应用数学和力学, 第 26 卷 第 7 期(2005 年 7 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 07_0833_07

非线性扰动 Klein_Gordon 方程初值问题的渐近理论*

甘在会, 张 健

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(张鸿庆推荐)

摘要: 在二维空间中研究一类非线性扰动 Klein_Gordon 方程初值问题解的渐近理论. 首先利用压缩映象原理, 结合一些先验估计式及 Bessel 函数的收敛性, 根据 Klein_Gordon 方程初值问题的等价积分方程, 在二次连续可微空间中得到了初值问题解的适定性; 其次, 利用扰动方法构造了初值问题的形式近似解, 并得到了该形式近似解的渐近合理性; 最后给出了所得渐近理论的一个应用, 用渐近近似定理分析了一个具体的非线性 Klein_Gordon 方程初值问题解的渐近近似程度•

关 键 词: Klein_Gordon 方程; 适定性; 渐近理论; 形式近似解; 应用
中图分类号: O175.29 文献标识码: A

引 言

本文研究如下非线性 Klein_Gordon 方程初值问题解的渐近理论•

$$\begin{cases} \phi_{tt} - \Delta\phi + \phi = \varepsilon F(t, x, \phi, \varepsilon), & t > 0, x \in R^2, \\ \phi(0, x, \varepsilon) = \phi_0(x, \varepsilon), \ \phi_t(0, x, \varepsilon) = \phi_1(x, \varepsilon), & x \in R^2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\phi(t, x)$ 是一个实值未知函数, $\Delta = \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, ε充分小且$0 < |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0 \ll 1$, $\phi_0(x, \varepsilon)$, $\phi_1(x, \varepsilon)$ 满足如下条件:

$$\phi_0(x, \varepsilon) \in C^3(R^2), \ \phi_1(x, \varepsilon) \in C^2(R^2), \tag{2}$$

$$|D_x^{\alpha}\phi_0(x, \varepsilon)|, \ |D_x^{\beta}\phi_1(x, \varepsilon)| \leqslant \frac{G}{(1 + |x|)^{k+3}}, \tag{3}$$

这里多重指标 α、β 满足 $|\alpha| \leqslant 3$, $|\beta| \leqslant 2$, 正数 G 不依赖于 ε, $0 < k < 1/2$•

关于形如 Klein_Gordon 方程初值问题(1) 解的渐近理论的研究, 一个有趣的方面是: 当 $\varepsilon = 0$, 很容易得到(1) 在 $C^2[(0, +\infty) \times R^2]$ 中整体解的存在唯一性; 当 $\varepsilon = 1$, 一般情况下只能得到初值问题(1) 局部解的存在唯一性, 即 $x \in R^2$, $0 \leqslant t \leqslant T = O(1)$• 对于一维空间中非线性 Klein_Gordon 方程初边值问题渐近理论的研究, 文献[1] 得到的最佳时间阶函数为 $T = O(|\varepsilon|^{-1})$• 当 $x \in (-\infty, +\infty)$, 对于一维空间中非线性 Klein_Gordon 方程初值问题解的渐

* 收稿日期: 2003_03_07; 修订日期: 2005_04_26
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271084)
作者简介: 甘在会(1975—) , 女, 重庆人, 博士(联系人. Tel: + 86_28_84764421; E_mail: ganzaihui2008cn@yahoo.com.cn)•

近理论,是否时间阶函数仍为 $O(|\varepsilon|^{-1})$? 文献[1]和文献[2]仅以开问题的形式提出,这是因为研究偏微分方程初值问题解的渐近理论要比研究初边值问题解的渐近理论困难[2]• 对于非线性 Klein_Gordon 方程的初值问题

$$\begin{cases}\phi_{tt}-\Delta\phi+m^2\phi=f(\phi),\\ \phi(0,x)=\phi_0(x),\quad \phi_t(0,x)=\phi_1(x),\end{cases}\tag{4}$$

