

文章编号: 1000-0887(2004) 04-0391-09

扁球壳和扁锥壳的轴对称非线性 热弹耦合振动*

王永岗¹, 戴诗亮²

(1. 中国农业大学 应用力学系, 北京 100083;

2. 清华大学 工程力学系, 北京 100084)

(郑泉水推荐)

摘要: 假设温度场与应变场相互耦合, 研究了旋转扁薄球壳和锥壳的轴对称非线性热弹振动问题。基于 von Kármán 理论和热弹性理论, 导出了本问题的全部控制方程及其简化形式。应用 Galerkin 技术进行时空变量分离后, 得到了一个关于时间的非线性常微分方程组。根据方程的特点, 分别用多尺度法和正则摄动法求得了壳体振动的频率与振幅间特征关系和振幅衰减规律的一次近似解析解, 并讨论了壳体几何参数、热弹耦合参数以及边界条件等因素对其非线性热弹耦合振动特性的影响。

关键词: 扁球壳; 扁锥壳; 热弹耦合; 非线性振动; 摄动法

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

引 言

旋转扁薄壳非线性振动问题的研究无论是在理论方面还是在应用方面都有重要的意义。近几十年来, 这一研究在考虑诸如正交性、变厚度、静载荷^[1,2]等多种复杂因素的影响方面做了大量工作, 但对温度场与变形场相互作用的热弹耦合非线性振动, 由于涉及到非线性的数学问题、耦合问题, 加之壳体复杂的几何形状等带来的困难, 研究成果并不多见。可资借鉴的是, 人们对薄板热弹振动的研究从线性到非线性都比较充分, 这方面的工作首推 Boley 和 Barber 对筒支板热冲击问题的研究^[3], Nowacki^[4] 推导了板的线性热弹耦合振动基本方程及热传导方程的简化形式, Chang^[5] 将文献[4]的研究扩展到矩形板非线性热弹耦合振动的研究上。最近, Trajkovski 等人^[6] 用积分变换法研究了自由和夹支热冲击圆板的线性热弹耦合问题, Praveen 等人^[7] 用有限元法研究了板的非线性瞬态热弹响应。Taudert^[8] 对板的热弹振动作了较详细的综述。总的看来, 板壳热弹耦合振动的研究多集中在板的范畴, 一些报道虽然涉及到壳体的领域, 但多限于线性热弹耦合或非耦合分析^[9]。

本文研究了旋转扁球壳和扁锥壳的轴对称非线性热弹耦合振动。首先由 Hamilton 原理推

* 收稿日期: 2002_01_29; 修订日期: 2003_10_21

作者简介: 王永岗(1965—), 男, 陕西人, 副教授, 博士(联系人, Tel: + 86_10_62336411(o), + 86_10_82387804(h); E_mail: wangyg@tsinghua.org.cn)。

导了问题的基本方程,此方程与壳的热传导方程相互耦合,而后应用 Galerkin 技术和摄动近似法得到了问题的一次近似解析解,籍此可以揭示多种参数对耦合振动的影响机理。

1 控制方程

1.1 扁壳轴对称非线性热弹耦合振动的基本方程

研究一旋转扁薄球壳或锥壳的轴对称振动问题。根据薄壳理论,轴对称变形壳体内任一点的应变,可通过壳体中面上的4个广义应变分量来描述

$$\varepsilon(r, t) = \left\{ \varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \chi_r \quad \chi_\theta \right\}^T, \quad (1)$$

式中, t 为时间变量, r, θ 分别为扁壳的径向和环向坐标,4个应变分量分别表示中面内的伸长和曲率变化。将扁薄壳视为具有初始挠度的薄板,由此可得 von K m n 轴对称大挠度壳体的应变_位移关系

$$\varepsilon(r, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial r^2} & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

其中, $w(r)$ 是旋转扁薄壳的中面几何方程(初挠度),由文[2],有

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{mf}{a^m r^{m-1}}, \quad (3)$$

