

文章编号: 1000_0887(2005 08_0921_08)

三维对流扩散方程的三种高精度分裂格式*

汪守东, 沈永明

(大连理工大学 海岸和近海工程国家重点实验室, 大连 116023)

(李家春推荐)

摘要: 在算子分裂法思想的基础上, 将两种高精度的离散格式推广应用于三维对流扩散方程, 同时对经典 ADI 格式的对流项做了改进, 改进后的格式的对流项对空间具有 4 阶精度, 而经典 ADI 格式对空间只有 2 阶精度, 由此可见, 提高了该格式的实用性. 最后对两种典型的浓度场进行了数值模拟, 将 3 种格式的计算结果与解析解以及其它传统差分格式的计算结果进行了对比, 得出当 Peclet 数不大于 5 时, 3 种格式均获得了令人满意的数值结果, 说明推广的这三种方法具有很高的准确性和可靠性.

关键词: 3D 对流扩散方程; 算子分裂法; 高精度格式; 数值模拟

中图分类号: X143 **文献标识码:** A

引 言

随着现代工业的发展和人类活动的加剧, 污染物以及悬浮颗粒排入大气、江河、湖泊和海洋中, 它们在大气及水体中的变化过程都服从对流扩散方程. 在已知流场的情况下, 通常可以通过求解对流扩散方程来得到大气、江河、湖泊及海洋等水体中污染物浓度、温度等各种物理量的输移扩散规律. 对对流扩散方程进行计算时, 扩散项的计算比较简单, 容易获得较高精度, 而对流项的计算要相对困难一些, 容易产生数值弥散或数值振荡. 因此, 对流项的求解技术具有非常重要的现实意义. 基于以上原因, 本文将两种高精度的数值格式推广应用于对流占优的三维对流扩散问题中, 第 1 种格式是由 Komatsu 等^[1]首次提出的 SOWMAC 格式; 第 2 种格式为 Crank_Nicolson 有限元格式^[2], 这两种格式尽管均只涉及 2 个时间层和 3 个空间节点, 但精度却比通常的 2 个时间层、3 个空间节点的格式的精度要高得多, 而其程序设计仍然保持比较简单, 郑永红等人^[3,4]曾经把这两种格式运用于二维对流扩散问题; 第 3 种格式是对经典 ADI 格式的对流项做了改进, 改进后的格式的对流项对空间有 4 阶精度, 而经典 ADI 格式对空间只有 2 阶精度. 这 3 种格式在处理对流项时, 都具有很大优势, 精度高且稳定性好, 而且求解过程简单、计算量小、速度快. 目前, 国外这方面的研究工作也比较活跃, Lardner 和 Song^[5]将三维对流扩散方程离散为水平项与垂直项两部分, 用隐式有限元法进行了求解. Sommeijer 和 Kok^[6]用 Runge_Kutta 法与 OELH 法求解了三维对流扩散方程, 并对该两种格式进

* 收稿日期: 2004_04_13; 修订日期: 2005_03_29

基金项目: 国家自然科学基金资助重点项目(10332050); 辽宁省自然科学基金资助项目(20042153); 广东省自然科学基金资助项目(021503)

作者简介: 汪守东(1979—, 男, 安徽舒城人, 博士(联系人, Tel: + 86_411_84708514; Fax: + 86_411_84708526; E_mail: wsdky1999@sina.com.cn)

行了验证。Sankaranayanan 等^[7]用高阶迎风格式求解了三维扩散方程中的对流项。

1 数学模型

1.1 三维对流扩散问题的基本控制方程

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} + w \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial c}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial c}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) + S_m, \quad (1)$$

式中, c 为污染物浓度; u, v, w 分别为 x, y, z 方向的速度; D_x, D_y, D_z 分别为扩散系数; S_m 为源、汇项; t 为时间。

1.2 控制方程的离散格式

在已知流场的情况下, 式(1)的数值求解的主要困难在于对对流项的处理。当对流项在整个方程中的作用不占优时, 现有的各种差分格式均能给出比较满意的数值结果, 而当对流项占主导地位时, 现有的许多格式都存在相当大的数值误差, 因此对流项的数值处理是对流扩散方程数值模拟的关键。按照文献[8]分裂浅水波方程的方法, 式(1)的求解与下列几个一维方程的依次求解是等效的, 即可将式(1)分裂为:

$$\frac{\partial c^{(1)}}{\partial t} + u \frac{\partial c^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad \text{初始条件为: } c_t^{(1)} = c_t, \quad (2)$$

