应用数学和力学,第 26 卷 第 7 期(2005 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 07_0826_07

非零势能的耗散力学控制系统的位形能控性

康剑灵[1], 王 红[2], 叶华文[3]

(1. 东华大学 应用数学系, 上海 200051;
2. 南开大学 数学科学院和核心数学与组合数学教育部重点实验室, 天津 300071;
3. 西北工业大学 自动控制系, 西安 710072)

(叶庆凯推荐)

摘要: 在拉格朗日力学控制系统的仿射联络框架下, 基于 Sussmann 对有限维流形上一般仿射非线性控制系统的能控性讨论, 将简单力学控制系统短时间局部位形能控的一个可计算的充分条件推广到迷向耗散的系统上, 并给出系统是平衡点能控的一个充分条件, 其中, 系统的拉格朗日函数为动能减势能 在问题的讨论中, 系统的能控李代数的向量场李括号运算, 以及与系统位形流形的 Levi_Civita 联络相关的对称积起了重要作用 尽管势能项会使系统的位形能控性讨论复杂化, 但 Liouville 向量场又简化了系统的能控李代数计算

关 键 词: 力学; 能控性; 仿射联络; 对称积; 迷向耗散
中图分类号: O231 文献标识码: A

引 言

力学控制系统的研究介于经典力学和现代非线性控制的研究之间, 分别在哈密尔顿框架下和拉格朗日框架下对力学控制系统的研究已经取得了许多成果[1,2] 在拉格朗日力学控制系统的仿射联络框架下, Lewis 和 Murray[3,4] 针对简单力学控制系统提出了位形能控性的概念, 其中, 系统的拉格朗日函数为动能减势能, 控制输入仅依赖于系统的位形 位形能控性更多关注系统位形的变化, 而不考虑系统的全状态变化 根据 Sussmann[5] 对有限维流形上的一般仿射控制系统的能控性结论, Lewis 和 Murray[3,4] 对一般简单力学控制系统的位形能控性给出了一个可计算的充分条件, 并且对零势能的系统也做了大量的研究工作[6,7] Monforte[8] 将零势能的力学控制系统位形能控性的一些结果推广到迷向耗散系统上 Vela 等[9] 不依赖系统本质的几何齐次结构, 初步研究了定义在 R^{2n} 上的广义力学控制系统的可达性和能控性

本文, 在力学控制系统的仿射联络框架下, 利用系统的能控李代数, 讨论了非零势能的迷向耗散力学系统的位形能控性和平衡点能控性 文章的内容安排如下 第 1 节, 简单介绍与

收稿日期: 2003_10_14; 修订日期: 2005_03_22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171081); 2005 年天津市自然科学基金资助
作者简介: 康剑灵(1972), 女, 江西省赣州市人, 讲师, 博士(联系人. Tel: + 86_21_34124022; Fax: + 86_21_63810380; E_mail: kjlmy@ 163. com)

系统建立有关的黎曼几何中的一些概念, 给出力学控制系统的仿射联络模型以及与系统能控性有关的记号 第 2 节, 给出本文的主要结果

1 几何背景与系统描述

首先介绍黎曼几何的一些记号, 具体内容可参考文献[10] 设 Q 是 n 维流形, $\mathcal{G}$ 是 Q 上的黎曼度量, (Q) 表示 Q 上所有向量场的集合 设 X, Y (Q), 则 $[X, Y]$ 表示这两个向量场的李括号 相应于度量 $\mathcal{G}$ 的一个典则的仿射联络称为 Levi_Civita 联络, 记为 $^{\mathcal{G}}$ 对流形 Q 上的任意仿射联络 , 向量场 X, Y (Q) 的对称积定义为, $X: Y = {}_X Y + {}_Y X$

下面介绍 Lewis 和 Murray[3, 4]给出的力学控制系统的仿射联络模型和位形能控性的定义 流形 Q 上的受迫欧拉_拉格朗日方程有如下表示:

$$^{\mathcal{G}}_{c(t)} c(t) = - \operatorname{grad} V(c(t)) + \sum_{a=1}^{m} u^a(t) Y_a(c(t)), \tag{1}$$

