应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 07_0779_06

时域自适应精细算法求解二维非线性湿热耦合问题*

杨海天[1], 刘 岩[2], 邬瑞锋[1]

(1. 大连理工大学 工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024;
2. 清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(我刊原编委邬瑞锋来稿)

摘要: 采用时域自适应精细算法求解二维非线性湿热耦合问题• 通过在离散时间段上将变量展开, 更精确地描述变量的变化过程, 将非线性时空耦合的初边值问题转化为一系列递推的线性边值问题, 并利用有限元法进行求解• 计算中不需任何附加假设和迭代过程, 并提出了自适应计算的收敛判则, 以保持时间步长选择不同时的计算精度• 数值比较中, 分别考虑了材料属性随温度变化、随湿度变化、以及随温度和湿度变化的情形, 结果令人满意, 体现了这种算法处理复杂非线性问题的能力•

关 键 词: 有限元; 非线性传输问题; 时域步进; 自适应计算
中图分类号: TK124 文献标识码: A

引 言

非线性瞬态传输问题的研究具有重营的工程意义和理论探讨价值[1, 2]• 在时域离散求解中, 不论迭代或通过附加假定做线性化近似处理, 都应计及时间步长对计算精度的影响[3]• 杨海天[3]提出了一种求解传输问题的时域精细算法, 对非线性问题而言, 其主要优点是无需迭代和任何附加假设, 并可根据时间步长变化进行自适应计算, 以保证足够的计算精度• 但该算法目前只用于求解简单的一维非线性问题[4, 5], 探讨其在二维、三维非线性问题中的扩展和应用十分必要• 本文工作是文献[3]和文献[4]的进一步深入和拓展, 通过在离散的时间段上将所有变量展开, 将非线性时空耦合初边值问题转化为一系列递推的线性边值问题, 由有限元法(FEM)求解这些边值问题, 数值结果比较令人满意•

* 收稿日期: 2003_12_17; 修订日期: 2005_03_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172024, 10421002); 国家自然科学基金(重点)资助项目(10032030); 国家 973 基金资助项目(G1999032805); 教育部骨干教师资助计划资助项目(2000_65); 教育部重点基金资助项目(99149); 教育部归国留学人员启动基金资助项目(1999_363); 辽宁省中青年学术带头人基金资助项目
作者简介: 杨海天(1956—), 男, 大连人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_411_84708394; Fax: + 86_411_84708400; E_mail: Haitian@dlut.edu.cn)•

1 湿热耦合问题的控制方程

非线性湿热耦合传输问题的控制方程可写为以下张量形式[3,4]

$$c_{ji}(V^i)_{,t} = (k_{ji}(V^i)_{,l})_{,l} + f_j, \tag{1}$$

$$c_{ji} = c_{ji}(V^k, t), \tag{2}$$

$$k_{ji} = k_{ji}(V^k, t), \tag{3}$$

对于二维问题, i、j 和 l 从 1 变化到 2; $k = 1, 2$, $k = 1$ 代表温度; $k = 2$ 代表湿度; 对指标 i 和 l 使用了求和约定•

对于一般非线性情况, k_{ij} 和 c_{ij} 可表示为[1,2]

$$k_{11} = (k_{q0} + \lambda_0\rho_0\varepsilon_0 a_{m0}\delta_0) + k_{q1}V^1 + \lambda_0\rho_0(\varepsilon_1 a_{m0}\delta_0 + \varepsilon_0 a_{m1}\delta_0 + \varepsilon_0 a_{m0}\delta_1)V^2 + \lambda_0\rho_0(\varepsilon_0 a_{m1}\delta_1 + \varepsilon_1 a_{m0}\delta_1 + \varepsilon_1 a_{m1}\delta_0)(V^2)^2 + \lambda_0\rho_0\varepsilon_1 a_{m1}\delta_1(V^2)^3, \tag{4}$$

$$k_{12} = \lambda_0\rho_0\varepsilon_0 a_{m0} + \lambda_0\rho_0(\varepsilon_0 a_{m1} + \varepsilon_1 a_{m0})V^2 + \lambda_0\rho_0\varepsilon_1 a_{m1}(V^2)^2, \tag{5}$$