$$\frac{\partial c^{(2)}}{\partial t} + v \frac{\partial c^{(2)}}{\partial y} = 0, \quad \text{初始条件为: } c_{t+\Delta t}^{(2)} = c_{t+\Delta t}^{(1)}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial c^{(3)}}{\partial t} + w \frac{\partial c^{(3)}}{\partial z} = 0, \quad \text{初始条件为: } c_{t+\Delta t}^{(3)} = c_{t+\Delta t}^{(2)}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial c^{(4)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D_x \frac{\partial c^{(4)}}{\partial x} \right], \quad \text{初始条件为: } c_{t+\Delta t}^{(4)} = c_{t+\Delta t}^{(3)}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial c^{(5)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[D_y \frac{\partial c^{(5)}}{\partial y} \right], \quad \text{初始条件为: } c_{t+\Delta t}^{(5)} = c_{t+\Delta t}^{(4)}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial c^{(6)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D_z \frac{\partial c^{(6)}}{\partial z} \right] + S_m, \quad \text{初始条件为: } c_{t+\Delta t}^{(6)} = c_{t+\Delta t}^{(5)} \Delta t. \quad (7)$$

式(1)在 $t + \Delta t$ 时刻的解为 $c_{t+\Delta t} = c_{t+\Delta t}^{(6)}$, 限于文章的篇幅, 该算法与原方程解的等效性证明从略。显然通过上面的分裂过程, 三维对流扩散方程的求解就变为 3 个一维纯对流方程、2 个一维纯扩散方程和 1 个含源、汇项的一维扩散方程的求解, 因此需要构造合适的差分格式来数值求解这 6 个一维方程。为了方便, 在下文描述中, 将式(2)~(7)中的上标省去。

1.2.1 两种高精度格式的推广

1 SOWMAC 格式

Komatsu^[1]采用特征线法并将一维纯对流方程和一维二阶波动方程联系起来, 导出了一维纯对流方程的高精度格式, 对式(2)采用此方法, 可以得到如下表达式:

$$p_1 c_{i-1}^{n+1} + p_2 c_i^{n+1} + p_3 c_{i+1}^{n+1} = p_4 c_{i-1}^n + p_5 c_i^n + p_6 c_{i+1}^n, \quad (8)$$

式中, p_1, \dots, p_6 的表达式可参见文献[1]; i 表示空间节点编号; n 表示时间层。限于文章的篇幅, 式(3)、(4)的离散格式推导过程从略。式(8)在满足 CFL 条件时恒稳定, 推导过程可参见文献[1]。

2 Crank_Nicolson 有限元格式

对式(2)采用空间线性插值的 Galerkin 有限元法, 可以得到:

$$\mathbf{M}_x \left[\frac{\partial c}{\partial t} \right]_i + u \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_i = 0, \quad (9)$$

其中, $\mathbf{M}_x = (\delta, 1 - 2\delta, \delta)$ 为质量算子, $\delta = 1/6 + \alpha^2/12$ 。式(9)采用 Crank_Nicolson 差分得:

$$M_x \left[\frac{c_i^{n+1} - c_i^n}{\Delta t} \right] + \frac{u}{2} \left[\frac{\partial c}{\partial x} \Big|_i^{n+1} + \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_i^n \right] = 0 \quad (10)$$

对上式中的空间一阶导数采用中心差分, 并经整理得:

$$L_1 c_{i-1}^{n+1} + L_2 c_i^{n+1} + L_3 c_{i+1}^{n+1} = L_3 c_{i-1}^n + L_2 c_i^n + L_1 c_{i+1}^n, \quad (11)$$

式中, n 和 $n+1$ 分别表示 t 和 $t + \Delta t$ 时刻; i 表示空间节点编号; $L_1 = \delta - 0.25\alpha$; $L_2 = 1 - 2\delta$; $L_3 = \delta + 0.25\alpha$; $\alpha = u \Delta t / (\Delta x)$ 为库郎 (Courant 数). 如果令上式中的 $\delta = 0$, 则得到 Crank_Nicolson 有限差分格式. 当 $\delta = 1/6 + \alpha^2/12$ 时, 式(11) 为 Crank_Nicolson 有限元格式, 其截断误差为 $O(\Delta t^2, \Delta x^4)$. 按照同样的方法, 可以很容易地得出式(3)、(4) 的离散格式, 限于文章的篇幅, 推导过程从略. 用 von Neumann 方法分析式(11) 的稳定性, 式(11) 的误差传播方程为:

$$L_1 V e^{-ik\Delta x} + L_2 V + L_3 V e^{ik\Delta x} = L_3 e^{-ik\Delta x} + L_2 + L_1 e^{ik\Delta x}, \quad (12)$$

可求得放大因子:

$$G = \frac{V^{n+1}}{V^n} = \frac{1 - 2\delta + 2\delta \cos k \Delta x - 0.5i\alpha \sin k \Delta x}{1 - 2\delta + 2\delta \cos k \Delta x + 0.5i\alpha \sin k \Delta x}$$

即 $|G| = 1$, 因此式(11) 恒稳定, 同理可求得式(3)、(4) 的离散格式也恒稳定, 因此该格式稳定.