其中, 梯度是相应于黎曼度量 $\mathcal{G}$ 的, u 属于集合 $\mathcal{U} = \left\{ u: [0, T] \quad \mathbb{R}^m \mid T > 0, u \text{ 是可测的并且 } \| u \| \quad 1 \right\}$ 流形 Q 上的二阶方程(1) 可以写成如下在切丛 TQ 上的一阶控制系统

$$v(t) = Z_{\mathcal{G}}(v(t)) - \operatorname{grad} V^{\text{lift}}(v(t)) + \sum_{a=1}^{m} u^a(t) Y_a^{\text{lift}}(v(t)), \tag{2}$$

其中, $Z_{\mathcal{G}}$ 是与协变导数 $^{\mathcal{G}}$ 相关的测地浪花, $\operatorname{grad} V^{\text{lift}}$ 和 Y_a^{lift} 分别是 Q 上的梯度向量场 $\operatorname{grad} V$ 和输入 Y_a 在 TQ 上的垂直提升, 在切丛 TQ 的局部坐标 $(x^1, \quad, x^n, v^1, \quad, v^n)$ 下, $Y_a^{\text{lift}} = Y_a^i(q)(/ v^i)$, $a = 1, \quad, m$, $\operatorname{grad} V^{\text{lif}}$ 有类似表示

方程(2) 是一个有偏差项的一般仿射非线性控制系统, 那么, 一般非线性控制理论[1] 中的能控性定义和相关的结论都适用于方程(2)

定义 1.1 方程(1) 的解是一个对子 (c, u), 其中 $u \quad \mathcal{U}$, $c: [0, T] \quad Q$ 是 Q 上的分段光滑曲线, 使得 (c, u) 满足 TQ 上的一阶方程(2)

设 $q_0 \quad Q$, $(q_0, 0_{q_0}) \quad T_{q_0} Q$, 这里 0_{q_0} 是点 q_0 的零切向量 $U \quad Q$ 是 q_0 的邻域, 定义如下的位形可达集,

$$\mathcal{R}_Q^U(q_0, T) = \Big\{ q \quad Q \mid \text{存在}(1) \text{ 式的解}(c, u) \text{ 使得对任意 } t \quad [0, T], \text{成立}$$
$$c(0) = 0_{q_0}, c(t) \quad U \text{ 以及 } c(T) \quad T_q Q \Big\}$$

记 $\mathcal{R}_Q^U(q_0, \quad T) = {}_{0 \quad t \quad T} \mathcal{R}_Q^U(q_0, t)$

定义 1.2 系统(1) 在点 $q_0 \quad Q$ 是局部位形可接近的(简记为 LCA), 如果存在 $T > 0$ 使得对点 $q_0 \quad Q$ 的所有邻域 U 和时间 $0 < t \quad T$, $\mathcal{R}_Q^U(q_0, \quad t)$ 都包含 Q 的一个非空开集 如果上述条件对任意 $q_0 \quad Q$ 都成立, 则称系统是局部位形可接近的(LCA)

系统(1) 在 $q_0 \quad Q$ 是短时间局部位形能控的(简记为 STLCC), 如果系统在点 $q_0 \quad Q$ 是局部位形可接近的, 并且存在 $T > 0$ 使得对 $q_0 \quad Q$ 的所有邻域 U 和时间 $0 < t \quad T$, 都有 q_0 是 $\mathcal{R}_Q^U(q_0, \quad t)$ 的内点 如果上述条件对任意 $q_0 \quad Q$ 都成立, 则称系统是短时间局部位形能控的(STLCC)

定义 1.3 系统(1) 是平衡点能控的, 如果对 $q_1, q_2 \quad Q$, 存在系统(1) 的解 (c, u) 使得 $c(0) = q_1$, $c(T) = q_2$ 以及 $c(0) = c(T) = 0$ 成立

给定系统(1), 等价地, 也就给定系统(2), 考虑集合 $\left\{ Z_{\mathcal{G}} - \operatorname{grad} V^{\text{lift}}, Y_1^{\text{lift}}, \quad, Y_m^{\text{lift}} \right\}$ 中向量场的

李括号在零速度的情形以及李括号与对称积的关系, Lewis 和 Murray[3,4] 给出了判定系统局部位形可接近和位形能控的条件　假设系统势能为零, Monforte[8] 将上述结论推广到迷向耗散的系统上