这里, a 为扁壳底圆半径, f 为壳的矢高,指标 m 取1或2,分别对应于扁锥壳和扁球壳。

设 σ 是与 ε 对应的广义内力向量,则物理方程为

$$\sigma(r, t) = \left\{ N_r \quad N_\theta \quad M_r \quad M_\theta \right\}^T = D\varepsilon - \sigma_T, \quad (4)$$

D 为弹性矩阵,而

$$\sigma_T(r, t) = \left\{ N_T \quad N_T \quad M_T \quad M_T \right\}^T \quad (5)$$

表征由温度引起的附加热内力,其中 N_T 和 M_T 分别为附加热中面力和热弯矩

$$N_T = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} T(r, z, t) dz, \quad M_T = \frac{E\alpha}{1-\nu} \int_{-h/2}^{h/2} T(r, z, t) z dz, \quad (6)$$

式中, h 为壳厚, E 为弹性模量, ν 为泊松比, α 为热膨胀系数, T 表示绝对温度与参考温度 T_0 之差。

引入应力函数 ϕ 及偏微分算子 L , 使

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad N_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad L(f, g) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\partial g}{\partial r} \right].$$

这样,由 Hamilton 原理,即可得到扁壳轴对称非线性热弹耦合振动的基本方程

$$D \cdot^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \cdot^2 M_T = L(w + w, \phi), \quad (7)$$

$$\cdot^4 \phi + (1-\nu) \cdot^2 N_T = -\frac{1}{2} E h L(w + 2w, w). \quad (8)$$

假设壳体周边为面内不可移,则边界条件可写为

$$r = 0 \text{ 时, } w < \infty, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} < \infty; \quad (9)$$

$$r = a \text{ 时, } w = 0, \quad D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \kappa_0 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] + M_T = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + (1 - \nu) N_T = 0; \quad (10)$$

这里, D 为壳体的抗弯刚度, $\kappa_0 = \nu$ 或 $\kappa_0 = \infty$ 分别对应于壳体周边横向简支和固支边界。

1.2 旋转扁壳的热传导方程及其简化形式

当温度场与应变场相互耦合时, 有如下能量方程^[10]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial T}{\partial t} - \mu \frac{\partial e}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

式中, $k = \lambda_0 / \rho_s$ 为热扩散率, $\mu = \alpha E T_0 / (1 - 2\nu) \lambda_0$ 为热弹耦合因子, 表示温度场与应变场的耦合程度, e 为体积应变, ρ 为壳体的密度, λ_0 和 c_s 分别为材料的导热系数与比热。

式(11)的最后一项代表耦合项, 因此, 热传导方程正是通过应变率与热弹性方程发生耦合的。一些研究通过忽略此耦合项而简化计算, 实际上造成了耦合的物理现象与非耦合的力学模型间的不一致。

热力学边界条件可假设为: 扁壳周边为恒温条件 ($T = 0$), 则

$$r = a \text{ 时, } N_T = 0, M_T = 0 \quad (12)$$

壳体内外表面与周围介质有热交换, 属对流条件

$$\lambda_0 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = H(T_\infty - T_o), \quad \lambda_0 \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = -H(T_\infty - T_i), \quad (13)$$

其中, H 是壳体与周围介质间的放热系数, T_i 与 T_o 分别为扁壳内外表面的温度, T_∞ 表示周围介质的温度, 且设 $T_\infty = 0$ 。

由于薄壳假定, 可设 T 沿壳厚按线性分布

$$T(r, z, t) = \frac{1}{2}(T_o + T_i) + (T_o - T_i) \frac{z}{h}, \quad (14)$$

于是

$$N_T = \frac{Eh\alpha}{2(1-\nu)}(T_o + T_i), \quad M_T = \frac{Eh^2\alpha}{12(1-\nu)}(T_o - T_i). \quad (15)$$