3 一维扩散方程的离散格式

对式(5) 采用 Crank_Nicolson 有限元法并经整理可得:

$$(\delta - 0.5S_{i-1/2}) c_{i-1}^{n+1} + (1 - 2\delta + 0.5S_{i-1/2} + 0.5S_{i+1/2}) c_i^{n+1} + (\delta - 0.5S_{i+1/2}) c_{i+1}^{n+1} = (\delta + 0.5S_{i-1/2}) c_{i-1}^n + (1 - 2\delta - 0.5S_{i-1/2} - 0.5S_{i+1/2}) c_i^n + (\delta + 0.5S_{i+1/2}) c_{i+1}^n, \quad (13)$$

$$\text{式中 } S_{i-1/2} = \frac{0.5(D_{xi} + D_{xi-1}) \Delta t}{\Delta x^2}, \quad S_{i+1/2} = \frac{0.5(D_{xi} + D_{xi+1}) \Delta t}{\Delta x^2}.$$

该格式为无条件稳定, 截断误差为 $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$, 当 D_x 为常数, 并且 $\delta = 1/12$ 时, 该格式为空间 4 阶精度. 可采用同样的方法得出式(6) 的离散格式. 对于含源、汇项的一维扩散方程式(7), 由于源、汇项的形式不同, 难以给出具体的离散格式, 但可采用前面的方法得到相应的离散格式, 这里不进行推导.

1.2.2 改进后的三维对流扩散方程的 ADI 格式

1955 年 Rachford 提出的交替方向隐式方法 (alternating direction implicit method, 简称 ADI 法). 这是一种显式和隐式交替使用的方法, 在求解抛物型方程时被广泛采用, 但对于某些三维对流扩散问题, 经典 ADI 格式的计算结果并不理想, 这里对经典 ADI 格式的对流项做了改进并应用于三维对流扩散问题, 具体计算步骤分下面 3 个阶段进行.

1 第 1 阶段

在该阶段, x 方向的 1 阶与 2 阶导数分别采用 2 阶精度隐式偏心差分 and 隐式中心差分, 而 y 和 z 方向的 1 阶与 2 阶导数都分别采用 5 点中心差分显格式和显式中心差分, 即:

$$\frac{c_{i,j,k}^{n+1/3} - c_{i,j,k}^n}{\Delta t/3} + \left[u \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{i,j,k}^{n+1/3} + \left[v \frac{\partial c}{\partial y} \right]_{i,j,k}^n + \left[w \frac{\partial c}{\partial z} \right]_{i,j,k}^n = \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1/3} + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right]_{i,j,k}^n + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \right]_{i,j,k}^n, \quad (14)$$

式中

$$\left[u \frac{\partial c}{\partial x} \right]_{i,j,k}^{n+1/3} = \frac{u_{i,j,k}^n}{12\Delta x} (-c_{i+2,j,k}^{n+1/3} + 8c_{i+1,j,k}^{n+1/3} - 8c_{i-1,j,k}^{n+1/3} + c_{i-2,j,k}^{n+1/3}), \quad (15)$$

$$\left[v \frac{\partial c}{\partial y} \right]_{i,j,k}^n = \frac{v_{i,j,k}^n}{12\Delta y} (-c_{i,j+2,k}^n + 8c_{i,j+1,k}^n - 8c_{i,j-1,k}^n + c_{i,j-2,k}^n), \quad (16)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) \right]_{i,j,k}^{n+1/3} = \frac{1}{\Delta x^2} [D_{x i+1/3,j,k} (c_{i+1,j,k}^{n+1/3} - c_{i,j,k}^{n+1/3}) - D_{x i-1/3,j,k} (c_{i,j,k}^{n+1/3} - c_{i-1,j,k}^{n+1/3})], \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right]_{i,j,k}^n = \frac{1}{\Delta y^2} [D_{y i,j+1/3,k} (c_{i,j+1,k}^n - c_{i,j,k}^n) - D_{y i,j-1/3,k} (c_{i,j,k}^n - c_{i,j-1,k}^n)], \quad (18)$$

