

文章编号: 1000-0887(2005) 07_0854_07

外界场作用下的波前曲率 关系和波形变化*

刘深泉¹, 宋 乐²

(1. 华南理工大学 应用数学系, 广州 510640;
2. 悉尼大学 信息技术学院, 悉尼 澳大利亚)

(戴世强推荐)

摘要: 研究外界场作用下, 激发介质的波前曲率关系和波形变化. 理论分析波前曲率关系, 得到外界场作用下, 波前的法向速度与波前平均曲率、平面波速和外界场之间的线性关系. 数值分析外界场作用下, 激发介质的 Bar_Eiswirth 模型, 得到外界场作用下激发介质的波形图案. 这里的理论分析、数值结果与 BZ 反应的实验结果完全一致, 从而解释了外界场作用下的 BZ 现象, 且由数值结果可知激发介质包含丰富的波形图案

关键词: 激波介质; 螺旋波; 图案; 外界场

中图分类号: O534; O362 **文献标识码:** A

引 言

激发介质的研究涉及 BZ 化学反应、阿米巴细菌的聚集、心脏心肌组织等问题^[1]. 这类介质的特点是, 当扰动比较小时, 介质能很快恢复到原来的静息状态; 若刺激超过某一临界值, 则介质会出现长时间的激发状态. 在激发介质的研究中, 心脏的纤维性颤动与心肌组织的性质有关^[2]. 一个流行的观点是: 心肌细胞的动作电位可以形成螺旋波及其破碎的图案, 而此类动作电位的波形可影响心脏节律, 导致心脏纤维性颤动, 若纤颤不及时治疗, 病人可能在几分钟内突然死亡. 由于涉及人体的生命, 心肌组织的实验研究十分困难, BZ 溶剂和心肌组织都属于激发介质的范畴, 而 BZ 实验容易操作, 实际常常通过 BZ 实验产生的波形图案, 分析理解心肌组织的特性.

从已有的 BZ 实验或阿米巴细菌聚集的波形图案可知, 平面波形结构有螺旋、双螺旋、超螺旋和多臂螺旋等^[2]. 螺旋波的波尖会出现漫游现象, 这种漫游的轨迹呈扭曲的螺旋链或花瓣形^[3]. 空间的波形难于观察, 但更加丰富, BZ 实验呈现环形回卷波、扭曲回卷波、楼梯回卷波等变化, 由于波形之间的相互作用, 详细描述这类波形图案的变化相当困难. 数值结果表明, 平面具螺旋波及其破碎, 空间具有回卷波及其组织中心的扭曲、打结和连接等形式^[2].

* 收稿日期: 2003_04_22; 修订日期: 2005_04_16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19902005)

作者简介: 刘深泉(1964—), 男, 洛阳人, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 86_20_87114815; E_mail: mashqliu@scut.edu.cn).

对 BZ 化学反应,其动力学变化可简化为如下模型^[4]。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \cdot \nabla^2 u + \varepsilon^{-1} f(u, v), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon \mu \cdot \nabla^2 v + g(u, v), \quad (1)$$

式中 u 为快变量, v 为慢变量, ε 是小参数, μ 代表扩散系数的比率。不同形式的反应项 $f(u, v)$, $g(u, v)$, 表示不同的动力学模型, 但都具有通常激发介质的特点: f 的零值线 $f(u, v) = 0$ 有 3 个分支分别为: $u = u_-(v)$, $u = u_0(v)$ 和 $u = u_+(v)$, g 的零值线单调变化。两者的交点在 $f(u, v) = 0$ 左边一支 $u = u_-(v)$ 上。激发介质的激发态存在于空间的某一区域, 此区域包含两个曲面作边界。用快变量 u 来描述: 从静息态 $u = u_-(v)$ 跳跃到激发态 $u = u_+(v)$ 的边界曲面为波前。从激发态 $u = u_+(v)$ 恢复到静息态 $u = u_-(v)$ 的边界曲面称为波后, 波前和波后的相交区域抽象为空间曲线, 称为组织中心。在波前的切平面附近, 快变量 u 变化很小, 在法线方向, 快变量 u 变化很快。慢变量 v 变化不明显。

