

文章编号: 1000-0887(2005) 07\_0819\_07

# 基于单位分解积分的伽辽金 无网格方法研究\*

曾清红, 卢德唐

(中国科学技术大学 力学和机械工程系, 合肥 230027)

(程耿东推荐)

**摘要:** 数值积分是伽辽金无网格方法实施的一个重要环节, 提出了一种适合于伽辽金无网格方法的单位分解积分技术. 该积分技术建立在有限覆盖和单位分解基础之上, 不需要对积分区域进行分解, 具有较高的积分精度. 并以无单元伽辽金方法为例, 详细说明了基于单位分解积分的伽辽金无网格方法的实现过程. 这样, 在近似函数建立和数值积分过程中都不需要进行网格划分, 从而形成一种“真正的”无网格方法.

**关键词:** 伽辽金无网格方法; 有限覆盖; 单位分解; 数值积分

**中图分类号:** O242.21      **文献标识码:** A

## 引 言

无网格方法是近 10 年内迅速发展起来的一种新的数值计算方法, 这种方法建立在结点基础之上, 不依赖于网格信息, 能够消除或者部分消除网格划分所带来的困难. 伽辽金无网格方法由于精度高, 稳定性好而获得广泛应用. 但在伽辽金弱形式中不可避免地要对整个解域进行求积, 由于无网格方法缺乏网格信息, 这对于伽辽金无网格方法是一个挑战.

为计算伽辽金无网格方法中的区域积分, Belytschko 和 Lu 等<sup>[1,2]</sup> 采用胞元积分(CQ), 或称背景网格积分. 目前的伽辽金无网格方法大多使用这种积分方法. 该方法积分精度较高, 但胞元的引入, 使方法在某种程度上丧失了“无网格”特性; 并且胞元的设计没有考虑结点的空间分布, 在被积函数复杂的情况下, 积分误差较大. Beissel<sup>[3]</sup>, Chen<sup>[4]</sup> 等使用结点积分进行数值求积. 结点积分实施简单, 计算量也比较小, 但其积分精度不高, 结果容易出现空间振荡.

本文建议的单位分解积分(partition of unity quadrature, PUQ)方法建立在有限覆盖和单位分解基础之上, 在近似函数建立和数值积分过程中都不需要进行网格划分, 从而形成真正的无网格方法. 积分子域考虑了结点的空间分布, 根据 Dollbow<sup>[5]</sup> 的观点, 这样能够减少积分误差.

\* 收稿日期: 2003\_07\_07; 修订日期: 2005\_03\_15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10102020); 973 国家基金资助项目(G1999032805)

作者简介: 曾清红(1978—), 男, 长沙人, 博士(Tel: + 86\_551\_3603674; Fax: + 86\_55\_1\_3606459; E\_mail: qhzheng@ustc.edu);

卢德唐(联系人, Tel: + 86\_551\_3603674; Fax: + 86\_551\_3606459; E\_mail: dtlu@ustc.edu.cn)•

## 1 移动最小二乘法(MLS)

由于无单元伽辽金(element free galerkin method, EFG)方法<sup>[1,2]</sup>中形函数的构造和单位分解积分都需要用到移动最小二乘法<sup>[1,2],[6]</sup>,在此作简要介绍. 在求解区域  $\Omega$  上, 场函数  $u(x)$  可近似表示为

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m a_i(x) p_i(x) = \mathbf{a}^T(x) \mathbf{p}(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

这里  $\mathbf{a}(x)$  是待定系数,  $\mathbf{p}(x)$  是基函数.

为求得系数  $\mathbf{a}(x)$ , 考虑下面的  $L_2$  模

$$J = \sum_I w(x - \mathbf{x}_I) [u^h(x) - u(\mathbf{x}_I)]^2 = \sum_I w(x - \mathbf{x}_I) [\mathbf{a}^T(x) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) - u_I]^2, \quad (2)$$

$n$  是  $x$  邻域内的结点数目,  $u_I = u(\mathbf{x}_I)$ ,  $w(x - \mathbf{x}_I)$  是权函数. 对上式取极小, 即令  $\partial J / \partial \mathbf{a} = 0$ , 可以求得

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x) \mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{I=1}^n w(x - \mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I), \quad (4)$$

$$\mathbf{B}(x) = [w(x - \mathbf{x}_1) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad w(x - \mathbf{x}_2) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad w(x - \mathbf{x}_n) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)], \quad (5)$$