$$k_{13} = \lambda_0\varepsilon_0 k_{p0} + \lambda_0 k_{p0}\varepsilon_1 V^2 + \lambda_0\varepsilon_0 k_{p1}V^1 + \lambda_0\varepsilon_1 k_{p1}V^2V^1, \tag{6}$$

$$k_{21} = \rho_0 a_{m0}\delta_0 + \rho_0(a_{m1}\delta_0 + a_{m0}\delta_1)V^2 + \rho_0 a_{m1}\delta_1(V^2)^2, \tag{7}$$

$$k_{22} = \rho_0 a_{m0} + \rho_0 a_{m1}V^2, \tag{8}$$

$$k_{23} = k_{p0} + k_{p1}V^1, \tag{9}$$

$$k_{31} = -\rho_0\varepsilon_0 a_{m0}\delta_0 - \rho_0(\varepsilon_0 a_{m0}\delta_1 + \varepsilon_0 a_{m1}\delta_0 + \varepsilon_1 a_{m0}\delta_0)V^2 - \rho_0(\varepsilon_0 a_{m1}\delta_1 + \varepsilon_1 a_{m0}\delta_1 + \varepsilon_1 a_{m1}\delta_0)(V^2)^2 - \rho_0\varepsilon_1 a_{m1}\delta_1(V^2)^3, \tag{10}$$

$$k_{32} = -\rho_0\varepsilon_0 a_{m0} - \rho_0(\varepsilon_0 a_{m1} + \varepsilon_1 a_{m0})V^2 - \rho_0 a_{m1}\varepsilon_1(V^2)^2, \tag{11}$$

$$k_{33} = k_{p0}(1-\varepsilon_0) - \varepsilon_1 k_{p0}V^2 + k_{p1}(1-\varepsilon_0)V^1 - \varepsilon_1 k_{p1}V^2V^1, \tag{12}$$

$$c_{11} = \rho_0 c_{q0} + \rho_0 c_{q1}V^1, \tag{13}$$

$$c_{22} = \rho_0, \tag{14}$$

$$c_{33} = \rho_0 c_{p0} + \rho_0 c_{p1}V^1, \tag{15}$$

$$c_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \tag{16}$$

表 1 材料属性列表

热物理参数	情况 1	情况 2	情况 3
k_q/(W/(m·K))	10℃时 0.29	10℃时 0.29	0.35
	60℃时 0.45	60℃时 0.45	
c_q/(J/(kg·K))	10℃时 1 163	10℃时 1 163	1 284
	60℃时 1 405	60℃时 1 405	
a_m/(m²/s)	12% m/c 时 0.60×10⁻⁹	1.00×10⁻⁹	12% m/c 时 0.60×10⁻⁹
	30% m/c 时 1.54×10⁻⁹		30% m/c 时 1.54×10⁻⁹
δ/(1/℃)	12% m/c 时 0.01	0.02	12% m/c 时 0.01
	30% m/c 时 0.02		30% m/c 时 0.02
ε	12% m/c 时 1.0	0.3	12% m/c 时 1.0
	30% m/c 时 0.1		30% m/c 时 0.1
λ/(J/kg)	2.3×10⁶	2.3×10⁶	2.3×10⁶
ρ/(kg/m³)	500	500	500

k_{q0}、k_{q1}、ε_0、ε_1、λ_0、a_{m0}、a_{m1}、ρ_0、δ_0、δ_1、k_{p0}、k_{p1}、c_{p0}、c_{p1}、c_{q0}、c_{q1} 的定义见文献[2],其值列于过表 1• 上述控制方程对应的初始和边界条件由文献[2]给出•