激发介质中的 BZ 反应可以显示丰富的波形图案, 影响 BZ 波形变化的因素很多, 如外界场刺激、周期激励、介质均匀性和边界影响等, 都会对波形图案产生影响。已有的 BZ 实验表明, 对产生螺旋波的 BZ 溶剂施加电场作用时, 波形会慢慢向正极移动^[5]。在与电场垂直的方向上, 螺旋波形会相互分离。外加周期电场, 可以得到一个大螺旋和多个小螺旋形同时出现的超螺旋结构^[6]。强光作用时, 溶剂产生了细浪形或破碎形小螺旋波, 破碎的螺旋波形成迷宫似的立波图案。当光照频率变化时, 还可以看到外界刺激与螺旋波的共振现象^[6,7]。温度场对波形也有影响, 当温度变化时, 可得到各种扭曲的回卷波形和对应扭曲的组织中心。外界温度场的作用还会使回卷波的组织中心所形成的平面缓慢移动, 最后垂直于温度形成的梯度场^[8]。此外, 边界形状、介质不均匀性等因素, 也经常作为外界场的作用。

最近, 已有大量的 BZ 实验研究外界刺激对 BZ 波形的影响, 但理论分析和数值结果较少^[11]。本文首先利用摄动方法, 理论分析外界场作用下激发介质的波前曲率关系。然后数值分析激发介质的 Bar_Eiswirth 模型^[9,10], 观察外界场作用下的波形变化。

2 外界场的摄动分析

外界场对激发介质的影响比较复杂, 理论描述也不相同, 外界场对 BZ 反应的影响是浓度变化率, 具体表现在 BZ 反应项的变化, 对固定外界场的影响, 有如下 Steinbock 的模型^[7]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \cdot \nabla^2 u + \varepsilon^{-1} f(u, v) + M_1 \frac{\partial u}{\partial x} + M_2 \frac{\partial u}{\partial y} + M_3 \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon \mu \cdot \nabla^2 v + g(u, v). \end{cases} \quad (2)$$

向量 $M = \{M_1, M_2, M_3\}$ 表示外界场对整个模型的作用, 为简单起见, 这里研究二维情形。利用文献[3]的方法, 在波前边界层内建立移动坐标系。设在任意时刻 t , 波前为一曲线 Γ , s 为从波尖到波前 Γ 上一点的曲线弧长, r 为波前邻域内一点 (x, y) 到波前 Γ 的法向距离。这样就得到了波前邻域内局部正交的移动坐标系 (r, s) 。在任意时刻, 波前邻域内的点 (x, y) 可用边界层内的局部移动坐标系 (r, s) 来表示, 且波前由点集 $\{(x, y): r(x, y, t) = 0\}$ 表示。不失一般性, 可取 $|\nabla r| = 1, \nabla r \cdot \nabla s = 0$ 。设移动坐标系和原坐标系的坐标变换为:

$$\tau = t, \quad r = r(x, y, t); \quad s = s(x, y, t),$$

则两个坐标系的变换关系为:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + r_t \frac{\partial}{\partial r} + s_t \frac{\partial}{\partial s}, & \frac{\partial}{\partial x} = r_x \frac{\partial}{\partial r} + s_x \frac{\partial}{\partial s}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = r_x^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + s_x^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + r_{xx} \frac{\partial}{\partial r} + s_{xx} \frac{\partial}{\partial s} + 2r_x s_x \frac{\partial^2}{\partial r \partial s}, \\ \dots^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + | \dots s |^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \dots^2_r \frac{\partial}{\partial r} + \dots^2_s \frac{\partial}{\partial s}. \end{cases}$$