于是, 近似函数(1)可以写为

$$u^h(x) = \sum_I N_I u_I = \mathbf{N}(x) \mathbf{u}, \quad (6)$$

其中形函数

$$\mathbf{N}(x) = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n] = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1}(x) \mathbf{B}(x), \quad (7)$$

如果取基函数  $\mathbf{p}(x) = [1]$ , 则得到的形函数就是 Shepard 函数

$$N_I^{\text{Shepard}}(x) = w(x - \mathbf{x}_I) \setminus \sum_{J=1}^n w(x - \mathbf{x}_J). \quad (8)$$

## 2 单位分解积分

定义 1(有限覆盖) 设  $\Omega$  是定义在  $R^d$  ( $d = 1, 2, 3$ ) 上的有界开域,  $\bar{\Omega}$  是  $\Omega$  的闭包,  $\mathbf{Q}_N$  是  $\Omega$  中  $N$  个点的集合,

$$\mathbf{Q}_N = \{ \mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_N \}, \quad \mathbf{x}_k \in \Omega,$$

使用  $\mathbf{Q}_N$  定义有限开覆盖  $\mathcal{O}_N = \{ \Omega_k \}_{k=1}^N$ ,  $\mathcal{O}_N$  由  $N$  个中点在  $\mathbf{x}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$  的圆域(或矩形域)组成, 满足如下条件

$$\Omega_k = \{ \mathbf{x} \in \Omega : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_{R^d} < r_k \}, \quad (9a)$$

$$\bigcup_{k=1}^N \Omega_k \supset \Omega, \quad (9b)$$

则称  $\mathcal{O}_N$  是  $\Omega$  的一个有限覆盖. 图 1 中  $\{ \Omega_k \}_{k=1}^N$  是  $\Omega$  上的一个有限覆盖.

定义 2(单位分解) 设  $\mathcal{O}_N = \{ \Omega_k \}_{k=1}^N$  是开域  $\Omega \subset R^d$  上的一个有限覆盖, 函数集  $\Phi_N = \{ \phi_k \}_{k=1}^N$  如果满足如下性质

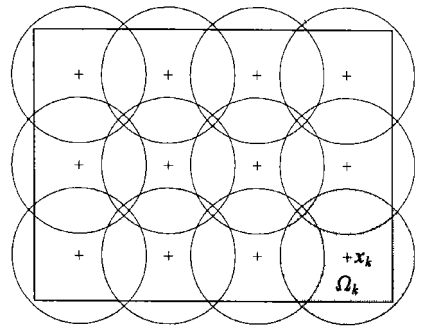


图 1 有限覆盖

$$\phi_k(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(R^d), \quad 0 \leq \phi_k(\mathbf{x}) \leq 1, \quad \mathbf{x} \in R^d, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (10a)$$

$$\sum_{k=1}^N \phi_k(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10b)$$

$$\text{supp } \phi_k(\mathbf{x}) \subset \Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (10c)$$

则称函数集  $\Phi_N = \{\phi_k\}_{k=1}^N$  是关于有限覆盖  $O_N = \{\Omega_k\}_{k=1}^N$  的单位分解.  $\text{supp } \phi_k(\mathbf{x})$  表示点集  $\{\mathbf{x} \in \Omega: \phi_k(\mathbf{x}) \neq 0\}$  的闭包, 称之为  $\phi_k(\mathbf{x})$  的支集.

定理 假设  $O_N = \{\Omega_k\}_{k=1}^N$  是有界域  $\Omega$  的一个有限覆盖,  $\Phi_N = \{\phi_k\}_{k=1}^N$  是关于覆盖  $O_N$  的单位分解,  $f(\mathbf{x})$  是定义在  $\Omega$  上的可积函数, 则有如下等式成立

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega \cap \Omega_k} \phi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (11)$$

证明 由于  $\sum_{k=1}^N \phi_k(\mathbf{x}) = 1$  对  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  成立, 所以有

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \phi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} \phi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega, \quad (12)$$

由性质(10c), 如果  $\mathbf{x} \notin \Omega_k$ , 则有  $\phi_k(\mathbf{x}) = 0$ . 于是得到

$$\int_{\Omega} \phi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Omega \cap \Omega_k} \phi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)中, 即可得证. 由于式(10b), 我们将这种积分技术称为单位分解积分.