方程(14)左边第4项和右边最后1项的离散格式分别与式(16)、(18)相似,将式(15)~(18)代入式(14),并整理得:

$$a_i c_{i-2,j,k}^{n+1/3} + b_i c_{i-1,j,k}^{n+1/3} + d_i c_{i,j,k}^{n+1/3} + e_i c_{i+1,j,k}^{n+1/3} + f_i c_{i+2,j,k}^{n+1/3} = g_i, \quad (19)$$

式中

$$a_i = u_{i,j,k}^{n+1/3}/12\Delta x, \quad b_i = -8u_{i,j,k}^{n+1/3}/12\Delta x - D_{x i-1/3,j,k}/\Delta x^2,$$

$$d_i = \frac{3}{\Delta t} + \frac{D_{x i+1/3,j,k} + D_{x i-1/3,j,k}}{\Delta x^2}, \quad e_i = \frac{8u_{i,j,k}^{n+1/3}}{12\Delta x} - \frac{D_{x i+1/3,j,k}}{\Delta x^2}, \quad f_i = -\frac{u_{i,j,k}^{n+1/3}}{12\Delta x},$$

$$g_i = \frac{3c_{i,j,k}^n}{\Delta t} - \left[v \frac{\partial c}{\partial y} \right]_{i,j,k}^n - \left[w \frac{\partial c}{\partial z} \right]_{i,j,k}^n + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right) \right]_{i,j,k}^n + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial c}{\partial z} \right) \right]_{i,j,k}^n.$$

2 第2、3阶段

在第2阶段, y 方向的1阶与2阶导数分别采用2阶精度隐式偏心差分 and 隐式中心差分, 而 x 和 z 方向的1阶与2阶导数都分别采用5点中心差分显格式和显式中心差分. 在第3阶段, z 方向的1阶与2阶导数分别采用2阶精度隐式偏心差分 and 隐式中心差分, 而 x 和 y 方向的1阶与2阶导数都分别采用5点中心差分显格式和显式中心差分, 按照与第1阶段相似的方法, 可以很容易地得到第2、3阶段的离散代数方程组. 限于文章的篇幅, 这里不给出具体公式.

用 Neuman 方法分析该格式的稳定性, 式(19)的误差传播方程为:

$$\frac{V^{1/3} - 1}{\Delta t/3} + u \frac{V^{1/3}(-e^{ik2\Delta x} + 8e^{ik\Delta x} - 8e^{-ik\Delta x} + e^{-ik2\Delta x})}{12\Delta x} +$$

$$v \frac{-e^{ik2\Delta y} + 8e^{ik\Delta y} - 8e^{-ik\Delta y} + e^{-ik2\Delta y}}{12\Delta y} + w \frac{-e^{ik2\Delta z} + 8e^{ik\Delta z} - 8e^{-ik\Delta z} + e^{-ik2\Delta z}}{12\Delta z} =$$

$$D_x \frac{V^{1/3}(e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x})}{\Delta x^2} + D_y \frac{(e^{ik\Delta y} - 2 + e^{-ik\Delta y})}{\Delta y^2} + D_z \frac{(e^{ik\Delta z} - 2 + e^{-ik\Delta z})}{\Delta z^2},$$

可求得放大因子 G_1 为:

$$G_1 = V^{1/3} = \left\{ 1 - \frac{4D_y \Delta t}{3\Delta y^2} \sin^2 \frac{k\Delta y}{2} - \frac{4D_z \Delta t}{3\Delta z^2} \sin^2 \frac{k\Delta z}{2} - \right.$$

$$\left. i \left[\frac{v \Delta t \sin k\Delta y (4 - \cos k\Delta y)}{9\Delta y} + \frac{w \Delta t \sin k\Delta z (4 - \cos k\Delta z)}{9\Delta z} \right] \right\} \left| \right.$$

$$\left. \left[1 + \frac{4D_x \Delta t}{3\Delta x^2} \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} + i \frac{u \Delta t \sin k\Delta x (4 - \cos k\Delta x)}{9\Delta x} \right] \right|.$$

同理可求出第2、3阶段离散方程的误差传播方程的放大因子 G_2 、 G_3 的表达式, 因此该格式的误差传播方程的放大因子 $|G| = |G_1 G_2 G_3|$, 由计算可知当满足 CFL 条件时该格式稳定.