在新的移动坐标系下, 方程(2)变为:

$$\begin{cases} \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial r} r_t + \frac{\partial u}{\partial s} s_t \right) = \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} | \dots s |^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \dots^2_r + \frac{\partial u}{\partial s} \dots^2_s \right) + \\ \mathfrak{M}_1 \left(r_x \frac{\partial u}{\partial r} + s_x \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \mathfrak{M}_2 \left(r_y \frac{\partial u}{\partial r} + s_y \frac{\partial u}{\partial s} \right) + f(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial v}{\partial r} r_t + \frac{\partial v}{\partial s} s_t = \varepsilon \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} | \dots s |^2 + \frac{\partial v}{\partial r} \dots^2_r + \frac{\partial v}{\partial s} \dots^2_s \right) + g(u, v). \end{cases} \quad (3)$$

在波前边界层内, 快变量 u 沿波前法向的变化很快, 用扩大的法向标度来观察 $r = \varepsilon R$, 得到方程(3)的 $O(\varepsilon^0)$ 阶近似:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + (\varepsilon \dots^2_r + M_1 r_x + M_2 r_y - r_t) \frac{\partial u}{\partial R} + f(u, v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial R} r_t = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial R^2}, \end{cases} \quad (4)$$

其中 \dots^2_r 刻画波前曲面的平均曲率, 为分析弯曲对波前曲面的影响, 这里保留了 $\varepsilon \dots^2_r$ 项, 由方程(4)的第2式得知, 在边界层内可取 $v = v_0$ 为常数, 则方程(4)简化为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + (\varepsilon \dots^2_r + M_1 r_x + M_2 r_y - r_t) \frac{\partial u}{\partial R} + f(u, v_0) = 0, \quad (5)$$

对方程(5), 自变量 R 的变化范围是 $(-\infty, +\infty)$. 在波前的法线两侧, 变量 u 从 $u_-(v_0)$ 很快跳跃到 $u_+(v_0)$, 由一维反应扩散方程的性质可知:

$$\lim_{R \rightarrow -\infty} \frac{\partial u}{\partial R} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\partial u}{\partial R} = 0,$$

在方程(5)的两边分别乘 $\partial u / \partial R$, 并对 R 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分, 注意到上面的极限条件得:

$$r_t = \varepsilon \dots^2_r + M_1 r_x + M_2 r_y + c, \quad (6)$$

其中常数 c

$$c = \int_{u_-(v_0)}^{u_+(v_0)} f(u, v_0) du \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 dR \right|^{-1},$$

这里表示波前作为平面波形的平面波速; 注意到 $r(t)$ 表示波前邻域内一点 (x, y) 到波前 Γ 的法向距离; r_t 表示波前曲面的法向波速; \dots^2_r 刻画波前的平均曲率; $M_1 r_x, M_2 r_y$ 表示外界场对法向波速的影响.

方程(6)表示波前的法向速度与波前平均曲率、外界场的线性关系. 记向量 $M = \{M_1, M_2\}$, θ 为波前法向和外界场 M 的夹角, K 表示波前的平均曲率, 可将方程(6)写成:

$$N = \mathfrak{K} + M \cos \theta + c, \quad (7)$$

式中 $M = |M| = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$.

同理, 可得空间情形激发介质的波前曲率关系, 它给出波前曲面的法向速度和外界场之间的线性关系. 从方程(7)可得如下结论: 在外界场作用下, 激发介质波前曲面的法向速度受两方面影响, 一是波前平均曲率, 二是外界场的大小. 这种影响可解释观察到的 BZ 实验现象,