式(11)是关于空间坐标 (r, z) 的二维方程, 为易于和关于 r 的一维热弹振动基本方程联立求解, 依照 Nowacki^[4] 和 Chang^[5] 的思想并考虑到式(13)~(15), 可将式(11)简化为包括 N_T 和 M_T 在内的两个方程

$$\left[\dots^2 - \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{12}{h^2} \left(1 + \frac{hH}{2\lambda_0} \right) \right] M_T + D\mu\alpha(1+\nu) \frac{\partial}{\partial t} \dots^2 w = 0, \quad (16)$$

$$\left[\dots^2 - \left(\frac{1}{k} + 2\mu\alpha \right) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{2H}{\lambda_0 h} \right] N_T - \mu\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left[\dots^2 \phi + \frac{Eh}{1-\nu} \frac{\partial w}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] = 0. \quad (17)$$

2 动力混合问题的求解

问题最后归结为在对应的边界条件下, 求解方程(7)~(8)以及(16)~(17)。为方便起见, 引入如下的无量纲量

$$R = \frac{r}{a}, \quad \delta = \frac{a}{h}, \quad \lambda = \sqrt{12(1-\nu^2)}, \quad K = \frac{\lambda_f}{h}, \quad W = \frac{\lambda_w}{h} w, \quad \bar{W} = \frac{\lambda_w}{h},$$

$$\varphi = \frac{1}{D} \phi, \quad \Omega = t \sqrt{\frac{D}{\rho h a^4}} = \omega t, \quad M = \frac{hH}{2\lambda_0}, \quad M_T = \frac{\lambda_a^2}{Dh} M_T, \quad N_T = \frac{(1-\nu)a^2}{D} N_T,$$

$$\tau = \frac{h^2}{\kappa} \omega = \tau_0 \omega, \quad \beta = (1 + \nu) \mu \alpha \kappa, \quad L^*(f, g) = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial^2 g}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} \frac{\partial g}{\partial R} \right],$$

其中, τ_0 为热扩散松弛时间。这样, 即可将本问题的控制方程无量纲化为

$$\tau \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \Omega^4} + \tau \frac{\partial^2 N_T}{\partial \Omega^2} = -\frac{1}{2} L^*(W + 2W, W), \quad (18)$$

$$\tau \frac{\partial^4 W}{\partial \Omega^4} + \frac{\partial^2 W}{\partial \Omega^2} + \tau \frac{\partial^2 M_T}{\partial \Omega^2} = L^*(W + W, \varphi), \quad (19)$$

$$\left[\tau \frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} - \tau \delta^2 \frac{\partial}{\partial \Omega} - 12\delta^2(1 + M) \right] M_T + \beta \tau \delta^2 \frac{\partial}{\partial \Omega} \tau \frac{\partial^2 W}{\partial \Omega^2} = 0, \quad (20)$$

$$\left[\tau \frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} - \tau \delta^2 \left(1 + \frac{2\beta}{1 + \nu} \right) \frac{\partial}{\partial \Omega} - 4M\delta^2 \right] N_T - \frac{\beta \tau \delta^2}{1 + \nu} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left[(1 - \nu) \tau \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Omega^2} + \frac{\partial W}{\partial R} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial R} + \frac{\partial W}{\partial R} \right) \right] = 0. \quad (21)$$

$$R = 0 \text{ 时, } W < \infty, \quad \frac{\partial W}{\partial R} = 0, \quad \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} < \infty; \quad (22)$$

$$R = 1 \text{ 时, } W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial R^2} + \kappa_b \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial R} + M_T = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} - \frac{\nu}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + N_T = 0, \quad N_T = 0, \quad M_T = 0.$$

2.1 热弹振动非线性微分方程的建立

式(18)~(23)加上初始条件(随后给出)构成了动力混合问题, 由于非线性及热弹耦合造成的困难, 一般得不到封闭形式的解析解。本文拟用 Galerkin 法进行分析, 为此设

$$\begin{cases} W(R, \Omega) = W_n W(R) A(\Omega), \\ M_T(R, \Omega) = W_n \Phi(R) B(\Omega), \\ N_T(R, \Omega) = W_n \Phi(R) C(\Omega), \end{cases} \quad (24)$$