2 主要结论

在工程实践中, 系统常会受到阻尼力的作用, 我们考虑具有势能和迷向耗散的系统

$$ {}^{g}_{c(t)} c(t) = K_d c(t) - \mathrm{grad} V(c(t)) + \sum_{a=1}^{m} u^a(t) Y_a(c(t)), \tag{3} $$

其中 $K_d < 0$　有关耗散力的介绍可以参考文献[10]　相应于方程(3) 的定义在切丛 TQ 上的一阶方程可表示为

$$ v(t) = Z_g(v(t)) - \mathrm{grad} V^{\mathrm{lift}}(v(t)) + K_d \ (v(t)) + \sum_{a=1}^{m} u^a(t) Y_a^{\mathrm{lift}}(v(t)), \tag{4} $$

其中　是 Liouville 向量场, 在切丛 TQ 的局部坐标$(x^1, \ , x^n, v^1, \ , v^n)$ 下, $= v^i(\ / \ v^i)$

仍然利用系统的能控李代数结构和向量场的齐次结构, 我们将文献[3] 和文献[4] 中有关系统位形能控性的结果推广到系统(3) 上

在系统位形能控性的讨论中, 既然假设初始状态具有零速度, 这意味着系统可接近分布的李括号计算可以约束到 TQ 的零截面 $Z(TQ)$ 上考虑, 零截面表示 TQ 上所有零向量的集合　$Z(TQ)$ 在 0_q 的切空间记为 $T_{0_q}(Z(TQ))$, $V_{0_q}(TQ)$ 表示纤维 T_qQ 在 0_q 点的切空间, 由于纤维 T_qQ 在 0_q 点横截于零截面 $Z(TQ)$, 因此, 有自然分解式 $T_{0_q}TQ \quad T_{0_q}(Z(TQ)) \quad V_{0_q}(TQ) \quad T_qQ \quad T_qQ$ 相应于这个分解, 着手计算系统(4) 的可接近分布在 0_q 点的李括号

设输入向量场集合 $\mathcal{Y} = \{Y_1, \ , Y_m\}$, 向量场族 $\mathcal{V} = \{Z_g, \ , \mathrm{grad} V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\}$ 和 $\mathcal{V} \quad = \{Z_g + K_d \quad - \mathrm{grad} V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\}$　记 $\overline{\mathrm{Sym}}(\mathcal{V})$ 是 $\mathcal{V}$ 中向量场的对称积的闭包, $\overline{\mathrm{Lie}}(\mathcal{V})$ 是 $\mathcal{V}$ 的对合闭包　$D_{\overline{\mathrm{Lie}}(\mathcal{V}\ )}(v) = \quad X(v) \mid X \quad \overline{\mathrm{Lie}}(\mathcal{V} \quad)_{\mathbb{R}}$ 是由向量场族 $\overline{\mathrm{Lie}}(\mathcal{V}\quad)$ 中的向量场所张成的分布, 它是系统(4) 的可接近分布　容易验证 $\overline{\mathrm{Lie}}(\mathcal{V}\quad)$ 中的每一个向量场都是 $\overline{\mathrm{Lie}}(\mathcal{V})$ 中向量场的R_线性组合

这里给出 $\mathrm{Lie}(\mathcal{V})$ 中元素的几个简单的李括号计算, $[\ , Z_g] = Z_g$, $[\ , \mathrm{grad} V^{\mathrm{lift}}] = -\mathrm{grad} V^{\mathrm{lift}}$, $[\ , Y^{\mathrm{lift}}] = - Y^{\mathrm{lift}}$　事实上, 这是向量场 $\mathrm{grad} V^{\mathrm{lift}}$, Y^{lift} 和 Z_g 对于 Liouville 向量场　的齐次性的表现　通过计算集合 $\mathcal{V}$ 中元素的李括号在零速度点的值, 可以找到李括号和对称积之间的对应, 具体参见文献[3] 和文献[4]　利用文献[4] 中的引理 4. 9, 可以得到

$$ D_{\overline{\mathrm{Lie}}(Z_g, \mathrm{grad} V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}})}(0_q) \quad V_{0_q}(TQ) = (D_{\overline{\mathrm{Sym}}(\mathcal{Y} \ \langle \mathrm{grad} V \rangle)}(q))^{\mathrm{lift}} $$