2 算例及结果分析

本节将采用前面提出的3种数值格式对两个比较经典的对流扩散问题进行数值模拟, 以考察该3种格式的精度.

2.1 单位高斯脉冲在三维空间内的对流扩散问题

该问题的解析解为:

$$C(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp\left[-\frac{(x-x_0-ut)^2}{D_x(4t+1)} - \frac{(y-y_0-vt)^2}{D_y(4t+1)} - \frac{(z-z_0-wt)^2}{D_z(4t+1)}\right], \quad (20)$$

式中, 初始投放点为 $(x_0, y_0, z_0) = (0.5 \text{ m}, 0.5 \text{ m}, 0.5 \text{ m})$; $u = v = 0.8 \text{ m/s}, w = 0.1 \text{ m/s}; D_x = D_y = D_z = 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$. 将 $t_0 = 0 \text{ s}$ 代入上式可得该问题的初始条件. 数值计算时, 计算域为 $0 \leq x \leq 2 \text{ m}, 0 \leq y \leq 2 \text{ m}, 0 \leq z \leq 2 \text{ m}$, 时间步长取为 $\Delta t = 0.00625 \text{ s}$, 空间步长取为 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.05 \text{ m}$, 图 1、2 给出了在 $t = 1.25 \text{ s}$ 时刻、 $z = 0.2 \text{ m}$ 水深处的数值解与解析解的比较.

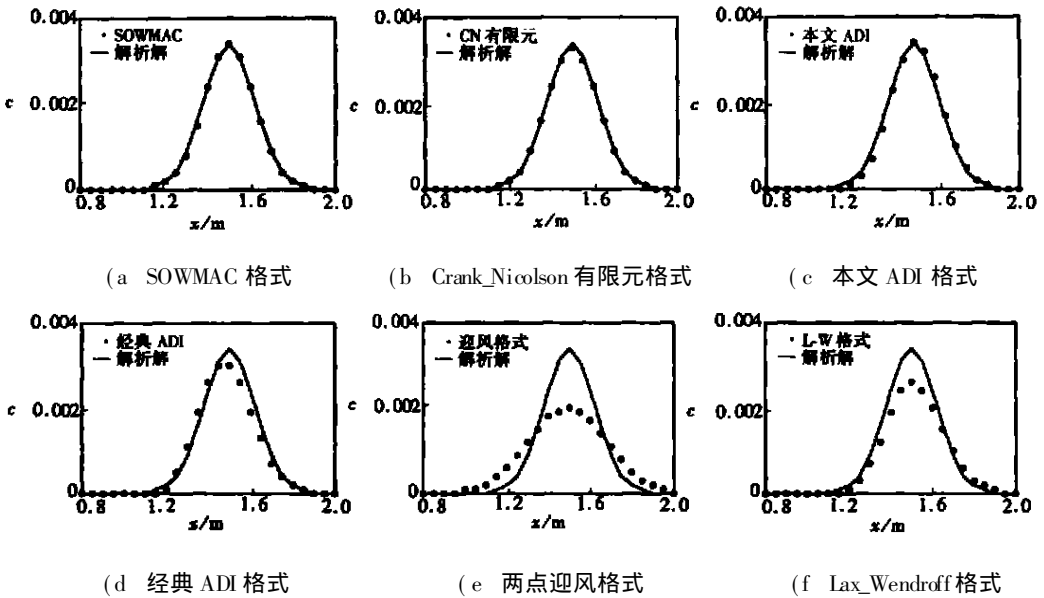


图 1 在 $y = x$ 剖面上, 三维对流扩散问题的数值解与解析解的比较
(在 $z = 0.2 \text{ m}$ 水深处, $t = 1.25 \text{ s}$ 时刻)

2.2 均匀流场作用下的三维纯对流问题

在无限三维空间中, 3 团浓度呈高斯分布的示踪物以流速 $u = v = 0.5 \text{ m/s}, w = 0.05 \text{ m/s}$ 在空间中流动, 初始中心分别位于 $(x_1, y_1, z_1) = (1400 \text{ m}, 1400 \text{ m}, 14 \text{ m}), (x_2, y_2, z_2) = (2400 \text{ m}, 2400 \text{ m}, 24 \text{ m}), (x_3, y_3, z_3) = (3400 \text{ m}, 3400 \text{ m}, 34 \text{ m})$, 初始浓度峰值分别为 $c_1 = 10.0, c_2 = 6.5, c_3 = 5.0$, 标准差 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 264.0 \text{ m}$. 该问题的解析解为:

$$c(x, y, z, t) = c_1 \exp\left[-\frac{(x-x_1-ut)^2 + (y-y_1-vt)^2 + (z-z_1-wt)^2}{2\sigma_1^2}\right] + c_2 \exp\left[-\frac{(x-x_2-ut)^2 + (y-y_2-vt)^2 + (z-z_2-wt)^2}{2\sigma_2^2}\right] + c_3 \exp\left[-\frac{(x-x_3-ut)^2 + (y-y_3-vt)^2 + (z-z_3-wt)^2}{2\sigma_3^2}\right], \quad (21)$$