2 自适应时域精细算法

在离散的时间段上，将 V^j 及各非线性项展开为

$$V^j = \sum_{m=0} V^j_m s^m, \tag{17}$$

$$c_{ji} = c_{ji}(V^k, t) = \sum_{m=0} c_{ji}^m s^m, \tag{18}$$

$$k_{ji} = k_{ji}(V^k, t) = \sum_{m=0} k_{ji}^m s^m, \tag{19}$$

$$f_j = \sum_{m=0} f_j^m s^m, \tag{20}$$

式中 V^j_m 表示 V^j 的展开系数，相应地 c_{ji}^m、k_{ji}^m 和 f_j^m 分别表示 c_{ji}、k_{ji} 和 f_j 的展开系数，s 定义为

$$s = (t - t_0)/T_s, \tag{21}$$

其中 t_0 和 T_s 分别表示该时间段的起始点和长度。

通过变量展开技术[3,4]，可得到递推形式的控制方程

$$\sum_{m=0}^{N} \frac{(m+1)}{T_s} c_{ji}^{N-m} V^i_{m+1} = \sum_{m=0}^{N} (k_{ji}^{N-m}(V^i_m)_{,l})_{,l} + f_j^N, \tag{22}$$

相应的边界条件表示为[3,4]

$$V^j_N = (V^j_B)_N \qquad (\text{在 } \Gamma_{j1} \text{ 上}), \tag{23}$$

$$n_l \sum_{m=0}^{N} (k_{ji}^{N-m} V^i_{m,l}) = q^j_N \qquad (\text{在 } \Gamma_{j2} \text{ 上})。 \tag{24}$$

首先需确定 $c_{ji} = c_{ji}(V^k, t)$，$k_{ji} = k_{ji}(V^k, t)$ 的展开系数，以 k_{11} 为例，将方程(17)代入 k_{11} 的表达式中，并改写为下列形式

$$\begin{aligned} k_{11} = {} & b_0 + b_1 \sum_{n=0} V^1_n s^n + b_2 \sum_{n=0} V^2_n s^n + b_3 \sum_{n_1=0} V^2_{n_1} s^{n_1} \sum_{n_2=0} V^2_{n_2} s^{n_2} + \\ & b_4 \sum_{n_1=0} V^2_{n_1} s^{n_1} \sum_{n_2=0} V^2_{n_2} s^{n_2} \sum_{n_3=0} V^2_{n_3} s^{n_3} = \\ & (b_0 + b_1 V^1_0 + b_2 V^2_0 + b_3 (V^2_0)^2 + b_4 (V^2_0)^3) + \\ & \sum_{n=1} \left(b_1 V^1_n + b_2 V^2_n + b_3 \sum_{n_1=0}^{n} V^2_{n-n_1} V^2_{n_1} + b_4 \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n_1} V^2_{n-n_1} V^2_{n_1-n_2} V^2_{n_2} \right) s^n = \\ & \sum_{n=0} k^n_{11} s^n, \end{aligned} \tag{25}$$

其中

$$b_0 = k_{q0} + \lambda_0 \rho_0 \varepsilon_0 a_{m0} \delta_0, \tag{26}$$

$$b_1 = k_{q1}, \tag{27}$$

$$b_2 = \lambda_0 \rho_0 (\varepsilon_1 a_{m0} \delta_0 + \varepsilon_0 a_{m1} \delta_0 + \varepsilon_0 a_{m0} \delta_1), \tag{28}$$

$$b_3 = \lambda_0 \rho_0 (\varepsilon_0 a_{m1} \delta_1 + \varepsilon_1 a_{m0} \delta_1 + \varepsilon_1 a_{m1} \delta_0), \tag{29}$$

$$b_4 = \lambda_0 \rho_0 \varepsilon_1 a_{m1} \delta_1。 \tag{30}$$

比较式(25)中同次幂的系数有

$$k^0_{11} = b_0 + b_1 V^1_0 + b_2 V^2_0 + b_3 (V^2_0)^2 + b_4 (V^2_0)^3, \tag{31}$$

$$k^N_{11} = b_1 V^1_N + b_2 V^2_N + b_3 \sum_{n_1=0}^{N} V^2_{N-n_1} V^2_{n_1} + b_4 \sum_{n_1=0}^{N} \sum_{n_2=0}^{n_1} V^2_{N-n_1} V^2_{n_1-n_2} V^2_{n_2} \qquad (N \neq 0)。 \tag{32}$$

