

文章编号: 1000-0887(2005 09-1055-06)

# 隐式极限状态方程可靠性研究

王燕萍, 吕震宙, 岳珠峰

(西北工业大学 航空学院 120 信箱, 西安 710072)

(本刊编委岳珠峰来稿)

**摘要:** 针对非线性隐式极限状态方程失效概率的计算,提出了精度更高的改进的均值二次法,并提出了与响应面法相结合的改进均值法,给出了所提方法的实现策略。具体算例表明,改进的均值二次法的精度较改进的均值一次法有明显提高,而改进均值法与响应面法结合后的精度改善更为明显,并且这种结合方法对响应面法的插值点位置不敏感,插值点在较大范围内变化均能得到稳健的高精度结果,从而说明所提方法的有效性。

**关键词:** 可靠性; 响应面法; 失效概率  
**中图分类号:** TB114.3      **文献标识码:** A

## 引 言

针对显式极限状态方程失效概率的计算,目前已经有非常多的成熟方法。但在很多工程问题中,我们常常不知道输入量和输出量的解析关系,而只知道它们的数值关系,也即极限状态方程是隐式关系。计算这种隐式方程失效概率最直接的方法就是 Monte Carlo 法,然而此方法对于小概率事件的计算工作量是不能为工程设计人员所接受。目前计算隐式极限状态方程失效概率采用的较多的方法是响应面法(response surface method: RSM<sup>[1~3]</sup>)和改进的均值一次法(advanced mean value first order: AMVFO)。AMVFO 方法在计算隐式极限状态方程的失效概率时,是将极限状态函数在均值点处展开成一次式,这种方法对于非线性问题<sup>[4]</sup>精度不高,于是在本文中将此方法推广为在均值点展开成二次式的形式(advanced mean value second order: AMVSO),显然这种推广计算工作量将会增加,但其计算精度也提高了很多。传统的 RSM 是将真实的隐式极限状态函数用一个不含交叉项的二次插值多项式来代替,通过选择合适的插值点来确定插值多项式中的待定常数,并通过迭代运算来保证解的精度。这种传统的响应面法的计算精度明显要受插值点位置的影响,并且插值函数的形式与原真实函数的近似程度也将对计算精度产生较大影响。为此在文中将响应面法与改进的均值一次法或改进的均值二次法相结合。利用响应面法所求得近似设计点,来得到精度更好且稳定的失效概率值。

收稿日期: 2003\_08\_25; 修订日期: 2005\_04\_19

基金项目: 国家航空基金资助项目(00B53010); 国家航天基金资助项目(2003CH0502, N5CH0001); 陕西省自然科学基金资助项目(2003CS0501)

作者简介: 王燕萍(1981),女,河南 阳市人,硕士;

吕震宙(1966),女,湖北黄石人,教授,博士生导师(联系人).Tel: + 86\_29\_88460480; E\_mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn

## 1 改进的均值二次法

设所讨论的问题包含的基本随机变量为  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , 为讨论方便起见, 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  服从独立的正态分布, 即  $x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \dots, n$ ;  $\mu_i$  和  $\sigma_i$  分别为  $x_i$  的均值和均方差, 隐式极限状态函数为  $g(x)$  类似于改进的均值一次法, 将  $g(x)$  在均值点  $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$  处展开成如下形式

$$g(x) = g(\mu) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{\mu} (x_i - \mu_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mu} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) + H_2(x) = g_2(x) + H_2(x), \quad (1)$$

其中  $g_2(x)$  包含一次项和二次项,  $H_2(x)$  为除一次项和二次项以外的高次项

为了求  $g_2(x) < 0$  时的失效概率  $p_f$ , 可以采用以下步骤:

1 给定  $g_2(x)$  不同的值  $g_2^{(j)}, j = 1, 2, \dots, J$  即令

$$g_2(x) = g_2^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (2)$$

2 对应于(2)式中的第  $j$  个极限状态方程, 可以采用已有的可靠性方法求得其相应的设计点  $x_D^{(j)}$  和可靠度指标  $\beta^{(j)}$  若不考虑高次项的修正, 以点  $(g_2^{(j)}, (-\beta^{(j)}))$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ; 为标准正态分布函数) 绘出的曲线作为  $g(x) < g_2^{(j)}$  的近似累积失效概率曲线的方法, 则称为原始的均值二次法(mean\_value\_second\_order (MVS0)

3 为了考虑高次项的影响, 我们将根据  $g(x)$  与  $x$  之间的数值关系求得(2)式每个极限状态方程设计点  $x_D^{(j)}$  处的真实极限状态值  $g(x_D^{(j)}), j = 1, 2, \dots, J$  则有下列关系成立

$$(-\beta^{(j)}) = P\{g_2(x) < g_2^{(j)}\}, \quad j = 1, 2, \dots, J, \quad (3)$$

$$(-\beta^{(j)}) = P\{g(x) < g(x_D^{(j)})\}, \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (4)$$