以及

$$ D_{\overline{\mathrm{Lie}}(Z_g, \mathrm{grad} V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}})}(0_q) \quad T_qQ = (D_{\overline{\mathrm{Lie}}(\overline{\mathrm{Sym}}(\mathcal{Y} \ \langle \mathrm{grad} V \rangle))}(q) $$

总结上述分析和计算, 就得到下列命题

命题 2. 1　设 $q \quad Q$, 那么,

$$ D_{\overline{\mathrm{Lie}}(\mathcal{V})}(0_q) \quad V_{0_q} TQ = (D_{\overline{\mathrm{Sym}}(\mathcal{Y} \ \langle \mathrm{grad} V \rangle)}(q))^{\mathrm{lift}} $$

以及

$$ D_{\overline{\mathrm{Lie}}(\mathcal{V})}(0_q) \quad T_qQ = (D_{\overline{\mathrm{Lie}}(\overline{\mathrm{Sym}}(\mathcal{Y} \ \langle \mathrm{grad} V \rangle))}(q) $$

命题 2. 2　考虑分布

$$D_{(1)} = \operatorname{span}\left\{ Z_g - \operatorname{grad}V^{\text{lift}}, \mathcal{Y}^{\text{lift}} \right\},\ D_{(1)} = \operatorname{span}\left\{ Z_g - \operatorname{grad}V^{\text{lift}} + K_d\ ,\mathcal{Y}^{\text{lift}} \right\}$$

定义序列 $D_{(k)} = D_{(k-1)} + [D_{(k-1)}, D_{(k-1)}]$, $D_{(k)} = D_{(k-1)} + [D_{(k-1)}, D_{(k-1)}]$, $k \quad 2$ 那么, 对所有 $k \quad Z$, 成立 $D_{(k)}(0_q) = D_{(k)}(0_q)$ 因此, 可接近分布

$$D_{(\ )}(0_q) = D_{\overline{\text{Lie}}(Z_g - \operatorname{grad}V^{\text{lift}}, \mathcal{Y}^{\text{lift}})}(q)$$

和

$$D_{(\ )}(0_q) = D_{\overline{\text{Lie}}(Z_g - \operatorname{grad}V^{\text{lift}} + K_d\ , \mathcal{Y}^{\text{lift}})}(q) = D_{\overline{\text{Lie}}(\mathcal{V}\ )}(q)$$

是相同的

证明　由于 $(Z_g - \operatorname{grad}V^{\text{lift}})(0_q) = -\operatorname{grad}V^{\text{lift}}(0_q)$, 并且 $(Z_g - \operatorname{grad}V^{\text{lift}} + K_d\ )(0_q) = -\operatorname{grad}V^{\text{lift}}(0_q)$, 那么, 很明显 $D_{(1)}(0_q) = D_{(1)}(0_q)$ 成立　既然 $[Z_g - \operatorname{grad}V^{\text{lift}} + K_d\ , Y_i^{\text{lift}}] = [Z_g - \operatorname{grad}V^{\text{lift}}, Y_i^{\text{lift}}] - K_d Y_i^{\text{lift}}$　因此, 有 $[D_{(1)}, D_{(1)}] \quad D_{(2)}$ 和 $[D_{(1)}, D_{(1)}] \quad D_{(2)}$ 成立

假设 $D_{(k)}(0_q) = D_{(k)}(0_q)$, $[D_{(k)}, D_{(k)}] \quad D_{(k+1)}$ 和 $[D_{(k)}, D_{(k)}] \quad D_{(k+1)}$ 对 k 成立　如果能证明上述式子对 $k+1$ 也成立, 就可得命题结论　利用向量场 $\operatorname{grad}V^{\text{lift}}$, Y_i^{lift} 和 Z_g 的齐次性以及类似于文献[8]第8章中相关问题的归纳讨论, 命题即得证