其他的 $c_{ji} = c_{ji}(V^k, t)$ 和 $k_{ji} = k_{ji}(V^k, t)$ 可用同样方法处理。

对递推方程(22),可建立递推的FEM 求解公式[3,4]

$$\sum_{m=0}^{N}\frac{(m+1)}{T_s}\boldsymbol{C}^{N-m}\boldsymbol{V}_{m+1}+\sum_{m=0}^{N}\boldsymbol{K}^{N-m}\boldsymbol{V}_m=\boldsymbol{f}^N+F^N, \tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{V}_k$ 为 V_k^j 的节点向量, $\boldsymbol{C}^{N-m}$, $\boldsymbol{K}^{N-m}$, $\boldsymbol{f}^N$ 和 F^N 如文献[3]和文献[4]所定义•

在每个时间步, 自适应计算通过定义下列判则实现

$$\mathrm{Abs}\left(V_m^j s^m \Big\backslash \sum_{k=0}^{m-1} V_k^j s^k\right)_{s=1} \leqslant \beta, \tag{34}$$

其中 β 为误差限, V_k^j 表示 $\boldsymbol{V}_k$ 的第j 个元素•

用上述判则对每个 $\boldsymbol{V}_m (m = 1, 2, \dots)$ 进行检查, 如果判则(34) 连续3 次满足, 所考虑时间步上的计算停止, 进入下一时间步• 如果判则不满足, 进行 $m+1$ 阶计算直至收敛•

在计算中, 预先设置 m 的上限M• 如果计算在 $m = M$ 时仍不能收敛, 则有必要减少时间步长或者增大 M; 如果条件(34) 当 $m \ll M$ 就已满足, 可以考虑更大的时间步长• 所有上述过程可由计算机程序自动实现•

3 数 值 算 例

分析算例[1,2], 考虑 3 种非线性情况: 1) 材料属性仅随温度变化; 2) 材料属性仅随湿度变化; 3) 材料属性随温度和湿度变化• 数值结果示于表 2 至表 8, 并和文献[2] 的结果进行了比较•

表2　工况 1节点 9 ($x = 0, y = 0$) 和节点 40 ($x = 5$ cm, $y = 1.4$ cm) 温度数值结果比较(℃)

时间(min)	节点 9		节点 40	
	本文解	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s	本文解	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s
10	46.020	46.009	51.809	51.802
20	56.979	56.969	58.371	58.364
30	59.273	59.269	59.574	59.572
40	59.737	59.736	59.799	59.798
50	59.829	59.828	59.842	59.841
60	59.847	59.846	59.850	59.849

表3　工况 1温度数值结果比较($t = 30$ min) (℃)

X (cm)	本文解 $y = 0$	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s, $y = 0$	本文解 $y = 1.4$ cm	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s, $y = 1.4$ cm
0	59.273	59.269	59.483	59.481
2	59.295	59.291	59.497	59.495
4	59.362	59.359	59.540	59.538
6	59.481	59.479	59.615	59.615
8	59.662	59.661	59.734	59.734

表4　工况 2 湿度数值结果比较($t = 10$ h)

X (cm)	本文解 $y = 0$	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s, $y = 0$	本文解 $y = 1.4$ cm	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s, $y = 1.4$ cm
0	0.298 8	0.299 0	0.267 1	0.267 2
2	0.298 8	0.299 0	0.267 1	0.267 2
4	0.298 8	0.299 0	0.267 1	0.267 2
6	0.298 8	0.298 9	0.267 1	0.267 2
8	0.292 9	0.293 1	0.263 0	0.263 1

表 5　工况 3 节点 9 ($x = 0, y = 0$) 和节点 40 ($x = 5$ cm, $y = 1.4$ cm) 温度数值结果比较(℃)

时间(min)	节点 9		节点 40	
	本文解	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s	本文解	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s
10	45.756	45.753	51.611	51.612
20	56.805	56.800	58.223	58.227
30	59.147	59.145	59.458	59.457
40	59.626	59.625	59.690	59.690
50	59.722	59.721	59.735	59.734
60	59.741	59.740	59.743	59.743

表 6　工况 3 温度数值结果比较($t = 30$ min) (℃)