式中 $W_n = W(0, 0)$ 为扁壳中心无量纲初始挠度。假定振型函数形如

$$W(R) = 1 + c_1 R^2 + c_2 R^4, \quad (25)$$

该式已满足了式(22)中 $W(R, \Omega)$ 所对应的边界条件, 系数 c_1 和 c_2 的设置是为了使 $W(R)$ 满足式(23)中的前两个条件。假定

$$\Phi(R) = W(R), \quad (26)$$

此式也同时满足了式(23)中的周边恒温条件。

将式(24)代入到协调方程(18), 注意到 φ 的边界条件, 可得应力函数的解为

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = W_n^2 F_1(R) A^2(\Omega) + W_n F_2(R) A(\Omega) + W_n F_3(R) C(\Omega), \quad (27)$$

其中

$$f_1(R) = -\frac{1}{4} c_1^2 R^3 - \frac{1}{3} c_1 c_2 R^5 - \frac{1}{6} c_2^2 R^7,$$

$$f_2(R) = -\frac{2Kc_1}{m+2} R^{m+1} - \frac{4mKc_2}{(m+2)(m+4)} R^{m+3},$$

$$f_3(R) = -\frac{1}{4} c_1 R^3 - \frac{1}{6} c_2 R^5,$$

$$F_i(R) = f_i(R) - \frac{f_i(1) - Y_i(1)}{1 - \nu} R \quad (i = 1, 2, 3).$$

设

$$y_1 = \int_0^1 W^2 R dR, \quad y_2 = \int_0^1 \left[R \cdot \cdot^4 W - \frac{\partial}{\partial R} (mKR^{m-1} F_2) \right] W dR.$$

引进新的时间变量 $\Lambda = \sqrt{y_1^{-1} y_2} \Omega$, 对式(19) ~ (21) 实施 Galerkin 技术, 可得到 $A(\Lambda)$ 、 $B(\Lambda)$ 和 $C(\Lambda)$ 应满足的非线性微分方程为

$$\begin{cases} \dot{A} + A + \varepsilon(\xi_1 W_n A^3 + \xi_2 W_n A^2 + \xi_3 W_n A C + \xi_4 C + \xi_5 B) = 0, \\ \dot{B} + \eta_1 B + \eta_2 A = 0, \\ \dot{C} + \zeta_1 C + \varepsilon \xi_2 W_n A \dot{A} + \zeta_3 A = 0, \end{cases} \quad (28)$$

式中, ε 是为后面的近似求解而引入的人工摄动参数, $(\dot{\quad}) = d/d\Lambda$ 表示对 Λ 的微分, 而

$$\xi_i = -y_2^{-1} \int_0^1 \frac{d}{dR} \left[F_i \frac{dW}{dR} + \frac{1+(-1)^i}{2} mKR^{m-1} F_{i-1} \right] W dR \quad (i = 1 \sim 4, F_0 = F_4 = 0),$$

$$\xi_5 = y_2^{-1} \int_0^1 W \cdot \cdot^2 W R dR, \quad \zeta = (1 + \nu + 2\beta) y_1 + \beta(1 - \nu) \int_0^1 \frac{d}{dR} (RF_3) W dR,$$

$$\eta_1 = -\frac{y_2 \xi_5 - 12 y_1 (1 + M) \delta^2}{\tau \delta^2 \sqrt{y_1 y_2}}, \quad \eta_2 = -\beta \xi_5 y_1^{-1} y_2,$$

$$\zeta_1 = \frac{1 + \nu}{\zeta} \frac{4M \delta^2 y_1 - y_2 \xi_5}{\tau \delta^2 \sqrt{y_1^{-1} y_2}},$$

$$\zeta_{i+1} = \beta \zeta^{-1} \int_0^1 \left[(3-i)(1-\nu) \frac{d}{dR} (RF_i) + (2-i) R \left(\frac{dW}{dR} \right)^2 - (1-i) mKR^m \frac{dW}{dR} \right] W dR = 0 \quad (i = 1, 2).$$

