

文章编号: 1000-0887(2005) 09-1027-06

三维数值流形方法的理论研究^{*}

骆少明, 张湘伟, 吕文阁, 姜东茹

(广东工业大学 机电工程学院, 广州 510090)

(本刊编委张湘伟来稿)

摘要: 在二维数值流形方法的基础上, 对三维数值流形进行了理论研究. 研究了三维覆盖位移函数, 进行了三维数值流形的力学分析, 给出了三维流形单元的刚度矩阵, 详细推导了三维数值流形的 Hammer 积分及剖分规则, 系统地研究三维数值流形的理论体系与数值实现方法. 作为数值算例, 给出了相应的悬臂梁的计算结果, 计算结果表明算法的精度和计算效益较高.

关键词: 数值流形方法; 三维分析; 有限覆盖

中图分类号: O176 **文献标识码:** A

引 言

数值流形方法是利用“流形”的有限覆盖技术建立起来的一种最新数值方法^[1,2]. 所谓“流形”是把许多个重叠在一起的区域连接在一起, 去覆盖全部材料体. 数值流形方法用有限覆盖系统把连续的和非连续的变形问题分析融为一体, 统一解决了有限元、非连续变形分析 (DDA) 和解析法的计算问题, 与之相比, 有限元方法只是它的一个特例. 目前, 二维数值流形已经有一些研究, 并且成功地运用于某些工程领域中^[3~5], 本文在二维数值流形方法的基础上, 系统研究三维数值流形的理论体系与数值实现方法, 力图建立起较为完善的三维数值流形求解体系.

1 三维数值流形的覆盖系统

数学覆盖网格是与结构体无关、但必须覆盖全部材料区域的六面体网格. 数学网格的每个交点就是相应的数学覆盖的中心点, 分别记为数学覆盖 1, 2, 3, ..., 36 (图 1)

物理覆盖实际上就是材料边界与数学覆盖的交集. 也即: 结构的物理网格(包括材料边界、裂缝等)再进一步剖分数学覆盖为多个不连续的区域.

三维流形单元的节点是物理覆盖的公共部分. 材料体与数学覆盖的交集形成了分析域上的物理覆盖系统, 而三维流形单元则是各个物理覆盖的公共区或交集. 在三维六面体网格的情形下, 三维流形单元必是 8 个物理覆盖的公共区. 以图 1 中的单元 6 为例, 单元 6 的三维流形单元是 8 个物理覆盖的交集; 图 4 是单元 6 的 8 个数学覆盖的交集.

* 收稿日期: 2003_08_18; 修订日期: 2005_05_27

基金项目: 国家自然科学基金项目(10272033)

作者简介: 骆少明(1966—), 男, 湖北嘉鱼人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_20_37626235; Fax: + 86_20_37626231; E_mail: smluo@gdut.edu.cn).

2 三维覆盖位移函数

2.1 三维可能的覆盖位移函数^[6]

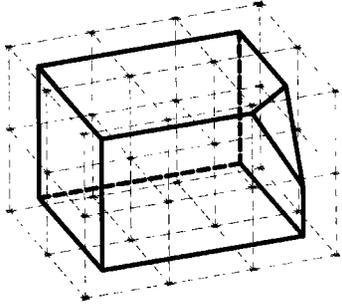


图1 物体的覆盖系统

在覆盖 U_i 上, $(u_i(x, y, z), v_i(x, y, z), w_i(x, y, z))$ 是点 (x, y, z) 在 x, y 和 z 方向上的位移. 覆盖位移函数 $u_i(x, y, z), v_i(x, y, z)$ 和 $w_i(x, y, z)$ 可以表示成级数形式

$$u_i = \begin{cases} u_i(x, y, z) \\ v_i(x, y, z) \\ w_i(x, y, z) \end{cases} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}_i \quad (i = 1, 2, \dots, 8), \quad (1)$$

\mathbf{S} 是基本级数, \mathbf{D}_i 是物理覆盖自由度(广义位移). 通常取为覆盖 U_i 上的常量函数或完全一阶近似函数.