观察到 MLS 形函数(7)满足条件(10), 可以选取 MLS 形函数  $N(\mathbf{x})$  作为单位分解积分中的函数集  $\Phi_N$ . 我们将  $N(\mathbf{x})$  称为 MLS 形函数, 将  $\Phi(\mathbf{x})$  称为单位分解函数, 这两个函数的建立是相互独立<sup>[7]</sup>. 为了计算简便, 常将 Shepard 函数(8)作为单位分解函数.

### 3 方法实施

#### 3.1 修正变分原理

考虑 2D 泊松方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ u = u, & \text{在 } \Gamma_u \text{ 上,} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -q, & \text{在 } \Gamma_q \text{ 上,} \end{cases} \quad (14)$$

式中  $\Gamma_u$  和  $\Gamma_q$  分别是本质边界和自然边界,  $\mathbf{n}$  是  $\partial\Omega$  上单位外法向量.

由修正变分原理, 上述方程及边界条件与下面泛函的驻值问题等价

$$\Pi = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + uf \right\} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \left[ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} (u - u) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_q} uq d\Gamma. \quad (15)$$

将(6)代入上式, 由  $\delta\Pi = 0$  可以得到离散化的代数方程

$$\mathbf{K}u = \mathbf{F}, \quad (16)$$

其中

$$K_{ij} = - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] d\Omega +$$

$$\int_{\Gamma_u} \left[ \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} n_x + \frac{\partial N_i}{\partial y} n_y \right) N_j + \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} n_x + \frac{\partial N_j}{\partial y} n_y \right) N_i \right] d\Gamma, \quad (17a)$$

$$F_i = \int_{\Omega} N_i d\Omega + \int_{\Gamma_u} \left[ \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} n_x + \frac{\partial N_i}{\partial y} n_y \right) u \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_q} N_i q d\Gamma, \quad (17b)$$

$K$  是刚度矩阵, 它对称、正定, 并且是带状的;  $n_x$ 、 $n_y$  分别是  $\mathbf{n}$  在  $x$  轴和  $y$  轴上的分量。

### 3.2 覆盖的形状、大小和构造

覆盖  $\Omega_k$  的形状一般为圆形、矩形或椭圆形。覆盖  $\Omega_k$  上定义有权函数, 它决定了覆盖的形状。权函数一般选择为三次样条权函数, 如图 2 所示, 其表达式为

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & \left( r \leq \frac{1}{2} \right), \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & \left( \frac{1}{2} < r \leq 1 \right), \\ 0 & (r > 1). \end{cases} \quad (18)$$

区域  $\Omega$  必须被“充分”覆盖, 以保证在计算 MLS 形函数时(4)式中的  $A$  可逆。例如, 二维情况下, 对于线性基函数  $\mathbf{p}(x) = [1, x, y]^T$ , 要求每个计算点至少被中心不在同一直线上的 3 个覆盖包含。可以使用四象限法则<sup>[8,9]</sup>由离散结点模型自动生成结点覆盖:

1) 赋  $N$  个结点的覆盖集合  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$  的

每一个覆盖半径  $r_k = 0$ ;

2) 对  $N$  个节点循环;

3) 对每一个节点, 以该节点为原点, 确定各象限与该节点距离最近的点, 其距离分别记为  $r_{k1}$ 、 $r_{k2}$ 、 $r_{k3}$ 、 $r_{k4}$ 。取  $r_k = \max\{r_{k1}, r_{k2}, r_{k3}, r_{k4}\}$ , 以保证每个覆盖在各个方向包含适当的节点;

4) 结束节点循环;

5) 每个  $r_k$  乘以一个放大系数  $D_{\max}$ , 一般取  $D_{\max} = 1.2 \sim 2.0$ 。

### 3.3 算法流程

在覆盖上采用高斯求积。为了提高积分精度, 可以将覆盖细化, 如图 3 所示。如果积分点  $x_Q$  不在求解区域  $\Omega$  内, 则简单地将之略去不计。图 3 左下角有一个积分点位于解域  $\Omega$  之外, 在积分时认为该积分点对积分没有贡献。下面给出基于 PUQ 的伽辽金无网格方法的实施流程:

1) 以结点集  $\mathbf{Q}_N = \{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$  构造求解区域  $\Omega$  的一个有限覆盖  $\mathbf{O}_N = \{\Omega_k\}_{k=1}^N$ ,  $\Omega_k$  为矩形域, 其尺寸记为  $(L_x, L_y)_k$ ;

2) 对每个  $\Omega_k$  进行循环;