设壳体有初始位移而无初始速度, 则有

$$A(0) = 1, \quad \dot{A}(0) = 0 \quad (29)$$

初始温度场可设为^[5]

$$T(R, z, 0) = \Theta W_n \Phi(R) \left(1 + \frac{z}{h} \right), \quad (30)$$

其中 Θ 为初始温度的分布幅值. 由此可导出 M_T 和 N_T 的初始值

$$B(0) = (1 + \nu) \lambda \alpha \delta^2 \Theta, \quad C(0) = \lambda^2 \alpha \delta^2 \Theta. \quad (31)$$

2.2 热弹振动微分方程的近似解析解

下面求微分方程组(28)的近似解析解. 根据方程的特点, 对 A 采用多尺度法, 而对 B 和 C 则采用正则摄动展开. 记 $T_n = \varepsilon^n \Lambda$, $D_n = d/dT_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, 并略去 ε^2 及以上次幂项, 则有

$$\begin{cases} A(\Lambda, \varepsilon) = A_0(T_0, T_1) + \varepsilon A_1(T_0, T_1), \\ B(\Lambda, \varepsilon) = B_0(\Lambda) + \varepsilon B_1(\Lambda), \\ C(\Lambda, \varepsilon) = C_0(\Lambda) + \varepsilon C_1(\Lambda); \\ \dot{A} = D_0 A_0 + \varepsilon(D_1 A_0 + D_0 A_1), \\ \dot{B} = D_0 B_0 + \varepsilon D_0 B_1, \\ \dot{C} = D_0 C_0 + \varepsilon D_0 C_1. \end{cases} \quad (32)$$

由此, 式(29)和式(31)中的初始条件可展开为

$$\begin{cases} A_0(0, 0) = 1, A_1(0, 0) = 0, D_0 A_0(0, 0) = 0, \\ D_0 A_1(0, 0) + D_1 A_0(0, 0) = 0, \end{cases} \quad (33)$$

$$B_0(0) = (1 + \nu) \lambda \alpha \delta^2 \Theta, B_1(0) = 0, C_0(0) = \lambda^2 \alpha \delta^2 \Theta, C_1(0) = 0 \quad (34)$$

将式(32)代入到式(28)中, 比较等式两端 ε 的同次幂, 有

$$\varepsilon^0 \begin{cases} D_0^2 A_0 + A_0 = 0, \\ D_0 B_0 + \eta_1 B_0 + \eta_2 D_0 A_0 = 0, \\ D_0 C_0 + \zeta_1 C_0 + \zeta_3 D_0 A_0 = 0, \end{cases} \quad (35)$$

$$\varepsilon^1 \begin{cases} D_0^2 A_1 + A_1 = -2D_0 D_1 A_0 - (\xi_1 W_n^2 A_0^3 + \xi_2 W_n A_0^2 + \\ \xi_3 W_n A_0 C_0 + \xi_4 C_0 + \xi_5 B_0), \\ D_0 B_1 + \eta_1 B_1 = -\eta_2 (D_1 A_0 + D_0 A_1), \\ D_0 C_1 + \zeta_1 C_1 = -\zeta_2 W_n A_0 D_0 A_0 - \zeta_3 (D_1 A_0 + D_0 A_1). \end{cases} \quad (36)$$

顺次求解式(35), 可得

$$A_0(T_0, T_1) = A(T_1) \cos \psi, \quad \psi = T_0 + \vartheta(T_1), \quad (37)$$

$$B_0(\Lambda) = B^*(T_1) \exp(-\eta_1 \Lambda) + \lambda_1 A(\eta_1 \sin \psi - \cos \psi), \quad (38)$$

$$C_0(\Lambda) = C^*(T_1) \exp(-\zeta_1 \Lambda) + \lambda_2 A(\zeta_1 \sin \psi - \cos \psi), \quad (39)$$