实际上, 上述命题说明了具有迷向耗散的系统(4)的可接近分布与系统(2)的可接近分布在零速度点时的等价性

从文献[3]和文献[4]中对系统能控性的分析知道, 当约束到 $Z(TQ)$ 上计算 $\overline{\text{Lie}}(Z_g - \operatorname{grad}V^{\text{lift}}, \mathcal{Y}^{\text{lift}})$ 时, 就要从 $\overline{\text{Lie}}(\overline{\text{Sym}}(\mathcal{Y} \quad \{\operatorname{grad}V\}))$ 中去掉一些向量场, 记号 $C_{\text{ver}}(\mathcal{Y}, V)$ 和 $C_{\text{hor}}(\mathcal{Y}, V)$ (参见文献[3]和文献[4]) 恰恰描述了在 $\overline{\text{Lie}}(\overline{\text{Sym}}(\mathcal{Y} \quad \{\operatorname{grad}V\}))$ 中要计算的向量场　简单地说, $C_{\text{ver}}(\mathcal{Y}, V)(q)$ 可以理解为零速度点 0_q 的可接近速度方向的集合, $C_{\text{hor}}(\mathcal{Y}, V)(q)$ 是 0_q 的可接近位形方向的集合　从命题2.2和上面的分析, 就得到系统(3)局部位形可接近的条件

定理2.1　给定系统(3), 如果 $C_{\text{hor}}(\mathcal{Y}, V)$ 在点 $q \quad Q$ 的秩等于 Q 的维数, 即 $C_{\text{hor}}(\mathcal{Y}, V)(q) = T_q Q$, 那么, 系统在 q 是局部位形可接近的(LCA)

当系统(3)的势能为零时, 可以参看文献[8]中对系统的LCA条件的讨论　要讨论系统(4)的STLCC条件, 不可避免要涉及集合 $\mathcal{V} \ = \left\{ Z_g - \operatorname{grad}V^{\text{lift}} + K_d\ , \mathcal{Y}^{\text{lift}} \right\}$ 中向量场的高阶李括号计算　向量场集 $\{X_0, X_1, \quad, X_m\}$ 中任意李括号 B 都有形如 $B = [B_1, B_2]$ 的唯一分解　我们记 $B_i = [B_{i1}, B_{i2}]$, 其中 $i = 1, 2$　重复这一过程直到 B 不能再在集合 $\{X_0, X_1, \quad, X_m\}$ 中分解为止　所有这些项 $B_{i_1 \quad i_l}$ 就称为 B 的分量, 其中 $i_k = 1, 2$ 分量 $B_{i_1 \quad i_l}$ 的长度是 l　集合 $\{X_0, X_1, \quad, X_m\}$ 中的李括号 B 称为是坏的, 如果对 $i \quad \{1, 2, \quad, m\}$, 有 $_0(B)$ 是奇数, $_i(B)$ 是偶数, 其中, $_i(B)$ 表示 X_i 出现在 B 中的次数　否则, 就称 B 是好的　B 的度定义为 $(B) = \sum_{i=0}^{m} {}_i(B)$　设 P 是集合 $\mathcal{Y}$ 中向量场的对称积, 用 $_i(P)$ 标记 Y_i 在 P 中出现的次数, P 的度 $(P) = \sum_{i=1}^{m} {}_i(P)$　如果对每一个 $1 \quad i \quad m$, $_i(P)$ 都是偶数, 则称 P 是坏的, 否则, 称 P 是好的

利用一般仿射非线性控制系统能控性的充分条件, 文献[3]和文献[4]中给出了系统(1)是STLCC的充分条件　利用这些结果, 我们考虑系统(3)是STLCC的条件　下面直接描述一个事实(参见文献[4]和文献[5])

设系统(4)在零速度点 q Q 是LCA的，则系统(4)在点 q Q 是STLCC的，如果(集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 上的Sussmann判据)：集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中每一个坏的括号 B 在 0_q 点的值都是度低于 B 的一些好的括号的R _线性组合

事实上，如果Sussamnn判据在集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 上成立，那么，该判据也在集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 上成立 Monforte[8] 证明了：如果STLCC条件在集合 $\left\{Z_g, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 上成立，则也在集合 $\left\{Z_g + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 上成立 我们用类似的方法，得到如下结果

引理2.1 假设集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}\,V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 上的Sussmann判据成立，则

( ) 集合 $\mathcal{V} = \left\{Z_g - \mathrm{grad}\,V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中的每一个度为 k 的坏的括号 B，在 0_q 取值时，都是集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 和 $\mathcal{V} = \left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中度数小于 k 的好的括号的R _线性组合

( ) 集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中的每一个度为 k 的好的括号 C，在 0_q 取值时，都是集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中度为 k 的好的括号与集合 $\mathcal{V} = \left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中一些度数小于 k 的括号的R _线性组合