对螺旋波, 波前的法向速度大小, 受外界场的模和外界场与波前曲面夹角大小两个因素影响。当 $\theta = 0$ 时, 波前法向与外界场的方向一致, 波前法向波速最大; 当 $\theta = \pi$ 时, 波前法向与外界场的方向相反, 波前法向波速最小。在电场作用下的螺旋波, 沿电场方向, 波速最大, 反电场方向最小, 由于沿电场方向波速最大, 所以整个波形要向沿外界场的方向移动, 这与实验结果^[5]完全一致。对回卷波, 仅考虑环形组织中心的回卷波在外界场作用下的变化。当回卷波受到外界场的作用时, 波形沿外界场方向的速度分量最大, 所以整个回卷波向外界场的方向移动。在移动过程中, 从方程(7)可知, 空间波形各点的移动速度不均匀, 对圆环形组织中心的回卷波, 只有组织中心所在的平面垂直外界场时才能使得整个波形的各向速度均衡, 即回卷波达到稳定状态。这样就解释了文献中温度场的实验结果^[8]。对波形破碎的情形, 由于外界场作用下的方向波速增加, 上面的理论结果, 可以说明破碎波形会出现移动现象。

3 外界场的数值分析

激发介质产生丰富的波形图案^[1,2], 影响波形图案变化的因素很多, 如外界场、介质不均匀性和边界形状等。由于模型的非线性, 外界影响的理论分析都比较困难。上面外界场的理论结果, 比较深刻地描述了波前法向速度、平均曲率和外界场之间的线性关系, 下面对外界场的作用进行数值研究。计算采用激发介质的 Bar_Eiswirth 模型^{[8],[10]}, 扩散项采用欧拉隐式格式, 方程组用算子分解方法^[10], 矩形边界提出 Neumann 边界条件。

激发介质的 Bar_Eiswirth 模型如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \cdot \nabla^2 u + \varepsilon^{-1} u(1-u) \left(u - \frac{v+b}{a} \right) + M_1 \frac{\partial u}{\partial x} + M_2 \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon \mu \cdot \nabla^2 v + u^3 - v. \end{cases} \quad (8)$$

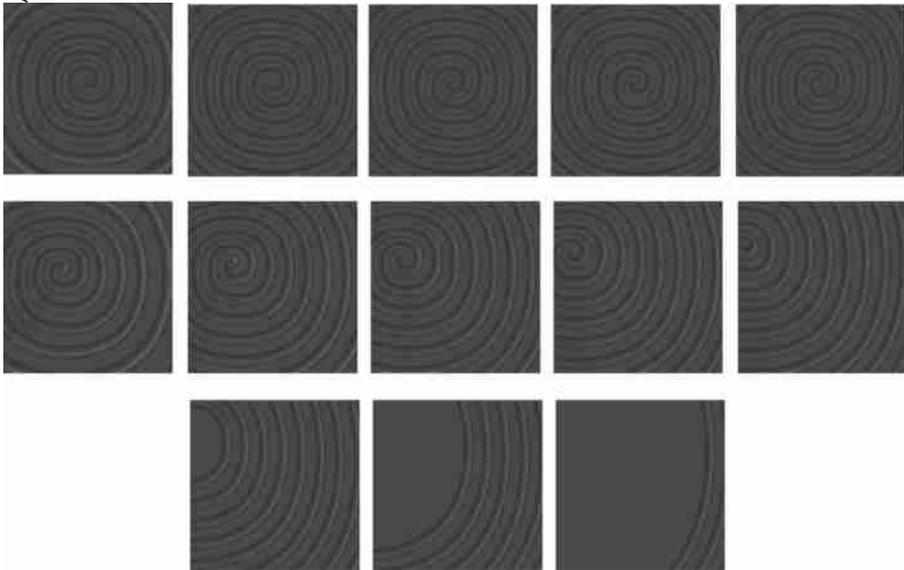


图 1 (第 1 行图形是没有外界场扰动的波形, 第 2 行是外界场 $M_1 = 1, M_2 = 0$ 作用下的波形, 计算时间分别为 $t = 20 \text{ s}, 30 \text{ s}, 40 \text{ s}, 50 \text{ s}, 60 \text{ s}$ 。第 3 行是外界场作用下, 波形逐渐消失的情形)。