将 $t = 0$ 代入上式可得到该问题的初始条件. 数值计算时, 计算域为 $0 \leq x \leq 10 \text{ km}, 0 \leq y \leq 10 \text{ km}, 0 \leq z \leq 100 \text{ m}$, 时间步长取 $\Delta t = 100 \text{ s}$, 空间步长取为 $\Delta x = \Delta y = 100 \text{ m}, \Delta z = 10 \text{ m}$.

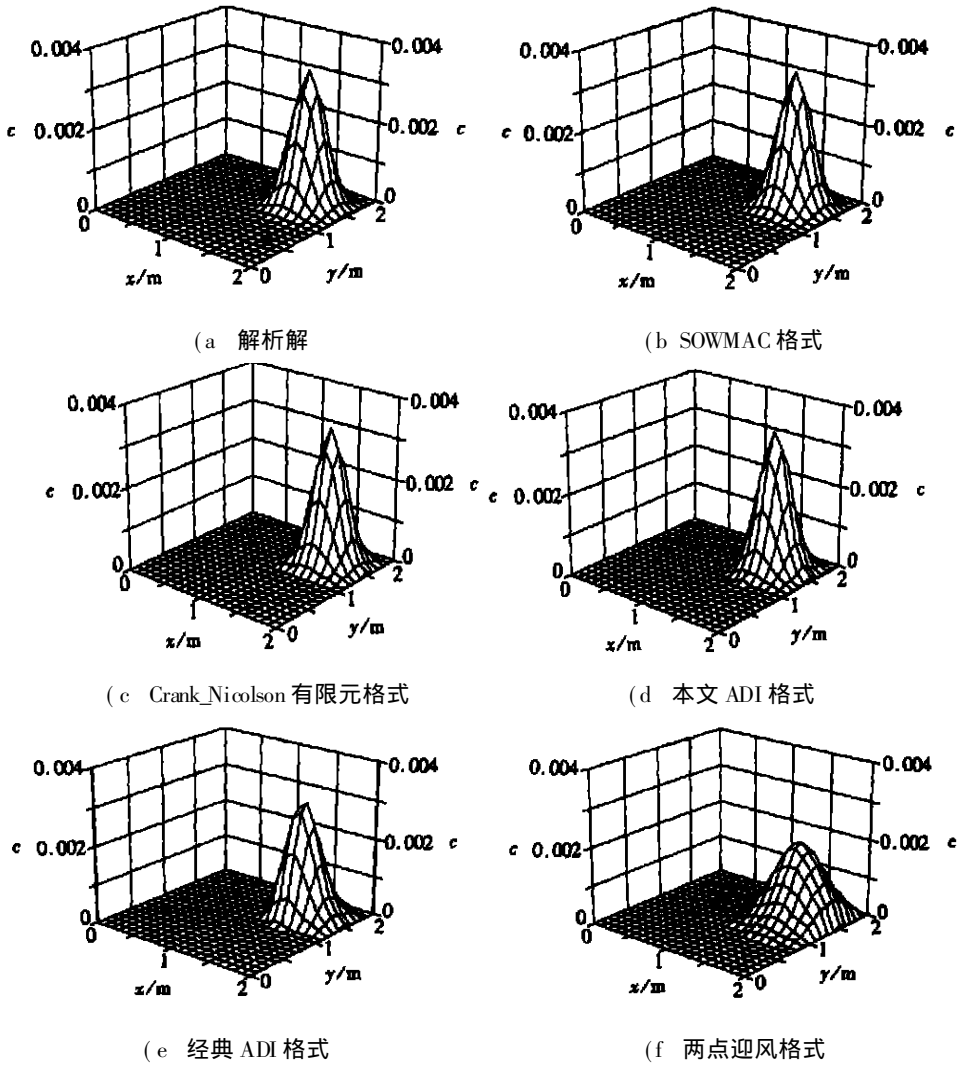
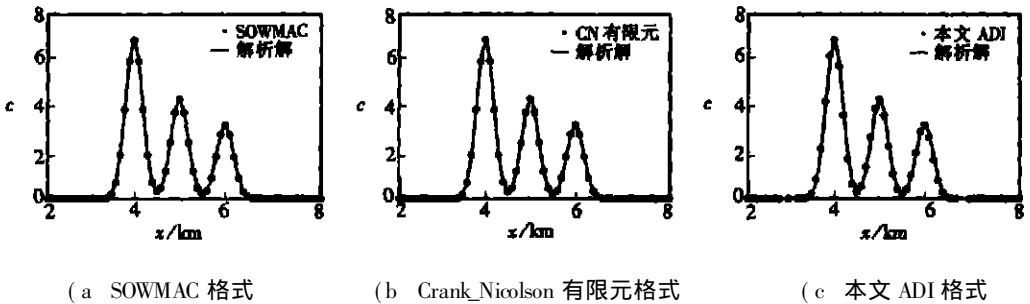