Wang[3] 在 H^s 空间中研究了初值问题(4)解的存在性及散射理论; Pecher[4] 证明了如果 $(\phi_0,\phi_1)\in H^s\times H^{s-1}$, 对每个整数 $s\geqslant 1/2$, 在 H^s 空间中, 初值问题(4)的局部解存在; Kapitanskii[5] 在 H^s 空间中研究了 $m^2=0$, $0\leqslant s\leqslant 1$ 时, 初值问题(4)局部解的存在性• 虽然对初值问题(4)在高维空间中解的性质的研究已有了大量的工作[4],[6,7], 但是对高维空间中非线性 Klein_Gordon 方程初值问题解的渐近理论的研究, 工作还不是很多• 特别是在古典空间 C^2 中对非线性扰动 Klein_Gordon 方程初值问题解的渐近理论的研究, 几乎是一个空白, 有待解决的问题很多[2]• 本文在二维空间中研究初值问题(1)解的渐近理论, 得到的有趣结果是时间阶函数仍为 $T=O(|\varepsilon|^{-1})$• 此结果和一维空间中非线性 Klein_Gordon 方程初边值问题解的渐近理论的最佳时间阶函数相同, 因此在一定程度上可以更好地描述形式近似解的近似程度•

为简单起见, 本文用 C 代表任意正常数, 它可能依赖于 k、G, 但不依赖于 ε•

1 解的适定性

为研究初值问题(1)解的存在唯一性, 由文献[8]知, 初值问题(1)等价于如下的积分方程:

$$\begin{aligned}\phi(t,x,\varepsilon)={}&\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{\phi_0(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\right)+\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{\phi_1(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\right\}+\\&\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t\int_{|\xi|<1}\frac{tr}{2\pi}\frac{\mathrm{I}_1(\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}\frac{\phi_0(x+r\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r\right)+\right.\\&\left.\int_0^t\int_{|\xi|<1}\frac{tr}{2\pi}\frac{\mathrm{I}_1(\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}\frac{\phi_1(x+r\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r\right\}+\\&\left\{\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t(t-\tau)\int_{|\xi|<1}\frac{F(\tau,x+(t-\tau)\xi,\phi(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon),\varepsilon)}{\sqrt{1-\xi^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\right\}+\\&\left\{\int_0^t\int_0^{t-\tau}\int_{|\xi|<1}\frac{\varepsilon(t-\tau)r}{2\pi}\frac{\mathrm{I}_1(\sqrt{(t-\tau)^2-r^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}\times\right.\\&\left.\frac{F(\tau,x+r\xi,\phi(\tau,x+r\xi,\varepsilon),\varepsilon)}{\sqrt{1-\xi^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\tau\right\}=\\&H_1(t,x,\varepsilon)+H_2(t,x,\varepsilon)+H_3(t,x,\varepsilon)+H_4(t,x,\varepsilon),\end{aligned}\tag{5}$$

这里 $\mathrm{d}\xi$ 是 R^2 中的面积元, $\mathrm{I}_1(x)$ 是第一类一阶 Bessel 函数:

$$\mathrm{I}_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!}•$$

定义空间 J_L 为:

$$J_L=\left\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant L|\varepsilon|^{-1},x\in R^2,0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1\right\},$$

这里 $L>0$ 充分小且不依赖于 ε• 设 $C^2_{J_L}$ 是定义在空间 J_L 中所有二次连续可微的实值函数构成的空间, 任意 $w\in C^2_{J_L}$, 其范数定义为:

$$\| w \|_{J_L} = \sup_{(t,x)\in J_L} [(1+t+|x|)^k \| w(t,x,\varepsilon) \|] < \infty,$$

其中

$$\| w(t,x,\varepsilon) \| = \sum_{0\leqslant j+i_1+i_2\leqslant 2} \left| \frac{\partial^{j+i_1+i_2} w(t,x,\varepsilon)}{\partial t^j \partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \right|.$$

由空间 $C^2_{J_L}$ 的定义知, $C^2_{J_L}$ 是一个 Banach 空间, 且对任意$(t,x)\in J_L$, $\|w\|$ 和 $\|w\|_{J_L}$ 有界. 本文将用压缩映象原理去证明初值问题(1)解的存在唯一性.