若方程(8)不考虑外界场,其数值分析可采用Linux下的程序EZSPIRAL。这里的计算是在Windows下进行,并添加外界场影响。由于模型的非线性,有很多的因素影响计算结果。首先采用5点差分格式,固定在 80×80 的正方形中,取参数 $a = 0.75$, $b = 0.08$, $\varepsilon = 1/80$, $\delta = 1E-4$, $\mu = 0$ 。每个方向取242个分点,时间步长为0.8,图形显示用 v 的等值线度量。

由图1的计算结果可以看到,没有外界场时,方程(8)显示螺旋波形。外界场作用下螺旋波形逐渐移动,最后消失,这个数值结果和前面的理论分析或BZ的实验现象相同,从而说明这里的理论分析、数值结果和BZ实验结果完全一致,但数值计算的结果比理论分析更深刻。若改变参数 $\varepsilon = 1/20$,其它条件不变,没有外界场的波形和图1类似,出现螺旋结构。但外界场作用下的波形对应破碎螺旋波,且长时间的破碎波形,不仅移动而且包含丰富的图案,见图2。



图2 (计算时间分别为 $t = 1\ 713\ s, 1\ 720\ s, 1\ 727\ s, 1\ 730\ s, 1\ 737\ s$ 。波形结构的变化出现重复)

由于模型的非线性,影响激发介质波形变化的因素很多,若仍用图2中的参数,但计算时,每个边长计算的分点个数取为121,则得到结果也不相同,见图3。

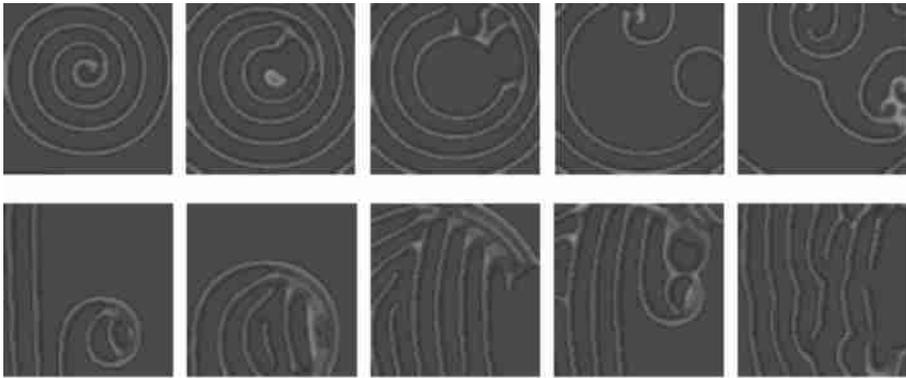


图3 (第1行图形是没有外界场的波形,计算时间分别为 $t = 30\ s, 40\ s, 50\ s, 60\ s, 70\ s$ 。第2行是外界场 $M_1 = 1, M_2 = 0$ 影响下的波形,计算时间分别为 $t = 100\ s, 110\ s, 130\ s, 140\ s, 200\ s$)

计算的分点个数的改变引起波形完全变化,其主要原因是介质不均匀和边界条件这两个因素的影响。当分点密集时,介质不均匀和边界条件对中间波形的影响没有反映出来,当分点稀疏时,介质不均匀和边界条件的影响很快体现到波形。从而出现各类破碎螺旋波形图案,这类波形破碎现象在BZ反应中有很多实验结果,但破碎的理论分析十分困难。

图1至图3的扩散项计算采用5点格式,但有一类螺旋波形,用9点格式计算扩散项,当受到外界场影响时,原来的螺旋图形会逐渐消失。在 80×80 的正方形内,每个方向取242个分点,时间步长取0.8,参数 $a = 0.75$, $b = 0.06$, $\varepsilon = 1/14$, $\delta = 1E-4$, $\mu = 0$,得到图4。