式中, $\lambda_1 = \eta_2 / (1 + \eta_1^2)$, $\lambda_2 = \zeta_2 / (1 + \zeta_1^2)$, B^* 和 C^* 可由式(34)确定为

$$B^*(T_1) = B_0(0) - \lambda_1 A(\eta_1 \sin \vartheta - \cos \vartheta),$$

$$C^*(T_1) = C_0(0) - \lambda_2 A(\zeta_1 \sin \vartheta - \cos \vartheta).$$

由式(33)可得

$$A_0(0) = 1, \quad \psi(0, 0) = \vartheta(0) = 0 \quad (40)$$

将式(37)~(39)代入式(36)的第一式, 可得

$$\begin{aligned} D_0^2 A_1 + A_1 = & -\frac{1}{4} \xi_1 W_n^2 A^3 \cos 3\psi - \frac{1}{2} \xi_2 W_n A^2 (1 + \cos 2\psi) - \\ & \xi_4 C^* \exp(-\zeta_1 T_0) - \xi_5 B^* \exp(-\eta_1 T_0) - \\ & \xi_3 W_n A [C^* \exp(-\zeta_1 T_0) + \lambda_2 A(\zeta_1 \sin \psi - \cos \psi)] \cos \psi \end{aligned} \quad (41)$$

上式中的永年项已被消除, 消除条件是

$$2D_1 A - (\lambda_1 \eta_1 \xi_5 + \lambda_2 \zeta_1 \xi_4) A = 0, \quad (42)$$

$$D_1 \vartheta = -\frac{1}{2} (\lambda_1 \xi_5 + \lambda_2 \xi_4) + \frac{3}{8} \xi_1 W_n^2 A^2, \quad (43)$$

考虑到式(40)后, 由上两式可求得

$$A(T_1) = \exp\left[\frac{1}{2} (\lambda_1 \eta_1 \xi_5 + \lambda_2 \zeta_1 \xi_4) T_1\right], \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \vartheta(T_1) = & -\frac{1}{2} (\lambda_1 \xi_5 + \lambda_2 \xi_4) T_1 - \frac{3}{8} \frac{\xi_1 W_n^2}{\lambda_1 \eta_1 \xi_5 + \lambda_2 \zeta_1 \xi_4} \times \\ & \left\{1 - \exp[(\lambda_1 \eta_1 \xi_5 + \lambda_2 \zeta_1 \xi_4) T_1]\right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

最终得到微分方程(28)中 A 的一次近似解

$$A(\Lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{A(T_1) \cos[T_0 + \vartheta(T_1)]\right\} = A(\Lambda) \cos[\Lambda + \vartheta(\Lambda)], \quad (46)$$

以及热弹耦合非线性振动的频率与振幅间的特征关系

$$\omega = D_0 \phi = \lim_{\xi \rightarrow 1} (1 + \mathcal{D}_1 \vartheta) = 1 - \frac{1}{2} (\lambda_1 \xi_s + \lambda_2 \xi_t) + \frac{3}{8} \xi_1 W_0^2, \quad (47)$$

其中 $W_0 = W_n A$ 为 $W(0, \Lambda)$ 的振幅。将式(44) 和式(45) 代入到式(41), 便可求得 A_1 的表达式, 本文从略。

3 结果及讨论

温度场与应变场耦合对壳体非线性振动特性的影响可从振动频率和振幅, 即 ω 和 A 两方面来讨论。大量计算发现, 扁锥壳与扁球壳的振动特性大致相同, 故本文仅讨论扁球壳问题, 分析中取 $\nu = 0.3, M = 0.02, \delta = 100$ 。

图 1 给出扁球壳在不同的几何参数 K 下, 其非线性耦合振动频率 ω 与中心无量纲振幅 W_0 间的特征关系以及振幅参数 A 随时间 Λ 的变化规律。可以看出, 无论是在耦合还是非耦合情况, 壳体几何参数对其振动特性都有很大的影响。在扁壳范畴内, 壳体呈现着一种硬弹簧特性, 且这种特性在非热弹耦合时随壳体矢高变小而增强, 在 $K = 0$ 时(退化为圆板), 对应着最大硬特性, 这与文[2] 是一致的。在热弹耦合情况下, 当振幅较小时, 弹簧特性随 K 增大而变硬, 振幅较大时随 K 增大而变软。热弹耦合效应使得壳体振动的频率增大, 然而, 当振幅较大时, 耦合效应的作用降低, 且壳体越扁, 耦合效应的影响越小。