以点  $(g(x_D^{(j)}), (-\beta^{(j)}))$  绘出的曲线即是原隐式极限状态方程考虑了高次项修正后的累积失效概率曲线, 该方法就是改进的均值二次法

## 2 与响应面法相结合的改进均值法

对于改进均值法来说, 不论是改进的均值一次法还是改进的均值二次法, 展开点的选取对于计算结果的精度将有较大的影响 展开点越接近原始极限状态方程的设计点, 则计算结果越准确, 因此我们可以采用响应面法先确定一个原极限状态方程的近似设计点, 然后再以所求的近似设计点代替均值法中的均值点, 进行一次或二次展开, 并加高次项进行修正, 则可以进一步提高计算精度 与响应面法相结合的改进均值法的基本步骤如下所示:

1 确定响应面插值函数  $g(x)$  的形式为不含交叉项的二次多项式, 即

$$g(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 \quad (5)$$

2 首次确定响应面函数中的  $2n+1$  个待定常数时, 以均值点  $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$  为插值中心, 并另外在第  $i$  个坐标轴方向上分别偏离插值中心点  $f_i$  ( $f$  为插值系数) 的距离, 选择另外  $2n$  个插值点, 便可唯一确定(5)式中的  $2n+1$  个常数

3 求出响应面极限状态方程  $g^{(i)}(x) = 0$  的设计点  $x_D^{(i)} = \{x_{D1}^{(i)}, x_{D2}^{(i)}, \dots, x_{Dn}^{(i)}\}$  (上标  $(i)$  表示第  $i$  次迭代的结果

4 以点  $(x_{M1}^{(j)}, g(x_{M1}^{(j)}))$  和点  $(x_{D1}^{(j)}, g(x_{D1}^{(j)}))$  进行线性插值, 插得  $g(x_M^{(j)})$  近似为 0 的  $x_M^{(j)} = \{x_{M1}^{(j)}, x_{M2}^{(j)}, \dots, x_{Mn}^{(j)}\}$ , 其第  $j$  个坐标如下所示:

$$x_{Mj}^{(j)} = x_{Dj}^{(j)} + (x_{Dj}^{(j)} - x_{Mj}^{(j)}) \frac{g(x_{Mj}^{(j)})}{g(x_{Dj}^{(j)}) - g(x_{Mj}^{(j)})}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

5 以  $x_M^{(j)}$  作为下一次插值的中心点, 重复步骤 1) ~ 5), 直至前后两次算得的可靠度指标的相对误差满足  $|g(x_M^{(j)}) - g(x_M^{(j-1)})| / |g(x_M^{(j)})| < \epsilon$  ( $\epsilon$  为精度要求) 时, 停止迭代运算

6 设响应面法经过  $k$  次迭代运算后得到了收敛的设计点为  $x_D^{(k)}$ , 以  $x_D^{(k)}$  作为改进均值一次法或改进均值法二次法的展开点, 重复第 2 节中的改进均值二次法的类似的步骤, 即可得到与响应面法相结合的精度更高改进均值法的解

### 3 实例计算

为检验本文所提方法的精度, 我们列举了几个常用来检验响应面法精度的例子。在算例中虽然给出了极限状态方程的解析式, 但在计算时我们只是利用它们的数值关系, 而不利用其解析关系, 也即将它们作为隐式方程来对待

例 1 设某悬臂梁的自振频率为  $f$ , 假定弹性模量  $E$ 、材料密度  $\rho$ 、梁的厚度  $t$  和长度  $L$  为相互独立的正态变量, 各基本随机变量的均值和变异系数如表 1 所示

表 1 基本变量的分布参数

基本变量	$E$	$\rho$	$t$	$L$
均值	$10^7$	$2.5 \times 10^{-4}$	0.98	20.0
变异系数	0.03	0.05	0.05	0.05

与基本随机变量之间的关系为

$$g = 1.016 \sqrt{Et^2 / (\rho L^4)}$$

为检验本文所提方法的效率, 我们分别将用改进的均值二次法 (AMVSO, Monte\_Carlo 法和改进的均值一次法 (AMVFO) 计算得到的结果列于表 2 中。表 2 中列出了极限状态方程为  $g = 360$  时, 由各种方法计算得到的可靠度指标、失效概率及失效概率的相对误差。其中在与响应面法相结合的改进均值法中, 还考虑了当插值系数  $f$  取不同值时对失效概率的影响