对任意 ϕ, $\psi\in C^2_{J_L}$, 假设 $F(t,x,\phi,\varepsilon)$, $F(t,x,\psi,\varepsilon)$ 满足

$$\| F(t,x,\phi,\varepsilon) \| \leqslant C \|\phi\|^{1/k}, \tag{6}$$

$$\| F(t,x,\phi,\varepsilon) - F(t,x,\psi,\varepsilon) \| \leqslant C(\|\phi\|^{1/k} + \|\psi\|^{1/k}) \|\phi-\psi\|, \tag{7}$$

其中常数 C 不依赖于 ε, $0<k<1/2$.

在给出本文的主要结果之前, 首先给出文献[9]中的两个引理.

引理 1　假设 $\phi_0(x,\varepsilon)$, $\phi_1(x,\varepsilon)$ 满足条件(2)、(3), 则当 $0<k<1/2$ 时,

$$\| H_1(t,x,\varepsilon) \| \leqslant \frac{C}{(1+t+|x|)^k}.$$

引理 2　如果 $0<k<1/2$, 则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|<1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-|\xi|^2}(1+|x+t\xi|)^{k+1}} \leqslant \frac{C}{(1+t+|x|)^k},$$

$$\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-|\xi|^2}(1+|x+t\xi|)^{k+1}} \leqslant \frac{C}{(1+t+|x|)^k}.$$

设算子 Λ 定义如下:

$$\Lambda\phi(x,t) = H_1(t,x,\varepsilon) + H_2(t,x,\varepsilon) + H_3(t,x,\varepsilon) + H_4(t,x,\varepsilon),$$

其中 $H_1(t,x,\varepsilon)$, $H_2(t,x,\varepsilon)$, $H_3(t,x,\varepsilon)$ 及 $H_4(t,x,\varepsilon)$ 由(5)定义. 我们将证明算子 Λ 是 $C^2_{J_L}$ 到 $C^2_{J_L}$ 的压缩映象算子. 首先考虑下面两个引理.

引理 3　假设 $\phi_0(x,\varepsilon)$, $\phi_1(x,\varepsilon)$ 满足条件(2)、(3), 且 $0<k<1/2$, 则

$$\| H_2(t,x,\varepsilon) \| \leqslant \frac{C}{(1+t+|x|)^k}.$$

证明　根据 Bessel 函数的收敛性, 由引理 2 可得该引理的结论.

引理 4　假设 $\phi_0(x,\varepsilon)$, $\phi_1(x,\varepsilon)$ 满足(2)、(3), $F(t,x,\phi,\varepsilon)$ 满足(6)和(7), 则对任意 ϕ, $\psi\in C^2_{J_L}$, 可得

(a) $\displaystyle \| \Lambda\phi - \Lambda\psi \| \leqslant \frac{C(L+\varepsilon)}{(1+t+|x|)^k} \|\phi-\psi\|_{J_L}$;

(b) $\displaystyle \| \Lambda\phi \| \leqslant \frac{C(1+L+\varepsilon)}{(1+t+|x|)^k} \|\phi\|_{J_L}$.

证明　由引理 2, 经过计算可得

$$\sum_{0\leqslant j+i_1+i_2\leqslant 2} \left| \frac{\partial^{j+i_1+i_2}(\Lambda\phi - \Lambda\psi)}{\partial t^j \partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}} \right| \leqslant \frac{C(L+\varepsilon)\|\phi-\psi\|_{J_L}}{(1+t+|x|)^k}, \tag{8}$$

故(a)成立.

根据引理 1 并在(a)的证明中令 $\psi=0$ 可得

$$\| \Lambda\phi \| \leqslant \frac{C + C(L+\varepsilon)\|\phi\|_{J_L}}{(1+t+|x|)^k},$$

即(b)成立• 于是引理4得证•

选取 L 充分小使得 $C(L+\varepsilon)<1/2$, 由引理4知

$$\|\Lambda\phi-\Lambda\psi\|_{J_L}\leqslant C(L+\varepsilon)\|\phi-\psi\|_{J_L}\leqslant\frac{1}{2}\|\phi-\psi\|_{J_L},$$

$$\|\Lambda\phi\|_{J_L}\leqslant C+\frac{1}{2}\|\phi\|_{J_L}<\infty,$$

于是由压缩映象原理可得如下的适定性定理:

定理1 假设 $F(t,x,\phi,\varepsilon)$ 满足(6)、(7), 初值 $\phi_0(x,\varepsilon)$, $\phi_1(x,\varepsilon)$ 满足(2)、(3), $0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1$, 当 $x\in R^2$, $0\leqslant t\leqslant L|\varepsilon|^{-1}$ ($L>0$ 充分小且不依赖于 ε), 则初值问题(1)在空间 $C^2_{J_L}$ 中存在唯一的解•

2 形式近似解的渐近合理性

本节将用扰动方法去构造初值问题(1)的形式近似解• 为了证明所构造的形式近似解是渐近近似解 ($\varepsilon\to 0$), 我们将作如下分析•

在空间 $C^2_{J_L}$ 中, 假设函数 $\psi(t,x,\varepsilon)$ 满足

$$\psi_{tt}-\Delta\psi+\psi=\varepsilon F(t,x,\psi,\varepsilon)+|\varepsilon|^m c_1(t,x,\varepsilon),\qquad m>1,\tag{9}$$

$$\psi(0,x,\varepsilon)=\phi_0(x,\varepsilon)+|\varepsilon|^{m-1}c_2(x,\varepsilon)=\psi_0(x,\varepsilon),$$
$$0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1,\tag{10}$$

$$\psi_t(0,x,\varepsilon)=\phi_1(x,\varepsilon)+|\varepsilon|^{m-1}c_3(x,\varepsilon)=\psi_1(x,\varepsilon),$$
$$0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1,\tag{11}$$

这里 $\phi_0(x,\varepsilon)$, $\phi_1(x,\varepsilon)$ 满足(2)、(3), F 满足(6)、(7)• 假设 $c_1(t,x,\varepsilon)$, $c_2(x,\varepsilon)$ 及 $c_3(x,\varepsilon)$ 满足如下条件

$$c_1(t,x,\varepsilon)\in C^3(J_L),\tag{12}$$

$$c_2(x,\varepsilon)\in C^3(R^2),\quad c_3(x,\varepsilon)\in C^2(R^2),\tag{13}$$

$$|D^\alpha_x c_2(x,\varepsilon)|,\ |D^\beta_x c_3(x,\varepsilon)|\leqslant\frac{C}{(1+|x|)^{k+3}},$$
$$|\alpha|\leqslant 3,\ |\beta|\leqslant 2,\ 0<k<\frac{1}{2},\tag{14}$$

由定理1知初值问题(9)~(11)存在唯一的解 $\psi\in C^2_{J_L}$, 且由(5)易知初值问题(9)~(11)的等价积分方程• 设 $\phi\in C^2_{J_L}$ 是初值问题(1)的解, 则

$$\psi(t,x,\varepsilon)-\phi(t,x,\varepsilon)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{|\varepsilon|^{m-1}c_2(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\right)+$$
$$\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\frac{|\varepsilon|^{m-1}c_3(x+t\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi+$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t\int_{|\xi|<1}\frac{tr}{2\pi}\frac{\mathrm{I}_1(\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}\frac{|\varepsilon|^{m-1}c_2(x+r\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r\right)+$$
$$\int_0^t\int_{|\xi|<1}\frac{tr}{2\pi}\frac{\mathrm{I}_1(\sqrt{t^2-r^2})}{\sqrt{t^2-r^2}}\frac{|\varepsilon|^{m-1}c_3(x+r\xi,\varepsilon)}{\sqrt{1-|\xi|^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r+$$
$$\int_0^t\frac{\varepsilon(t-\tau)}{2\pi}\int_{|\xi|<1}\Big\{[F(\tau,x+(t-\tau)\xi,\psi(\tau,x+(t-\tau)\xi,\varepsilon),\varepsilon)-$$

$$F(\tau, x+(t-\tau)\xi, \phi(\tau, x+(t-\tau)\xi, \varepsilon), \varepsilon)]+$$
$$|\varepsilon|^m c_1(\tau, x+(t-\tau)\xi, \varepsilon)\Big\}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-|\xi|^2}}+$$
$$\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^t\int_0^{t-\tau}\int_{|\xi|<1}(t-\tau)r\frac{\mathrm{I}_1(\sqrt{(t-\tau)^2-r^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}}\Big\{[F(\tau, x+$$
$$r\xi, \psi(\tau, x+r\xi, \varepsilon), \varepsilon)-F(\tau, x+r\xi, \phi(\tau, x+r\xi, \varepsilon), \varepsilon)]+$$
$$|\varepsilon|^m c_1(\tau, x+r\xi, \varepsilon)\Big\}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}r\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-|\xi|^2}}, \tag{15}$$