3) 对  $\Omega_k$  中的细分网格进行循环;

4) 对细分网格中的积分点进行循环;

a) 如果积分点  $x_Q$  落在区域  $\Omega$  之外, 转至 f);

b) 计算形函数  $N(x_Q)$  及其导数  $N_{,i}(x_Q)$ ;

c) 判断所有包含积分点  $x_Q$  的覆盖  $\{\Omega_l\}_{l=1}^n$ , 并计算单位分解函数  $\Phi(x_Q)$ ;

d) 计算式(17)中的域积分和边界积分;

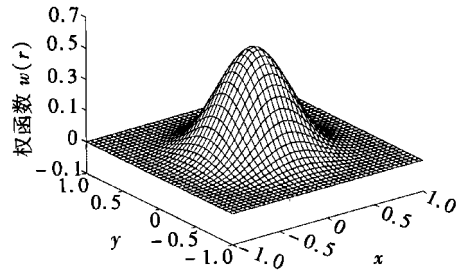


图 2 三次样条权函数

- e) 将积分点  $x_Q$  的贡献组装到  $K$  和  $F$ ;
  - f) 结束如果
- 5) 求解代数方程组;

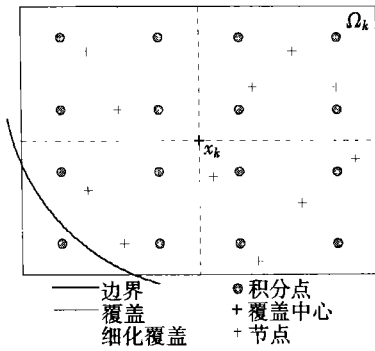


图3 覆盖细化

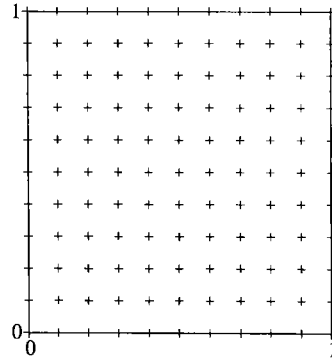


图4 结点分布

## 4 算 例

考虑泊松方程

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x, y) = -2(x + y - x^2 - y^2), & \text{在 } \Omega \text{ 中: } x \in [0, 1], y \in [0, 1], \\ u(x, y) = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上,} \end{cases} \quad (19)$$

其精确解为

$$u(x, y) = (x - x^2)(y - y^2). \quad (20)$$

在解域布置  $11 \times 11$  的结点, 如图4所示. 采用方形覆盖, 记结点间的长度为  $L$ , 则覆盖的边长取为  $2 \times 0.8L$ , 覆盖上布置  $4 \times 4$  高斯点. 图5给出了  $x = 0.5$  处的PUQ解、胞元积分解和精确解. 从图中可以看出, 除PUQ解在边界处的误差稍大之外, PUQ解和CQ解都非常接近于精确解.

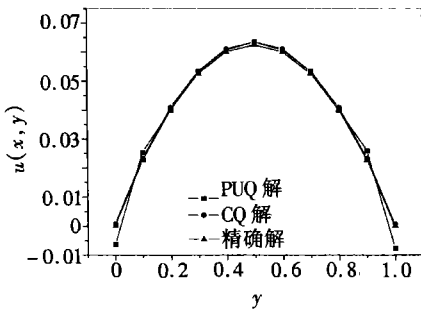


图5 结果比较

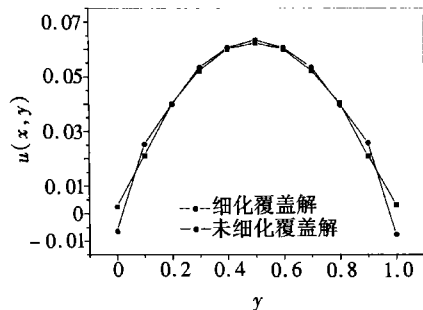


图6 覆盖细化和未细化解的比较

上面的积分过程没有将覆盖细化, 导致边界处的积分误差较大. 为此, 我们采用如图3所示的细化覆盖, 将方形覆盖细化为  $2 \times 2$  的网格, 每个细化网格上布置  $2 \times 2$  的高斯点. 图6是在  $x = 0.5$  处, 覆盖细化解与覆盖未细化解的比较. 覆盖细化的解在边界处有了明显的改善. 从表1中可以看出, 覆盖细化不但明显改善了边界处的解, 对于整个解域的求解精度都有所提高.