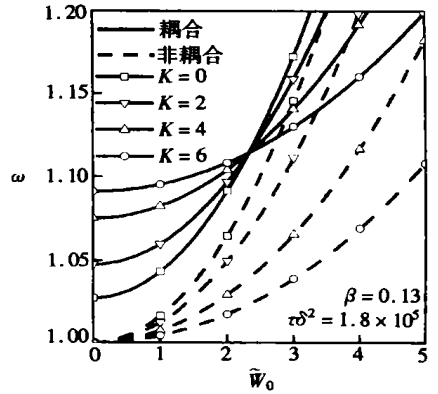


图 1a 几何参数 K 对 ω 的影响

结合式(44), 从图 1b 发现, 扁壳振动的振幅是随时间按指数规律衰减的, 而且 K 越小, 衰减越明显, 这种由热弹阻尼而造成的振幅衰减现象称为热耗散^[4]。

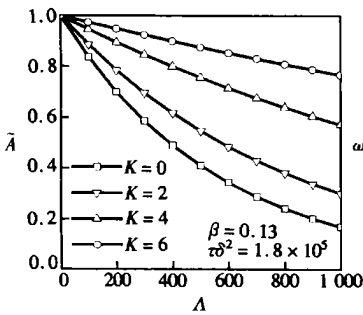


图 1b 几何参数 K 对 A 的影响

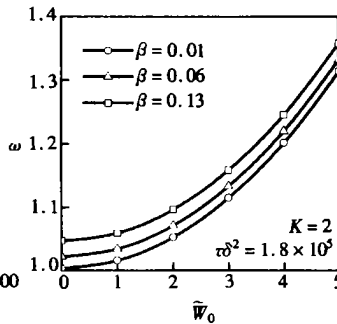


图 2a 组合参数 β 对 ω 的影响

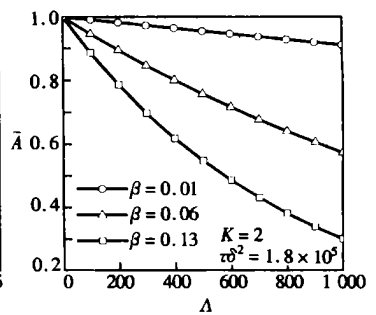


图 2b 组合参数 β 对 A 的影响

β 为与热弹耦合因子 μ 成正比的组合参数, 对同一材料, μ 表征外界温度 T_0 对振动的影响。图 2 可以看出, μ 越大, 耦合振动的频率就越大, A 随时间衰减得也越快, 也即热弹耦合越强, 振动的周期就越短, 振幅衰减就越快。

$\tau\delta^2 = \tau_0 \omega\delta^2$ 是表征材料导热能力大小的组合参数。图 3 示出, 降低 $\tau\delta^2$ 将增大振幅衰减率, 或者说, 热扩散松弛时间越短, 材料导热能力越强, 振幅衰减就越快。但参数 $\tau\delta^2$ 的变化对振动频率并没有影响。

