

$$c_1(0) = \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2c/B}}\left(g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2\right) + \frac{1}{2}g_{21} = M_3 + N_3\mathrm{i},$$

其中

$$M_3 = \frac{-2C(-12c^{(5/2)}C^4B - 16c^{(3/2)}C^6 + B^3c^{(9/2)} + 32c^3BC^2 + 32c^2C^4 + 8B^2c^4)}{c(cB + 2C^2)^4(Bc + 8C^2)},$$

$$\begin{aligned}N_3 = -&(1/12)\sqrt{2}(2\,016c^4B^2C^6 + 144c^6B^4C^2 + 2\,448c^3BC^8 + 1\,152c^2C^{10} + \\ &9c^7B^5 + 792c^5B^3C^4 - 1\,368c^{(9/2)}B^2C^4 - 324c^{(11/2)}B^3C^2 - 512c^3C^6 - \\ &384Bc^4C^4 - 2\,160c^{(7/2)}BC^6 - 1\,152c^{(5/2)}C^8 - 18c^{(13/2)}B^4 + \\ &32c^6B^3)(\sqrt{B}c(Bc + 2C^2)^4c^2(Bc + 8C^2))^{-1}\#\end{aligned}$$

令 $L_2 = -2BM_3$、$B_2 = 2M_3$, 根据文献[4], 我们可以得到

定理 4 对于 B、c、C > 0, 当 $M_3 > 0$ 并且 A < 0, | A | n 1, 系统(6) 在平衡点 A_2 附近存在着由 Hopf 分支产生的一个不稳定的周期解; 当 $M_3 < 0$ 并且 A > 0、| A | n 1时, 系统 (6) 在平衡点 A_2 附近存在由 Hopf 分支产生的一个稳定的周期解#

同理我们可以得到其它平衡点出现分支的情况#

[参 考 文 献]

[1] 房少梅, 郭柏灵. 一类广义耦合的非线性波动方程组时间周期解的存在性[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(6: 595 604.

[2] Chow S N, Hale J K. Method of Bifurcation Theory[M]. New York: Springer_Verlag, 1981.

[3] Debnath L. Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers[M]. Boston: Birkhauser, 1997.

4] Guckenheimer J, Holmes P J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields[M]. New York: Springer_Verlag, 1983.

[5] 李继彬,冯贝叶. 稳定性、分支与混沌[M]. 昆明:云南科技出版社, 1995.

[6] Hassard B D, Wan Y H. Bifurcation formulae derived from center manifold theory[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1978, 63(2 : 297 312.

[7] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation[M]. London: Cambridge University Press, 1981.

Bifurcations of Travelling Wave Solutions for a Coupled Nonlinear Wave System

ZHANG Ji_xiang[1,2], LI Ji_bin[2]

(1. School of Economics & Management, Southeast University, Nanjing 210096, P. R. China;

2. School of Science, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650093, P. R. China

Abstract: By using the bifurcation theory of dynamical systems to the coupled nonlinear wave equations, the existence and stability of periodic wave solutions by Hopf bifurcations are obtained. Theory of travelling wave was applied to transform a kind of the coupled nolinear wave equations into three_dimension dynamical systems. Under different parametric conditions, various sufficient conditions to guarantee the existence and stability of the above solutions are given.

Key words: travelling wave solution; Hopf bifurcation; nonlinear wave equation