X (cm)	本文解 $y = 0$	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s, $y = 0$	本文解 $y = 1.4$ cm	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s, $y = 1.4$ cm
0	59.147	59.145	59.365	59.364
2	59.169	59.167	59.379	59.378
4	59.239	59.237	59.424	59.422
6	59.363	59.361	59.503	59.501
8	59.532	59.537	59.609	59.613

表 7　工况 3 节点 9 ($x = 0, y = 0$) 和节点 40 ($x = 5$ cm, $y = 1.4$ cm) 湿度数值结果比较

时间(h)	节点 9		节点 40	
	本文解	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s	本文解	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s
2	0.302 6	0.302 6	0.299 8	0.300 2
4	0.302 4	0.302 5	0.290 9	0.291 1
6	0.301 9	0.302 0	0.281 6	0.281 8
8	0.300 6	0.300 7	0.273 6	0.273 7
10	0.298 5	0.298 6	0.266 6	0.266 7

表 8　工况 3 湿度数值结果比较($t = 10$ h)

X (cm)	本文解 $y = 0$	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s, $y = 0$	本文解 $y = 1.4$ cm	文献[2] 解 $\Delta t = 1$ s, $y = 1.4$ cm
0	0.298 5	0.298 6	0.266 6	0.266 7
2	0.298 5	0.298 6	0.266 6	0.266 7
4	0.298 5	0.298 6	0.266 6	0.266 7
6	0.298 4	0.298 6	0.266 6	0.266 7
8	0.292 5	0.292 8	0.262 5	0.262 7

4　结　　论

应用时域精细算法求解二维非线性湿热耦合传输问题, 提出了自适应计算的收敛判则, 数值结果体现了这种算法处理复杂非线性问题的能力• 该算法的应用, 可将时空耦合的非线性初边值问题转化为一系列递推的线性边值问题, 从而可根据具体情况, 使用相应的空间数值/解析求解技术, 如有限元、边界元、无单元伽辽金法等进行求解• 求解中无需任何附加假设和迭代, 可更精确描述变量的变化过程, 自适应过程有望保持时间步长选择不同时的计算精度• 本文方法也可用于其它时空耦合问题的求解, 如热传导、粘弹性、非线性动力问题等等•

[参 考 文 献]

[1] Thomas H R, Lewis R W, Morgan K. An application of the finite element method to the drying of timber[J]. Wood Fiber, 1979, **11**: 123—130.

[2] Lewis R W, Morgan K, Thomas H R, et al. The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis [M]. UK(London): Wiley, 1996, 213—249.

[3] YANG Hai_tian. A precise algorithm in the time domain to solve the problem of heat transfer[J]. Numerical Heat Transfer, Part B, 1999, **35**(2): 243—249.

[4] YANG Hai_tian. A new approach of time stepping for solving transfer problems [J]. Communications of Numerical methods in Engineering, 1999, **15**: 325—334.

[5] YANG Hai_tian, GAO Qiang, GUO Xing_lin, et al. A new algorithm of time stepping in the non_linear dynamic analysis[J]. Communications of Numerical Methods in Engineering, 2001, **17**(9): 597—611.

Solving 2_D Nonlinear Coupled Heat and Moisture Transfer Problems via a Self_Adaptive Precise Algorithm in Time Domain

YANG Hai_tian[1], LIU Yan[2], WU Rui_feng[1]

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, P.R. China;

2. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, P.R. China)

Abstract: A self_adaptive precise algorithm in the time domain was employed to solve 2_D nonlinear coupled heat and moisture transfer problems. By expanding variables at a discretized time interval, the variations of variables can be described more precisely, and a nonlinear coupled initial and boundary value problem was converted into a series of recurrent linear boundary value problems which are solved by FE technique. In the computation, no additional assumption and the nonlinear iteration are required, and a criterion for selfadaptive computation is proposed to maintain sufficient computing accuracy for the change sizes of time steps. In the numerical comparison, the variations of material properties with temperature, moisture content, and both temperature and moisture content are taken into account, respectively. Satisfactory results have been obtained, indicating that the proposed approach is capable of dealing with complex nonlinear problems.

Key words: finite element; non_linear transfer problem; time stepping; selfadaptive computation