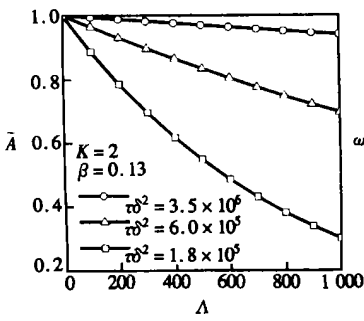


图3 组合参数 $\tau\theta^2$ 对 \bar{A} 的影响

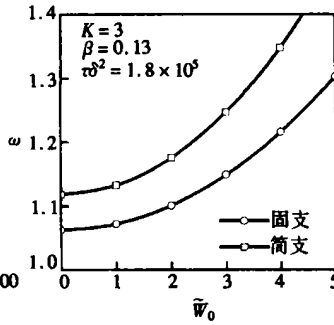


图4a 边界条件对 ω 的影响

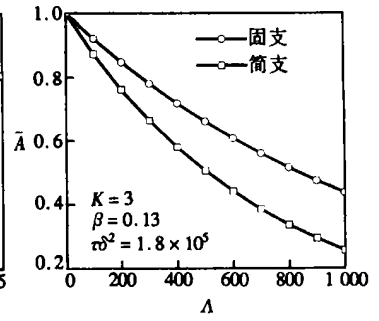


图4b 边界条件对 \bar{A} 的影响

扁壳周边约束条件对其热弹耦合振动的影响也很明显。从图4看出,在几何参数、热弹耦合参数和导热能力相同的情况下,周边简支扁球壳的振动频率较固支加大,但振荡幅度比固支扁球壳小,振幅衰减较快。

[参 考 文 献]

- [1] Varadan T K, Pandalai K A V. Nonlinear flexural oscillation of orthotropic shallow spherical shells [J]. Computers and Structures, 1978, 9(5): 417—425.
- [2] 王永岗,王新志,宋慧芳.静载荷作用下正交各向异性旋转扁壳的非线性自由振动[J].应用数学和力学,1997,18(6):545—550.
- [3] Boley B A, Barber A D. Dynamic response of beams and plates to rapid heating[J]. Journal of Applied Mechanics, 1957, 24(5): 413—425.
- [4] Nowacki W. Dynamic Problems of Thermoelasticity [M]. Leyden, The Netherlands: Sijthoff & Noordhoff International Publishers, 1975, 123—262.
- [5] Chang W P, Wan S M. Thermomechanically coupled nonlinear vibration of plates[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1986, 21(5): 375—389.
- [6] Trajkovski D, Bitola T F, Lola I R, et al. A coupled problem of thermoelastic vibrations of a circular plate with exact boundary conditions[J]. Mechanics Research Communications, 1999, 26(2): 217—224.
- [7] Praveen G N, Reddy J N. Nonlinear transient thermoelastic analysis functionally graded ceramic metal plates[J]. International Journal of Solids and Structures, 1998, 35(33): 4457—4476.
- [8] Tauchert T R. Thermally induced flexure, buckling and vibration of plates[J]. Applied Mechanics Reviews, 1991, 48(8): 347—359.
- [9] Khdir A A, Ragab M D, Reddy J N. Thermal effects on the response of cross ply laminated shallow shells[J]. International Journal of Solids and Structures, 1992, 29(5): 653—667.
- [10] 钱伟长. 变分法及有限元[M]. 北京: 科学出版社, 1980, 535—565.

Thermoelastically Coupled Axisymmetric Nonlinear Vibration of Shallow Spherical and Conical Shells

WANG Yong_gang¹, DAI Shi_liang²

(1. Department of Applied Mechanics, China Agricultural University,
Beijing 100083, P. R. China;

2. Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University,
Beijing 100084, P. R. China)

Abstract: The problem of axisymmetric nonlinear vibration for shallow thin spherical and conical shells when temperature and strain fields are coupled is studied. Based on the large deflection theories of von Kármán and the theory of thermoelasticity, the whole governing equations and their simplified type are derived. The time_spatial variables are separated by Galerkin's technique, thus reducing the governing equations to a system of time_dependent nonlinear ordinary differential equation. By means of regular perturbation method and multiple_scales method, the first order approximate analytical solution for characteristic relation of frequency vs amplitude parameters along with the decay rate of amplitude are obtained, and the effects of different geometric parameters and coupling factors as well as boundary conditions on thermoelastically coupled nonlinear vibration behaviors are discussed.

Key words: shallow spherical shell; shallow conical shell; thermoelastically coupled; nonlinear vibration; perturbation method