表 2 极限状态方程  $g = 360$  时例 1 的结果

方法	$\beta_f$	$P_f$	失效概率相对误差 $e_f$ (%)
Monte_Carlo	2.904 287	0.001 840 52	
AMVFO	2.918 435	0.001 759	4.43
AMVSO	2.918 837	0.001 757	4.54
$f = 1$			
响应面法	2.811 789	0.002 463	33.8
与响应面法相结合的改进均值法	2.904 896	0.001 836 94	0.19
$f = 2$			
响应面法	2.811 923	0.002 462	33.8
与响应面法相结合的改进均值法	2.904 937	0.001 836 7	0.21
$f = 3$			
响应面法	2.807 471	0.002 497	35.7
与响应面法相结合的改进均值法	2.904 948	0.001 836 64	0.21

从表 2 中可以得到: 1) 用传统的迭代响应面法计算结构的失效概率与由 Monte\_Carlo 法得到的精确解相比相对误差较大, 本例中大于 30%。但是在响应面法的基础上, 再结合改进的

均值法来计算结构的失效概率时的相对误差就非常小,不大于 0.21%。随着插值系数  $f$  的增加时,响应面法结果的误差略有增加;而与响应面法相结合的改进均值法的结果却不受  $f$  的影响。因此,将响应面法与改进均值法结合不但计算精度提高了,而且还有一定的稳定性。

例 2 设非线性极限状态方程为

$$g(x, y) = \exp[0.2x + 6.2] - \exp[0.47y + 5.0],$$

假定基本变量  $x, y$  是相互独立的且服从标准正态分布。图 1 给出了 Monte\_Carlo 法、均值一次法(MVFO)、改进的均值一次法(AMVFO)、均值二次法(MVSO)和改进的均值二次法(AMVSO)的计算结果。

表 3  $g(x, y) = 0$  时例 2 的结果

方法		$\mu_f$	$P_f$	失效概率相对误差 $e_f$ (%)
$f = 0.5$	Monte_Carlo	2.348 036	0.009 436 32	
	AMVFO	2.760 073	0.002 889	69.4
	AMVSO	2.361 806	0.009 093	3.64
	响应面法	2.348 403	0.009 427	0.1
	与响应面法相结合的改进均值法	2.348 029	0.009 436 52	0.002
	$f = 1$	响应面法	2.345 766	0.009 494
与响应面法相结合的改进均值法		2.348 017	0.009 436 82	0.005
$f = 2$	响应面法	2.351 232	0.009 356	0.85
	与响应面法相结合的改进均值法	2.348 036	0.009 436 32	0
$f = 3$	响应面法	2.357 394	0.009 202	2.48
	与响应面法相结合的改进均值法	2.348 036	0.009 436 34	0.000 2
$f = 4$	响应面法	2.369 804	0.008 899	5.69
	与响应面法相结合的改进均值法	2.348 036	0.009 436 34	0.000 2

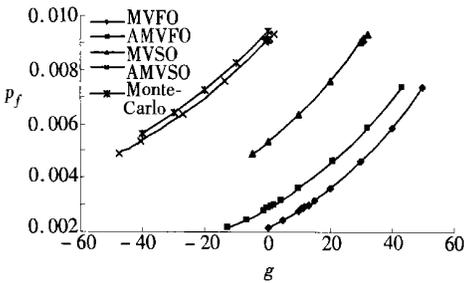


图 1 例 2 的计算结果

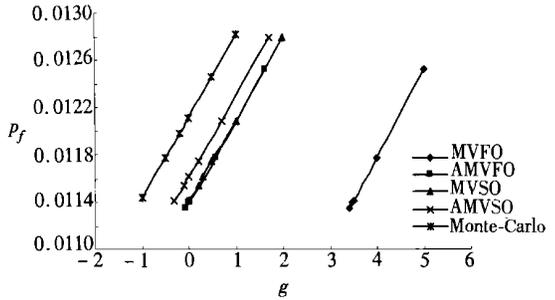


图 2 例 3 的计算结果

表 4 基本变量的分布参数

变量	$S_y$	$F$	$A$
均值	600	1 000	2
标准差	30.0	33.0	0.1

从图 1 中可以看出改进的均值二次法与 Monte\_Carlo 法求出的精确解最接近。表 3 中列出了极限状态方程为  $g(x, y) = 0$  时,由各种方法计算得到的可靠度指标、失效概率和失效概率的相对误差。

从表 3 中可以看出:1 改进的均值二次法计算的失效概率相对误差只有 3.64%,而改进

的均值一次法计算的失效概率相对误差却有 69.4%。与响应面法相结合的改进均值法可以大大提高解的精度,传统的迭代响应面法计算结果的精度受插值系数  $f$  影响,而响应面法与改进均值法相结合后的计算结果受  $f$  影响很小