整个物理覆盖系统上的总体位移函数可根据覆盖位移

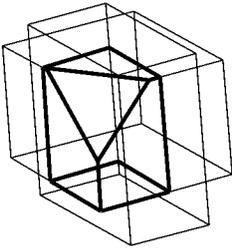


图2 第20个物理覆盖和数学覆盖

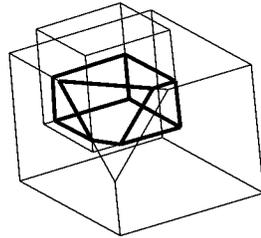


图3 单元6的覆盖

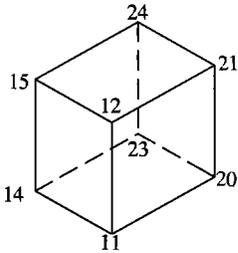


图4 单元6的8个数学覆盖交集

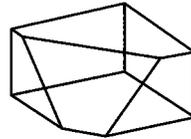


图5 单元6的8个物理覆盖交集

函数和权函数 $N_i(x, y, z)$ 来确定. 整个材料体的总体位移函数 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 和 $w(x, y, z)$ 为:

$$\begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases} = \sum_{i=1}^q N_i(x, y, z) \begin{cases} u_i(x, y, z) \\ v_i(x, y, z) \\ w_i(x, y, z) \end{cases}, \quad (2)$$

$N_i(x, y, z)$ 为覆盖权函数, 它满足:

$$N_i(x, y, z) \geq 0 \quad (x, y, z) \in U_i, \quad N(x, y, z) = 0 \quad (x, y, z) \notin U_i,$$

$$\sum_{(x, y, z) \in U_j} N_j(x, y, z) = 1.$$

3 三维数值流形方法的力学分析

3.1 三维流形单元的刚度矩阵

对一般覆盖的流形方法, 流形单元是物理覆盖相交的公共区域。刚度矩阵的积分域是整个流形单元 e , 它是几个物理覆盖 $U_{0(1)}, U_{0(2)}, \dots, U_{0(q)}$ 的交集。由单元 e 的弹性应力的应变能 Π_e 为

$$\Pi_e = \iiint_V \frac{1}{2} (\varepsilon_x \alpha_x + \varepsilon_y \alpha_y + \varepsilon_z \alpha_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx}) dx dy dz, \quad (3)$$

式中积分覆盖单元的整个材料体积为 V , 则

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \iiint_V \frac{1}{2} (\varepsilon_x \alpha_x + \varepsilon_y \alpha_y + \varepsilon_z \alpha_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx}) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D}_{(e)}^T \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{(e)} \mathbf{D}_{(e)} dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{D}_{(e)}^T (\mathbf{V} \mathbf{B}_{(e)}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{(e)}) \mathbf{D}_{(e)}, \end{aligned} \quad (4)$$

因此, 单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_{e(r)e(s)} = \mathbf{V} \mathbf{B}_{e(r)}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{e(s)}, \quad r, s = 1, 2, 3, \dots, q. \quad (5)$$

3.2 三维流形单元的点应力矩阵与体应力矩阵

点荷载力 $(F_x, F_y, F_z)^T$ 作用在单元 e 中的点 (x_0, y_0, z_0) 上, 它是 q 个覆盖 $U_{e(1)}, U_{e(2)}, \dots, U_{e(q)}$ 的交集。力作用点 (x_0, y_0, z_0) 上的位移是 $(u(x_0, y_0, z_0), v(x_0, y_0, z_0), w(x_0, y_0, z_0))$ 。

点荷载引起的势能 Π_p 是

$$\Pi_p = - (F_x u(x_0, y_0, z_0) + F_y v(x_0, y_0, z_0) + F_z w(x_0, y_0, z_0)).$$

点荷载矩阵为:

$$\mathbf{F}_{e(r)} = [T_{e(r)}(x_0, y_0, z_0)]^T [(F_x \quad F_y \quad F_z)^T], \quad r = 1, 2, 3, \dots, q, \quad (6)$$

其中 $[T_{e(r)}(x_0, y_0, z_0)]^T = [v(x_0, y_0, z_0) \quad u(x_0, y_0, z_0) \quad w(x_0, y_0, z_0)]$ 。

同理, 也可求出体荷载矩阵为:

$$\mathbf{F}_{e(r)} = \iiint_V [T_{e(r)}(x, y, z)]^T dx dy dz (F_x \quad F_y \quad F_z)^T, \quad r = 1, 2, 3, \dots, q. \quad (7)$$

4 三维数值流形单元的 Hammer 积分

4.1 Hammer 积分

在形成刚度矩阵及计算载荷列阵时, 都涉及到对单元的积分。流形方法的积分在流形单元上进行, 由于结构形状的任意性, 三维流形单元的积分区域可能为任意的多面体。可以通过单纯形积分来实现对流形单元的积分。但是, 由于单纯形积分的形式十分复杂, 不便于编制通用程序, 因此本文引入 Hammer 积分^[7,8]。