图4中,没有外界场的波形是螺旋波,其波尖显示漫游现象,但受到外界场扰动后,破碎

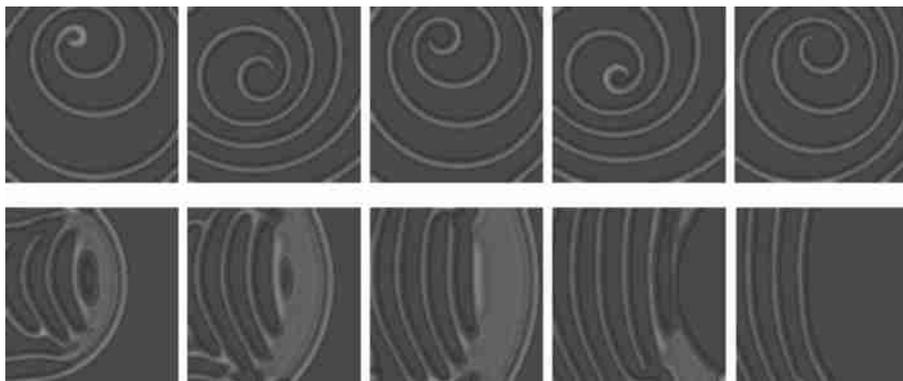


图 4 (第 1 行是没有外界场的波形, 计算时间分别为 $t = 80 \text{ s}, 120 \text{ s}, 150 \text{ s}, 1 221 \text{ s}, 1 242 \text{ s}$ 。第 2 行是外界场 $M_1 = 1, M_2 = 0$ 作用下, 波形很快消失的波形, 计算时间分别为 $t = 30 \text{ s}, 40 \text{ s}, 50 \text{ s}, 60 \text{ s}, 70 \text{ s}$)。

波形很快消失。比较图 4 和图 1, 两个图形的结果说明: 在外界场作用下, 有一类螺旋波会逐渐移动消失, 但消失的条件需要研究, 只有影响后产生破碎波形, 才能保持长时间的变化。

若扩散项采用 5 点格式计算, 取参数 $a = 0.75, b = 0.01, \varepsilon = 1/12, \delta = 1E-4, \mu = 0$ 。在正方形 80×80 , 每个方向取 242 个分点, 时间步长为 0.8。此时, 可得到另外一类变化, 在没有扰动情况, 波形图案很快消失, 添加外界场扰动后产生波形破碎现象, 见图 5。

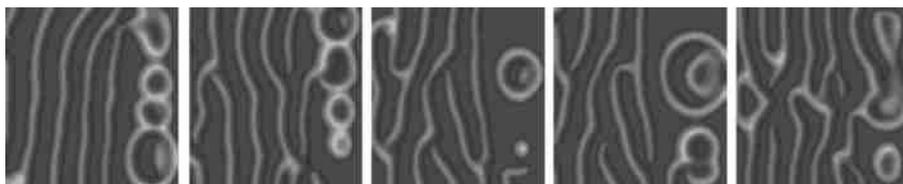


图 5 (外界场为 $M_1 = 1, M_2 = 0$, 计算时间分别为 $t = 152 \text{ s}, 446 \text{ s}, 511 \text{ s}, 514 \text{ s}, 1 314 \text{ s}$ 。波形图案出现长时间破碎移动现象。但没有外界场扰动的波形却迅速消失)

从上面的数值结果可以看到, 外界场对波形的影响非常明显, 由于波前曲面法向波速的变化, 最明显的现象是外界场导致波形整体移动, 在外界场和其它因素的共同作用下, 会出现螺旋波和破碎螺旋波之间的转换, 螺旋波形逐渐消失等现象。若外界场刺激后产生螺旋波形, 由于螺旋波形的移动, 波形会逐渐消失, 只有破碎波形才可能长时间变化。在这种意义下, 破碎螺旋波是稳定的。但激发介质螺旋波形的变化, 肯定不是一个因素影响的结果, 全面分析波形变化是一个比较困难的问题。