( ) 集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中的每一个度为 k 的好的括号，在 0_q 取值时，都是集合 $\mathcal{V} = \left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}_i^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中度数 k 的好的括号的R 线性组合

证明 首先用归纳法去证明结论( ) 度为1的括号 B，即 $(B) = 1$，是平凡的 度为2的每一个括号 B，即 $(B) = 2$ 都是好的 当 $(B) = 3$ 时，唯一坏的括号是 $[Y_i^{\mathrm{lift}}, [Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , Y_i^{\mathrm{lift}}]]$ 既然 $[\ , Y_i^{\mathrm{lift}}] = - Y_i^{\mathrm{lift}}$，那么，$[Y_i^{\mathrm{lift}}, [Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , Y_i^{\mathrm{lift}}]] = [Y_i^{\mathrm{lift}}, [Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}, Y_i^{\mathrm{lift}}]]$ 由集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}\,V^{\mathrm{lift}}, Y_i^{\mathrm{lift}}\right\}$ 上的Sussmann判据，明显就有 $[Y_i^{\mathrm{lift}}, [Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , Y_i^{\mathrm{lift}}]](0_q) = [Y_i^{\mathrm{lift}}, [Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}, Y_i^{\mathrm{lift}}]](0_q)$ 是集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中度 2的好的括号的R _线性组合 同时，这些好的括号，即 $[Z_g - \mathrm{grad}\,V^{\mathrm{lift}}, Y_i^{\mathrm{lift}}]$ 和 Y_i^{lift} 又是集合 $\mathcal{V} = \left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中度 2的好的括号的线性组合，因此，结论( )对度 k 3的情况成立

假设结论对 k 成立，下面证明对 $k + 1$ 也成立 在集合 $\mathcal{V} = \left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中选择一个度为 $k + 1$ 的坏的括号 B 挑选 B 的最长的分量中的 $Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d$ 项，并展开这一项，将 B 写成两个括号 B_1，B_2 的和，其中一个是有 $Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}$ 项的李括号，另一个是有 K_d 项的李括号，利用向量场的齐次性质，对于 i $\left\{1, 2, \ , m\right\}$，就有 $_0(B_2) = {}_0(B) - 1$，$_i(B_2) = {}_i(B)$ 这样，B_2 就是集合 $\mathcal{V} = \left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中一个度为 k 的好的括号 对 B_1 中所有 $Z_g - \mathrm{grad}\,V^{\mathrm{lift}} + K_d$ ，项重复上面的展开过程，也将其分解成两个李括号的和，其中一个是有 $Z_g - \mathrm{grad}\,V^{\mathrm{lift}}$ 项的李括号，另一个是有 K_d 项的李括号 因此，B 就能分解成集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中度为 $k + 1$ 的坏的括号与集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中度 k 的好的和坏的括号以及 B_2 的和，这里，B_2 是集合 $\mathcal{V} = \left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中度为 k 的好的括号 利用归纳假设和引理中对集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad}V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 上的Sussmann判据的题设，就完成了结论( )的证明

采用上述的归纳分析方法，可以得到结论( ) 由结论( )和( )就得到结论( )

定理2.2 给定流形 Q 上的力学控制系统(3)，设 q Q，则

( ) 如果 $C_{\mathrm{hor}}(\mathcal{Y}, V)(q) = T_qQ$, 并且 $\overline{\mathrm{Sym}}(\mathcal{Y} \quad \{\mathrm{grad} V\})(q)$ 中每一个坏的对称积 B 都可以表示成度小于 B 的好的对称积的R _线性组合, 那么, 系统在零速度点 q 是 STLCC

( ) 如果上述假设条件对 Q 上每一点都成立, 那么,系统是平衡点能控的

证明　由于集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad} V^{\mathrm{lift}}, \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 中坏的(或好的) 李括号, 当在 $Z(TQ)$ 上变化时, 与 $\mathcal{Y} \quad \{\mathrm{grad} V\}$ 中的坏的(或好的) 对称积存在 1_1 对应的关系(参见文献[3] 和文献[4])　利用定理2. 1和引理 2. 1以及集合 $\left\{Z_g - \mathrm{grad} V^{\mathrm{lift}} + K_d \ , \mathcal{Y}^{\mathrm{lift}}\right\}$ 上的 Sussmann 判据, 就得到结论( )