图 2 三维对流扩散问题的数值解与解析解的三维浓度分布图

(在 $z = 0.2 \text{ m}$ 处, $t = 1.25 \text{ s}$ 时刻)

图 3、4 给出了在 $t = 5000 \text{ s}$ 时刻, $z = 40 \text{ m}$ 水深处的数值解与解析解的比较。

作者通过改变 Peclet 数值的大小, 得出当 Peclet 数不大于 5 时, 本文的 3 种格式均能给出非常好的模拟结果, 且在这 3 种格式中 SOWMAC 格式与本文 ADI 格式计算较费机时, 而 CN 有限元的计算速度较快。



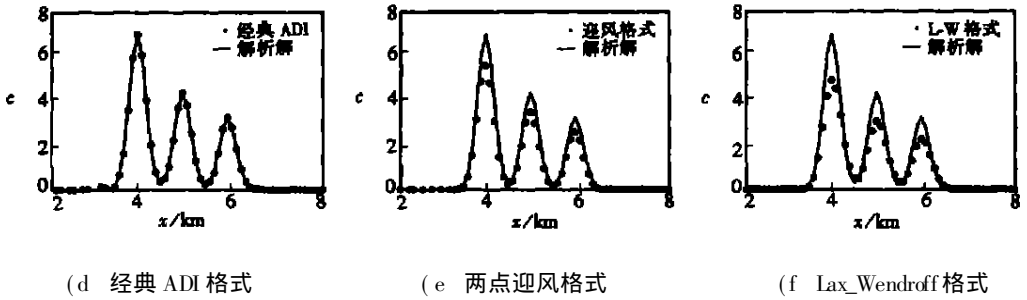


图 3 在 $y = x$ 剖面上, 三维纯对流问题的解析解与数值解的比较
(在 $z = 40 \text{ m}$ 水深处, $t = 5000 \text{ s}$ 时刻)