表 5  $g(S_y, F, A) = 0$  时例 3 的结果

方法		$P_f$	失效概率相对误差 $e_f$ (%)	
	Monte_Carlo	2.253 464	0.012 114 92	
	AMVFO	2.276 974	0.011 394	5.95
	AMVSO	2.269 697	0.011 613	4.14
$f = 1$	响应面法	2.269 708	0.011 613	4.14
	与响应面法相结合的改进均值法	2.269 256	0.011 626 36	4.03
$f = 2$	响应面法	2.269 729	0.011 612	4.15
	与响应面法相结合的改进均值法	2.269 238	0.011 626 9	4.02
$f = 3$	响应面法	2.269 904	0.011 607	4.19
	与响应面法相结合的改进均值法	2.269 232	0.011 627 08	4.02

例 3 极限状态方程为

$$g(S_y, F, A) = S_y - F/A = 0,$$

假定  $S_y, F$  和  $A$  是相互独立的随机变量,且服从正态分布,它们的均值和标准差列于表 4 中。结算结果列于图 2 和表 5 中

例 4 极限状态方程为

$$g(S_y, F, A) = S_y - F/A = 0,$$

假定  $F$  和  $A$  是相互独立的随机变量,且服从正态分布,将  $S_y$  视为常量,它们的均值和标准差列于表 6 中。结算结果列于图 3 和表 7 中

表 6 基本变量的分布参数

变量	$S_y$	$F$	$A$
均值	570	1 000	2
标准差		33.0	0.1

表 7  $g(S_y, F, A) = 0$  时例 4 的结果

方法		$P_f$	失效概率相对误差 $e_f$ (%)	
	Monte_Carlo	2.126 707	0.016 722 18	
	AMVFO	2.129 256	0.016 617	0.63
	AMVSO	2.125 583	0.016 769	0.28
$f = 1$	响应面法	2.125 622	0.016 767	0.27
	与响应面法相结合的改进均值法	2.126 707	0.016 722 18	0
$f = 2$	响应面法	2.125 628	0.016 767	0.27
	与响应面法相结合的改进均值法	2.126 707	0.016 722 18	0
$f = 3$	响应面法	2.125 748	0.016 762	0.24
	与响应面法相结合的改进均值法	2.126 707	0.016 722 18	0

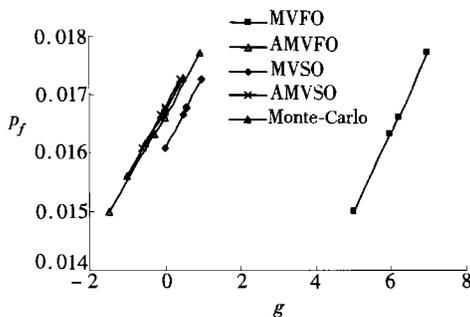


图 3 例 4 的计算结果

在例3和例4中,我们可以得到类似于例1和例2的结论。从图2和图3中可以明显地看出,在4种方法中改进的均值二次法的相对误差最小。此外,与响应面法相结合的改进均值法的相对误差明显地减小,而且计算结果不受插值系数的影响。

## 4 结 论

本文所提出的2种解决隐式极限状态方程可靠性问题的新方法的物理概念是非常明确的。通过增加展开式的阶数来提高改进的均值法对非线性问题的适应性。用近似的设计点代替均值点作为展开点,使得与响应面法相结合的改进均值法的计算精度大大提高了,并且与响应面法相结合的改进均值法的一个重要特点在于计算结果不受插值系数的影响。具体的算例充分说明了所提方法的有效性和合理性。

### [参 考 文 献]

- [1] Faravelli L. Response surface approach for variability analysis[J]. *J. Engng. Mech., Div., ASCE*, 1989, **115**(2): 2763-2781.
- [2] Bucher C G, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problem[J]. *Structural Safety*, 1990, **7**(1): 57-66.
- [3] Rajashekhara M R, Ellingwood B R. A new look at the response surface approach for reliability analysis[J]. *Structural Safety*, 1993, **12**(3): 205-220.
- [4] Wu Y T, Wirching P H. New algorithm for structural reliability estimations[J]. *J. Engng. Mech., Div. ASCE*, 1987, **113**(9): 1319-1336.

## Reliability Analysis for Implicit Limit State Equation

WANG Yan\_ping, L. Zhen\_zhou, YUE Zhu\_feng  
(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University,  
Xi'an 710072, P. R. China)

**Abstract:** In order to obtain the failure probability of the implicit limit state equation accurately, advanced mean value second order (AMVSO) method was presented, and advanced mean value (AMV) in conjunction with the response surface method (RSM) was also presented. The implementations were constructed on the basis of the advanced mean value first order (AMVFO) method and the RSM. The examples show that the accuracy of the AMVSO is higher than that of the AMVFO. The results of the AMV in conjunction with the RSM are not sensitive to the positions of the sampling points for determining the response surface equation, which illustrates the robustness of the presented method.

**Key words:** reliability; response surface method; failure probability