下面考察方形覆盖大小对求解精度的影响. 为此, 定义误差:

$$\text{error} = \sum_{i=1}^N [u^{\text{NUM}}(x_i, y_i) - u^{\text{EXC}}(x_i, y_i)]^2, \quad (21)$$

其中  $u^{\text{NUM}}$ ,  $u^{\text{EXC}}$  分别表示数值解和精确解。

表 1 覆盖细化解 (RFS)、未覆盖细化解 (URFS) 以及精确解 (EXS) ( $\times 10^{-2}$ )

y	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
EXS	0	2.25	4.00	5.25	6.00	6.25	6.00	5.25	4.00	2.25	0
RFS	0.26	2.10	4.02	5.22	6.00	6.24	6.00	5.22	4.03	2.08	0.32
URFS	-0.64	2.53	3.99	5.34	6.06	6.33	6.06	5.34	3.98	2.58	-0.76

误差的变化情况如表 2 所示。当覆盖边长为  $1.0L$  的时候, 有限覆盖能够“刚好”覆盖整个解域, 即相当于是胞元积分。当覆盖边长增长到  $1.2L$  时, 出现一个大的误差, 这是因为在覆盖重叠处缺少积分点, 导致积分结果偏大。一般情况下, 覆盖大小采用  $1.6L$  是合适的。

表 2 覆盖大小与误差 ( $\times 10^{-4}$ )

边长	1.0L	1.2L	1.4L	1.6L	1.8L	2.0L	2.2L	2.4L
误差	160.0	1170.0	3.880	2.621	0.8714	1.916E-5	5.558	20.0

## 5 结 论

文章提出了一种数值积分方法\_单位分解积分, 并将其应用于伽辽金无网格方法。从理论上对单位分解积分进行了严格证明, 并且详细阐述了基于单位分解积分的伽辽金无网格方法的实施过程。提出了覆盖细化方法以提高积分精度, 分析了覆盖大小对解的影响。基于单位分解积分的伽辽金无网格方法具有许多优点, 如精度高, 刚度矩阵对称, 方法实现不依赖于任何网格信息等, 是一种真正的无网格方法。数值算例说明该方法具有比传统的数值积分更好的精度。该方法可以很容易推广到线弹性和非线性弹性问题。

### [参 考 文 献]

- [1] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element\_free Galerkin methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, **37**(2): 229—256.
- [2] Lu Y Y, Belytschko T, Gu L. A new implementation of the element free Galerkin method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, **113**(3/4): 397—414.
- [3] Beissel S, Belytschko T. Nodal integration of the element\_free Galerkin method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, **139**(1/4): 49—74.
- [4] Chen J S, Wu C T, Yoon S, et al. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh\_free methods[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, **50**(2): 435—466.
- [5] Dolbow J, Belytschko T. Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods[J]. Computational Mechanics, 1999, **23**(3): 219—230.
- [6] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods: an overview and recent developments [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, **139**(1/4): 3—47.
- [7] Marc D, Hung N D. A truly meshless Galerkin method based on a moving least squares quadrature [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2002, **18**(1): 1—9.
- [8] Liszka T J, Duarte C A M, Tworzydlo W W. Hp\_meshless cloud method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, **139**(1/4): 263—288.
- [9] 刘欣, 朱德懋, 陆明万, 等. 基于流行覆盖思想德无网格方法的研究[J]. 计算力学学报, 2001, **18**

(1): 21—27.

## Galerkin Meshless Methods Based on Partition of Unity Quadrature

ZENG Qing\_hong, LU De\_tang

( Department of Mechanics and Mechanic Engineering,  
University of Science and Technology of China, Hefei 230027, P. R. China )

**Abstract:** Numerical quadrature is an important ingredient of Galerkin meshless methods. A new numerical quadrature technique, partition of unity quadrature (PUQ), for Galerkin meshless methods was presented. The technique was based on finite covering and partition of unity. There was no need to decompose the physical domain into small cell. It possessed remarkable integration accuracy. Using Element\_free Galerkin methods as example, Galerkin meshless methods based on PUQ were studied in detail. Meshing is always not required in the procedure of constitution of approximate function or numerical quadrature, so Galerkin meshless methods based on PUQ are “truly” meshless methods.

**Key words:** Galerkin meshless method; finite cover; partition of unity; numerical quadrature