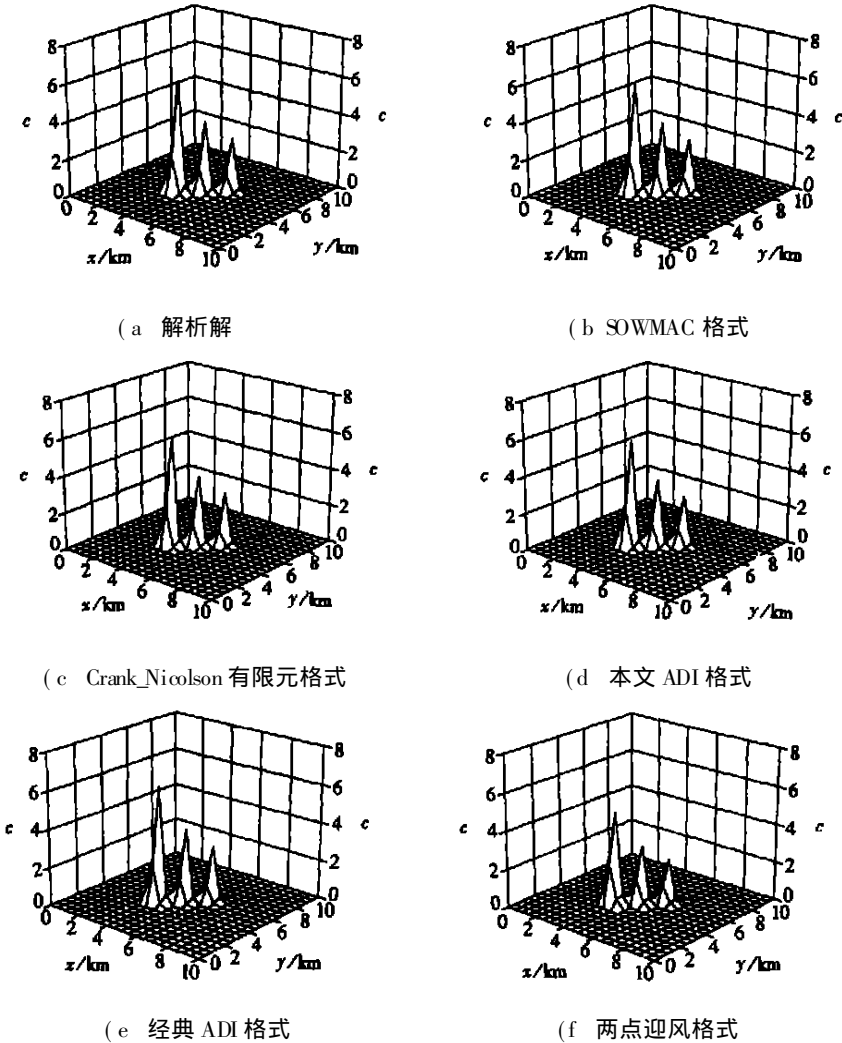


图 4 三维对流扩散问题的数值解与解析解的三维浓度分布图
(在 $z = 40 \text{ m}$ 处, $t = 5000 \text{ s}$ 时刻)

3 结 语

本文针对求解污染物三维对流扩散方程, 将两种高精度的分裂格式应用于三维对流扩散

方程, 该两种格式是在三维对流扩散方程已分裂为多个一维方程的基础上再进行求解的, 且在每个方向仅涉及 3 个空间节点, 从而得到空间 4 阶精度。改进后的 ADI 格式的对流项对空间达到 4 阶精度, 而经典 ADI 格式对空间只有 2 阶精度, 可见提高了该格式的实用性。最后对两种典型的浓度场进行了模拟, 从模拟结果与解析解以及其它格式数值结果比较来看, 本文推广的 3 种格式在当 Peclet 数不大于 5 时具有精度高、求解快、编程简单、计算量小且稳定性良好等优点, 可以用于三维对流扩散问题的精细预报。

[参 考 文 献]

- [1] Komatsu T, Ohgushi K, Asai K. Refined numerical scheme for advective transport in diffusion simulation[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1997, **123**(1): 41—50.
- [2] ZHENG Yong_hong, SHEN Yong_ming, QIU Da_hong. A high_order splitting scheme for the advection diffusion equation[J]. Journal of Environmental Sciences, 2001, **13**(4): 444—448.
- [3] 郑永红, 沈永明, 王利生, 等. 污染物移流扩散方程的高精度分裂格式[J]. 水利学报, 2002, (2): 41—46.
- [4] 郑永红. 波浪、潮流、污染物迁移扩散数学模型及其数值模拟[R]. 博士后工作报告. 大连: 大连理工大学, 2000, 79—103.
- [5] Lardner R W, Song Y. An algorithm for three dimensional convection and diffusion with very different horizontal and vertical scales[J]. Internat J Numer Methods Engrg, 1991, **32**: 1303—1319.
- [6] Sommeijer B P, Kok J. Implementation and performance of the time integration of a 3D numerical transport model[J]. Internat J Numer Methods Fluids, 1995, **21**: 349—367.
- [7] Sankaranayanan S, Shankar N J, Cheong H F. Three dimensional finite difference model for transport of conservative pollutants[J]. Ocean Engineering, 1998, **25**(6): 425—442.
- [8] Szymkiewicz R. Oscillation_free solution of shallow water equations for nonstaggered grid[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1993, **119**(10): 1118—1137.

Three High_Order Splitting Schemes for the 3D Transport Equation

WANG Shou_dong, SHEN Yong_ming

(State Key Laboratory of Coastal and Offshore Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, P. R. China)

Abstract: Two high_order splitting schemes based on the idea of the operators splitting method are given. The three_dimensional advection_diffusion equation was split into several one_dimensional equations that were solved by these two schemes, only three computational grid points were needed in each direction but the accuracy reaches the spatial fourth_order. The third scheme proposed is based on the classical ADI scheme and the accuracy of the advection term of it can reach the spatial fourth_order. Finally, two typical numerical experiments show that the solutions of these three schemes compare well with that given by the analytical solution when the Peclet number is not bigger than 5.

Key words: 3_D advection and diffusion equation; operator splitting method; high_order scheme; numerical modeling