由题设可知, 系统在可达状态集上也是短时间局部能控的(STLC) , 再由结论( ) 的证明过程, 就得到结论( )

现在, 我们已经将系统(1) 的 LCA 条件和 STLCC 条件推广到了具有耗散的系统(3) 上　从上面的结果, 可以看到系统(3) 的 LCA 条件和 STLCC 条件在某种程度上已经简化了　尽管如此, 我们还仅是讨论了初始状态具有零速度的系统位形的变化情况

注记　力学控制系统方程也可以写成 $\nabla_{c(t)} c(t) = - \mathrm{grad} V(c(t)) + u^a(t) Y_a(c(t))$, 其中 ∇ 是系统位形流形上的一般仿射联络, 在牛顿力学中, 这是广义加速度方程　而文中所得结论并未涉及 Levi_Civita 联络的具体内容, 那么, 文章中关于系统位形可接近和位形能控的条件对该系统仍然成立

致谢　非常感谢 A. J. van der Schaft 教授, 在作者访问 Twente 大学(荷兰) 期间给予的指点和对文章有帮助的讨论　同时也感谢审稿人对文章提出的很好的修改意见

[参 考 文 献]

[1] Nijmeijer H, van der Schaft A J. *Nonlinear Dynamical Control Systems* [M]. New York_Heidelberg: Springer_Verlag, 1990, 349 392.

[2] Murray R M. Nonlinear control of mechanical systems: a lagrangian perspective[J]. *Annual Reviews in Control*, 1997, **21**(2): 31 42.

[3] Lewis A D, Murray R M. Configuration controllability of simple mechanical control systems[J]. *SIAM J Control Optimization*, 1997, **35**(3): 766 790.

[4] Lewis A D. Aspects of geometric mechanics and control mechanical systems[D]. Ph D thesis, Pasadena: California Institute of Technology, CA, 1995, 49 70.

[5] Sussmann H J. A general theorem on local controllability[J]. *SIAM J Control Optimization*, 1987, **25**(1): 158 194.

[6] Lewis A D, Murray R M. Decompositions of control systems on manifolds with an affine connection [J]. *Systems Control Letter*, 1997, **31**(1): 199 205.

[7] Lewis A D. Simple mechanical control systems with constraints[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(8): 1420 1436.

[8] Monforte J C. *Geometric Control and Numerical Aspects of Nonholonomic Systems* [M]. Lecture Notes in Mathematics 1793, Berlin_Heidelberg: Springer_Verlag, 2002, 194 198.

[9] Vela P A, Morgansen K A, Burdick J W. Second order averaging methods and oscillatory control of underactuated mechanical systems[A]. In: *IEEE American Control Conference* [C], 2000, 4672 4677.

[10] Abraham R, Marsden J E, Ratiu T. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications* [M]. 2nd ed. Applied Mathematical Sciences 75, New York: Springer_Verlag, 1988, 157 193.

Configuration Controllability for Non_Zero Potential Mechanical Control Systems With Dissipation

KANG Jian_ling[1], WANG Hong[2], YE Hua_wen[3]
(1. Department of Applied Mathematics, Donghua University, Shanghai 200051, P. R. China;
2. College of Mathematics and the PMC Key Laboratory ME of China, Nankai University, Tianjin 300071, P. R. China;
3. Department of Automatic Control, Northwest Polytechnical University, Xi an 710072, P. R. China)

Abstract: Within the affine connection framework of Lagrangian control systems, based on the results of Sussmann on controllability of general affine control systems defined on a finite_dimensional manifold, a computable sufficient condition of configuration controllability for the simple mechanical control systems was extended to the case of systems with strictly dissipative energy terms of linear isotropic nature, and a sufficient conditon of equilibrium controllability for the systems was also given, where Lagrangian is kinetic energy minus potential energy. Lie bracketting of vector fields in controllable Lie algebra, and the symmetric product associated with Levi_Civita connection show virtues in the discussion. Liouville vector field simplified the computation of controllable Lie algebra for the systems, although the terms of potential energy complicated the study of configuration controllability.

Key words: mechanics; controllability; affine connection; symmetric product; isotropic dissipation