4 结 论

本文分析了外界场对激发介质波形结构的影响, 这里的理论分析得到激发介质波前曲面的曲率关系, 波前曲面的法向速度和波前平均曲率、平面波速和外界场具有线性关系, 此曲率关系表明波前的法向速度在外界场的方向会增加, 从而可以解释温度场或电场作用下的 BZ 反应实验。这里的数值计算得到丰富的螺旋波形图案, 在外界场作用下, 可以看到波形图案整体不断移动, 这个结果和理论分析、BZ 实验现象完全一致。更深入的数值分析表明, 外界场的影响可以产生螺旋波和破碎螺旋波之间的转化。没有外界场影响时出现的螺旋波, 在外界场

作用下,螺旋波的移动可能很快消失或产生长时间的破碎。其中的破碎情形可以看到多螺旋相互作用波形、条形立波、水纹迷宫波、岛屿连环波等漂亮的图案^[1, 2]。对破碎螺旋或很快消失的波形,在外界场的作用下,同样可以产生丰富的波形图案。

观察影响波形变化的条件,可以看到,激发介质波形斑图的变化,不仅仅是外界场的影响,而且也是诸多因素相互作用的结果,特别是边界形状和介质不均匀性,是产生新波形的源泉。由于理论模型的复杂性,这里的分析没有讨论外界周期激励、介质的不均匀性和边界形状等外界因素,如何综合分析这些影响,是以后需要研究的课题。

[参 考 文 献]

- [1] 欧阳颢. 反应扩散系统中的斑图动力学[M]. 非线性科学丛书. 上海: 上海科技教育出版社, 2000.
- [2] Winfree A T. The Geometry of Biological Time, Second Edition. [M]. New York: Springer, 2000.
- [3] 刘深泉. 激发介质中螺旋波的波尖运动[J]. 物理学报, 1998, 47(7): 1057—1063.
- [4] Tyson J, Keener J P. The dynamics of scroll waves in excitable media[J]. SIAM, Rev, 1992, 34(1): 1—39.
- [5] Krinsky V, Hamm E, Voignier V. Dense and sparse vortices in excitable media drift in opposite directions in electric field[J]. Phys Rev, 1996, 76(20): 3854—3857.
- [6] Pertrov V, Ouyang qi, Swinney H L. Resonant pattern formation in a chemical system[J]. Nature, 1997, 388(6643): 655—657.
- [7] Steinbock O, Zykov V, Muller S. Control of spiral wave dynamics in active media by periodic modulation of excitability[J]. Nature, 1993, 366(6453): 322—324.
- [8] Vinson M, Mironov S, Pertsov A. Control of spiral orientation and lifetime of scroll rings in excitable media[J]. Nature, 1997, 386(6624): 477—480.
- [9] Barkley D. Euclidean symmetry and the dynamics of rotating spiral waves[J]. Phys Rev Lett, 1994, 72(1): 164—167.
- [10] Dowle M, Mantel R M, Barkley D. Fast simulations of waves in three dimensional excitable media [J]. Int J Bif Chaos, 1997, 7(11): 2529—2546.

Curvature Relation of Wave Front and Wave Changing in External Field

LIU Shenquan¹, SONG Le²

(1. Department of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, P. R. China;

2. School of Information Technology, The University of Sydney, Australia)

Abstract: The changing of wave structure in excitable media in external field is studied and the curvature relation of wave front is analyzed. Under external stimulus the normal velocity of wave front has linear relation with mean curvature of wave front, plane velocity and external field. The simulation methods have been used to analyze Bar_Eiswirth model with external field and obtain the wave pattern of excitable media contained external stimulus. These theoretical analysis and simulation results are identical with experiments of BZ reaction. So the results here theoretically explain the BZ phenomenon under external field and the simulation results here have rich wave patterns.

Key words: excitable medium; spiral wave; pattern; external field