以图 6 所示的流形单元 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 为例来说明单元的积分运算过程。流形单元的积分区域 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 可以分解为 6 个四面体 $P_2P_3P_4P_7, P_1P_2P_4P_7, P_1P_2P_6P_7, P_1P_4P_7P_8, P_1P_6P_7P_8, P_1P_6P_8P_5$, 如图 6 所示, 对每个四面体积分区域可以采用 Hammer 积分来进行数值积分。

设单元上的被积函数为 $g(x, y, z)$, 则其在流形单元上的 Hammer 积分表达式为

$$\begin{aligned} G &= \sum_{s=1}^N \left[\int_V g(x, y, z) dv \right] = \sum_{s=1}^N \left[\int_V g'(L_i, L_j, L_m) dv \right] = \\ &= \sum_{s=1}^N \left[\Delta_s \sum_{k=1}^M \omega^{(k)} g'(a^{(k)}) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

式中, Δ_s 为 x, y, z 坐标系中被积区域的第 s 个三角形的体积; N 为流形单元积分区域分解成的四面体的个数; M 为求积基点的数目; $\omega^{(k)}$ 为求积系数(相当于加权系数); $a^{(k)}$ 为积分点的坐标; g' 为面积坐标下的被积函数。

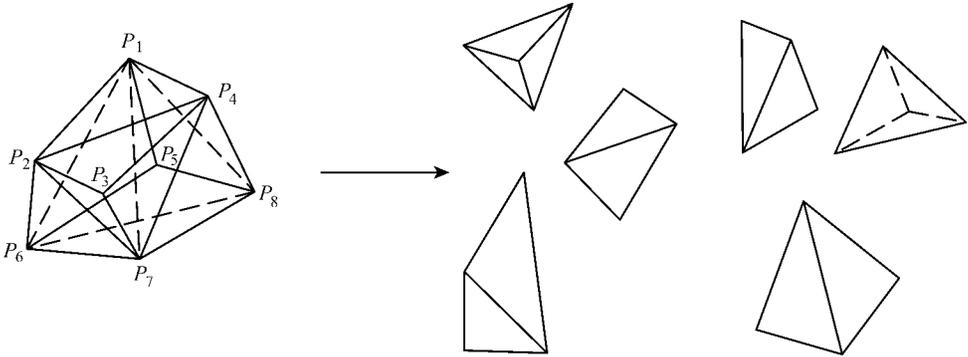


图6 1个六面体流形单元及其产生的6个四节点四面体单元

在三维四面体单元中, 自然坐标是体积坐标, 积分具有如下形式:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{L_2-L_1} F(L_1, L_2, L_3, L_4) dL_3 dL_2 dL_1$$

三维四面体的 Hammer 积分可以表示为:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \int_0^{L_2-L_1} F(L_1, L_2, L_3, L_4) dL_3 dL_2 dL_1 = A_1 F\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) + B_4 \{ F(\alpha, \beta, \beta, \beta) + F(\beta, \alpha, \beta, \beta) + F(\beta, \beta, \alpha, \beta) + F(\beta, \beta, \beta, \alpha) \}, \quad (9)$$

采用式(9)的表达形式可以很方便地编制统一地计算机程序进行数值积分。

4.2 剖分规则

Hammer 积分在四面体上进行积分, 要把多面体划分为若干个四面体, 划分规则如下:

- 1) 以第一个点为公共顶点 P_1 ;
- 2) 从多面体的所有边界面上找出点 P_1 不在其上的面, 组成面的集合 $\{F\}$, 其中的每个面分别记为 F_1, F_2, \dots, F_n ;
- 3) 把每个面 F_i 划分为三角形, 分别记为 $F_{i1}, F_{i2}, \dots, F_{im}$;
- 4) 每个三角形和点 P_1 就组成了一个四面体;
- 5) 由以上第2)步和第3)步所得的所有三角形和点 P_1 组成的四面体就是原多面体剖分后的所有四面体。

5 数值算例

如图7所示悬臂梁, 末端受有垂直向下的集中力 $P = 4 \times 10^4 \text{ N}$; 厚度 $t = 12 \text{ cm}$, 长 $L = 48 \text{ cm}$, 宽 $h = 12 \text{ cm}$; 按平面应力问题分析。材料的弹性模量 $E = 3 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$; 泊松比 $\mu = 0.25$, 不计自重。

计算网格采用如下剖分方案: 4个流形单元, 20个物理覆盖结点, 利用数值流形方法零阶、全一阶覆盖位移函数分别进行计算。从图8所示的沿悬臂梁轴线 z 向位移结果可以看出, 采用零阶覆盖函数的流形方法, 其 z 向位移与有限元法8节点六面体等参元结果相同, 与解析解