对(15)作和(8)同样的估计，可得

$$\|\psi(t, x, \varepsilon)-\phi(t, x, \varepsilon)\|_{J_L}\leqslant C(L+\varepsilon)\|\psi-\phi\|_{J_L}+C|\varepsilon|^{m-1}.$$

选取 L 充分小使得 $C(L+\varepsilon)<1/2$，则

$$\|\psi(t, x, \varepsilon)-\phi(t, x, \varepsilon)\|_{J_L}\leqslant C|\varepsilon|^{m-1}, \tag{16}$$

由(16)知 $\|\psi(t, x, \varepsilon)-\phi(t, x, \varepsilon)\|_{J_L}=O(|\varepsilon|^{m-1})$，

于是可得下面的渐近近似定理．

定理2 假设 $\psi(t, x, \varepsilon)$ 满足(9)～(11)，ϕ_0、ϕ_1 满足(2)、(3)，F 满足(6)、(7)，$c_1(t, x, \varepsilon)$，$c_2(x, \varepsilon)$ 和 $c_3(x, \varepsilon)$ 满足(12)～(14)，则对 $m>1$，形式近似解 $\psi(t, x, \varepsilon)$ 是初值问题(1)的解 $\phi(t, x, \varepsilon)$ 的渐近近似解，且

$$\|\psi-\phi\|_{J_L}=O(|\varepsilon|^{m-1}), \qquad x\in R^2,\ 0\leqslant t\leqslant L|\varepsilon|^{-1},$$

这里 L 充分小且不依赖于 ε．

3 应　　用

本节将运用定理2去分析如下非线性扰动 Klein_Gordon 方程解的渐近近似程度．

$$\phi_{tt}-\Delta\phi+\phi=\varepsilon\phi^4, \qquad x\in R^2, 0<|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0\ll 1, t>0, \tag{17}$$
$$\phi(0, x)=f(x), \phi_t(0, x)=g(x), \qquad x\in R^2, \tag{18}$$

设 $f(x)$、$g(x)$ 满足定理1的条件，在定理2的意义下，我们将构造一个函数在 ε^2 阶下满足(17)、(18)． 设 $\phi(t, x, \varepsilon)$ 具有如下形式

$$\phi(t, x, \varepsilon)=\phi_0(t, x)+\varepsilon\phi_1(t, x)+\varepsilon^2\phi_2(t, x)+\cdots, \tag{19}$$

由定理2知，当 $\varepsilon\to 0$ 时，此级数一致收敛． 把(9)～(11)代入(17)、(18)，比较 ε 同次幂的系数可知

$$\begin{cases}\phi_{0tt}-\Delta\phi_0+\phi_0=0,\\ \phi_0(0, x)=f(x), \quad \phi_{0t}(0, x)=g(x),\end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases}\phi_{1tt}-\Delta\phi_1+\phi_1=\phi_0^4,\\ \phi_1(0, x)=0, \phi_{1t}(0, x)=0,\end{cases} \tag{21}$$

由(20)、(21)易知 $\phi_0(t, x)$，$\phi_1(t, x)$ 的等价积分方程．

令 $\phi=\phi_0+\varepsilon\phi_1$，则

$$\phi_{tt}-\Delta\phi+\phi-\varepsilon\phi^4=$$
$$(\phi_{0tt}-\Delta\phi_0+\phi_0)+\varepsilon(\phi_{1tt}-\Delta\phi_1+\phi_1)-\varepsilon(\phi_0+\varepsilon\phi_1)^4=$$
$$0+\varepsilon(\phi_{1tt}-\Delta\phi_1+\phi_1-\phi_0^4)-\varepsilon^2\lambda(\phi_0, \phi_1)=$$
$$0-\varepsilon^2\lambda(\phi_0, \phi_1)=$$