偏离甚远; 而采用全一阶近似覆盖函数的流形方法, 其位移解的精度与 20 节点六面体等参元相同, 基本上落在了解析解上。由此可见, 这种 8 节点流形单元的求解效率是很高的, 即使采用图 7 所示的较粗网格的单元划分也能得到接近精确的解答。

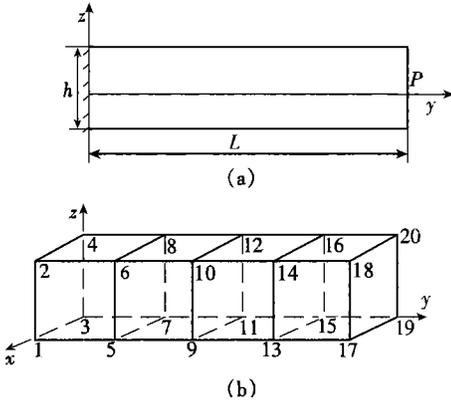


图 7 悬臂梁

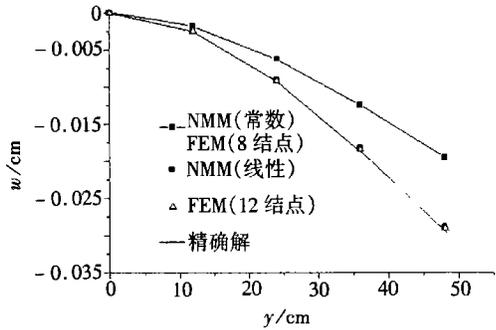


图 8 悬臂梁轴线 z 向位移

从计算时间上看, 该 8 节点流形单元在物理覆盖上采用全一阶近似覆盖函数时的单元自由度是 $8 \times 12 = 96$, 比 20 节点六面体等参元的 $20 \times 3 = 60$ 单元自由度要多些, 但是前者采用 $2 \times 2 \times 2$ 高斯积分, 后者采用 $3 \times 3 \times 3$ 高斯积分, 故综合各种因素, 两者的计算时间是相当的。实际的计算时间比较也与上面的分析符合。

6 结 论

本文提出的方法精度和效率都是较高的。对于大型结构, 该 8 节点流形单元在物理覆盖上采用全二阶或更高阶的近似覆盖函数还能够进一步提高数值求解的精度, 但是由于单元自由度数和高斯积分阶数的增加, 其计算时间上的开销也很大。这时可以混合使用各阶覆盖函数的办法来提高效率, 在应力应变剧烈变化或出现应力梯度的地方使用高阶覆盖函数, 其它地方采用零阶或一阶覆盖函数, 而高、低阶覆盖位移函数的过渡是自然、平滑的, 不必采取任何措施。这样的处理办法能够得到满意的求解精度和求解效率, 比有限元法具有了更多的简洁性和优越性。

[参 考 文 献]

- [1] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民译. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [2] 王芝银, 李云鹏. 数值流形方法及其研究进展[J]. 力学进展, 2003, 33(2): 261—266.
- [3] 王芝银, 李云鹏. 数值流形方法中的几点改进[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(1): 33—36.
- [4] 朱以文. 岩石大变形分析的增量流形方法[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(1): 1—5.
- [5] 王水林, 葛修润. 四个物理覆盖构成一个单元的流形方法及应用[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(3): 312—316.
- [6] 彭自强, 葛修润. 数值流形方法中覆盖函数选用的建议[J]. 岩土力学, 2004, 25(4): 624—627.
- [7] 姜冬茹, 骆少明. 三维数值流形方法及其积分区域的确定算法[J]. 汕头大学学报, 自然科学版, 2002, 17(3): 29—36.
- [8] 蔡永昌, 张湘伟. 流形方法的矩形覆盖系统及其全自动生成算法[J]. 重庆大学学报, 2001, 24(1): 42—46.

Theoretical Study of Three_Dimensional Numerical Manifold Method

LUO Shao_ming, ZHANG Xiang_wei, LÜ Wen_ge, JIANG Dong_ru
(Faculty of Mechanical &Electronical Engineering , Guangdong Unviersity of Technology ,
Guangzhou 510090, P. R . China)

Abstract: The three_dimensional Numerical Manifold Method(NMM) is studied on the basis of two_dimensional numerical manifold method. The three_dimensional cover displacement function is studied. The mechanical analysis and Hammer integral method of three_dimensional numerical manifold method are put forward, the stiffness matrix of three_dimensional manifold element are derived and the dissection rules are given. The theoretical system and numerical realizing method of three_dimensional numerical manifold method are systematically studied. As an example, the cantilever with load on the end is calculated, the results show that the precision and efficiency is agreeable.

Key words: numerical manifold method; three_dimensional analysis; finite cover