$$- \varepsilon^2 \mathcal{N}(\phi_0, \phi_1),$$

其中 $\mathcal{N}(\phi_0, \phi_1)$ 是关于 ϕ_0、ϕ_1 的 4 次多项式• 于是 $\Phi(t, x)$ 在 ε^2 阶意义下满足定理 2, 由定理 2 知

$$\| \Phi(t, x) - \phi(t, x) \|_{J_L} = O(|\varepsilon|), \tag{22}$$

又因

$$\begin{aligned} \| \phi - \phi_0 \|_{J_L} = & \| \phi - \Phi + \Phi - \phi_0 \|_{J_L} \leqslant \\ & \| \phi - \Phi \|_{J_L} + \| \Phi - \phi_0 \|_{J_L} = \\ & O(|\varepsilon|) + \| \varepsilon \phi_1(t, x) \|_{J_L} = \\ & O(|\varepsilon|), \end{aligned} \tag{23}$$

故由(22)、(23)知, $\phi_0(t, x)$、$\phi_1(t, x)$ 都是在空间 $C^2_{J_L}$ 中初值问题(17)、(18) 的 ε阶渐近近似解•

4 结 论

我们首先利用压缩映象原理, 结合一些先验估计式及 Bessel 函数的收敛性, 根据 Klein_Gordon 方程初值问题的等价积分方程, 在二次连续可微空间 $C^2_{J_L}$ 中得到了初值问题(1)解的适定性; 其次, 利用扰动方法构造了初值问题(1) 的形式近似解, 并得到了该形式近似解的渐近合理性; 最后给出了所得渐近理论的一个应用, 用渐近近似定理分析了一个具体的非线性 Klein_Gordon 方程初值问题解的渐近近似程度•

[参 考 文 献]

[1] Van Horssen W T. Asymptotics for a class of semilinear hyperbolic equations with an application to a problem with a quadratic nonlinearity[J]. Non Anal TMA, 1992, **19**(6): 501—530.

[2] Van Horssen W T, Van Der Burgh A H. On initial boundary value problems for weakly semilinear telegraph equations. asymptotic theory and application[J]. SIAM J Appl Math, 1988, **48**(4): 719—736.

[3] WANG Bao_xiang. On existence and scattering for critical and subcritical nonlinear Klein_Gordon equations in H^s[J]. Nonlinear Anal TMA, 1998, **31**(5/6): 573—587.

[4] Pecher H. L^p_Absch¾tzungen and klassiche L┢sungen f r nichtlineare Wellengeichungen[J]. I Math Z, 1976, **150**(2): 159—183.

[5] Kapitanskii L V. Weak and yet weak solutions of semilinear wave equations[J]. Comm Partial Diff Equations, 1994, **19**(7): 1629—1676.

[6] Pecher H. Nonlinear small data scattering for the wave and Klein_Gordon equations[J]. Math Z, 1984, **185**(3): 261—270.

[7] Pecher H. Low energy scattering for nonlineaar Klein_Gordon equations[J]. J Functional Anal, 1985, **63**(1): 101—122.

[8] Guenther Ronald B, Lee John W. Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1988.

[9] K0ji Kubota. Existence of a global solution to semilinear wave equations with initial data of noncompact support in low space dimensions[J]. Hokkaido Math, 1993, **22**(1): 123—180.

Asymptotic Theory of Initial Value Problems for Nonlinear Perturbed Klein_Gordon Equations

GAN Zai_Hui, ZHANG Jian
(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University,
Chengdu 610066, P.R.China)

Abstract: The asymptotic theory of initial value problems for a class of nonlinear perturbed Klein_Gordon equations in two space dimensions is considered. Firstly, using the contraction mapping principle, combining some priori estimates and the convergence of Bessel function, the well_posedness of solutions of the initial value problem in twice continuous differentiable space was obtained according to the equivalent integral equation of initial value problem for the Klein_Gordon equations. Next, formal approximations of initial value problem was constructed by perturbation method and the asymptotic validity of the formal approximation is got. Finally, an application of the asymptotic theory was given, the asymptotic approximation degree of solutions for the initial value problem of a specific nonlinear Klein_Gordon equation was analyzed by using the asymptotic approximation theorem.

Key words: Klein_Gordon equations; well_posedness; asymptotic theory; formal approximations; application