

文章编号: 1000-0887(2005) 09-1061-06

饱和土体自重固结问题的相似解^{*}

谢新宇, 张继发, 曾国熙

(浙江大学 岩土工程研究所, 杭州 310027)

(陈正汉推荐)

摘要: 采用了比以往更为普遍的土体物理力学性质假设, 利用 Hopf-Cole 变换方法求得了厚层土体在自重应力作用下的非线性固结问题的完整解析解答。通过试验数据, 将该解答与传统的大应变非线性固结理论解答和基于实验数据的有限元数值解答相比较, 结果表明, 该解答能够更好地描述土体的实际固结过程, 而由线性化固结理论所得的解答对固结过程中的沉降量和固结度的估计偏小。

关键词: 自重固结; Bugeis 方程; 大应变; 李群变换; 相似解

中图分类号: TU441+.8 **文献标识码:** A

引 言

尾矿池、水坠坝、湖泊疏浚以及淡水河流在入海口沉积等一系列的工程环境问题中, 都必须处理新近堆积和沉积土的自重固结与沉积问题, 它是岩土工程中的重要课题之一。

一维非线性大应变固结方程的求解, 由于问题的复杂性, 要得到其解析解答比较困难。对于这类强非线性偏微分方程, 通常的做法是使方程线性化之后再进一步求解^[1], 但是, 此时的假设一般与实际的土体性质相去甚远^[2]。在近似解析解的研究方面, Babu^[3]给出了一些特殊边界条件下的摄动解答; Parlange^[4]则应用 Picard 叠代法来求解; 另外, Brutsaert 和 Weisman^[5]应用优化法求解了更具定性意义的解答; Philip^[6]详细论述了该类方程在土体水分传输问题上的应用; 实际上, 摄动法、叠代法和优化法所得的解答具有等价性。李冰河等^[7]则采用分段线性化的方法研究土体一维非线性固结性态。

本文作者采用李群变换方法, 通过固结方程的对称性构造出相似变量, 对一维非线性大应变固结方程进行解析求解, 得到了不考虑土体自重的解析解答^[8]和半无限空间上的解析解答^[9]。本文将采用具有普遍性的土性参数假定, 求解有限域上考虑土体自重的一维大应变固结解析解答。

1 问题的模型与假设

分析模型如图 1 所示, 假定地基双面排水。对于自重固结问题, 无论是物质描述还是空间

* 收稿日期: 2003_04_29; 修订日期: 2005_05_08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50049005)

作者简介: 谢新宇(1969—), 男, 浙江乐清人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86_571_87952163; Fax: + 86_571_87952165; E_mail: xiexinyu@zju.edu.cn)。

描述的控制方程都是适用的。这里以物质描述的 Gibson 方程^[1]为例加以求解:

$$\pm \left[\frac{\gamma_s}{\gamma_f} - 1 \right] \lambda(e) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left[g(e) \frac{\partial e}{\partial z} \right] + \frac{\partial e}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

其中

$$g(e) = - \frac{1}{\gamma_f} \frac{k(e)}{1+e} \frac{d\sigma'}{de}, \quad (2)$$

$$\lambda(e) = \frac{d}{de} \left(\frac{k(e)}{1+e} \right), \quad (3)$$

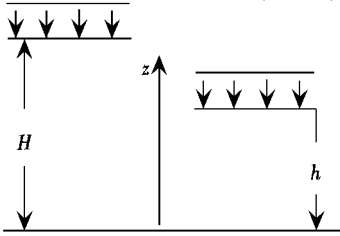


图 1 分析模型示意图

式中, γ_s 、 γ_f 、 e 、 z 、 $k(e)$ 和 σ' 分别为土颗粒的容重、水的容重、孔隙比、物质描述的空间变量、随孔隙比变化的渗透系数和有效应力。

为了求得其解析解答, Gibson 等假定 $g(e)$ 为常数。对于某些情况, 这是较为合理的。坐标方向与重力方向相反时, 即有:

$$- \left[\frac{\gamma_s - \gamma_f}{\gamma_f} \right] \frac{d}{de} \left(\frac{de}{d\sigma'} \right) \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial e}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

但是, 同时假定 $\lambda(e)$ 为常数, 则与大多数土体的性质差异很大。因为, 这一假定意味着孔隙比的对数与有效应力呈线性关系, 而用这一假设拟合实验结果时, 往往误差很大^[1]。因此, 为了更好地模拟土体压缩系数在固结过程中的变化, 采用如下较以往更为普通的假设, 以较为广义的曲线形式来拟合有效应力和孔隙比的关系, 即

$$\frac{d}{de} \left(\frac{de}{d\sigma'} \right) = \alpha(e - e_0), \quad (5)$$

式中, α 和 e_0 分别是与土体有关的试验参数和初始孔隙比。

这样式(4)可改写为:

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} - \omega(e - e_0) \frac{\partial e}{\partial z}, \quad (6)$$

其中

$$\omega = \alpha(\gamma_s - \gamma_f) / \gamma_f, \quad (7)$$

$$\tau = gt. \quad (8)$$

对于上下边界都排水的均质土层, 对于瞬时加载问题, 固结的初始和边界条件为

$$e(z, 0) = e_0, \quad (9)$$

$$e(h, t) = e_b, \quad (10)$$

$$e(0, t) = e_b. \quad (11)$$

下边界不排水时有

$$\frac{\partial e}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \frac{\gamma_s - \gamma_f}{(1+e_0)(d\sigma'/de)} \Big|_{z=0}. \quad (12)$$

2 问题的解答

令 $v = e - e_0$, 则有

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \omega v \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (13)$$

初始条件变为

$$v(z, 0) = 0. \quad (14)$$

边界条件为:

$$v(h, t) = e_t - e_0 = v_t, \quad (15)$$

$$v(0, t) = e_b - e_0 = v_b. \quad (16)$$

这样, 将考虑自重的一维大应变固结问题简化为 Burgers 方程^[10], 可采用 Hopf-Cole 变换求解:

$$v = -2\omega \frac{\partial \ln w}{\partial z} = -2\omega \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (17)$$

通过该变换, 式(13)可以被变换为一个线性的抛物型方程来加以求解, 即:

$$-\omega \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0. \quad (18)$$

同时, 通过 Hopf-Cole 变换, 初始条件成为

$$w|_{\tau=0} = c \cdot \exp\left[-\frac{1}{2\omega} \int_0^z v(z, 0) dz\right] = c. \quad (19)$$

而边界条件为

$$w|_{z=h} = w_t(\tau), \quad (20)$$

$$w|_{z=0} = w_b(\tau). \quad (21)$$

对于初值问题, Hopf-Cole 变换能使问题得到很大的简化, 但是对于边值问题, 尤其是非齐次的边值问题, 则需要求解积分方程

$$v(h, \tau) \cdot w(h, \tau) = -2\omega(\partial w(h, \tau)/\partial z), \quad (22)$$

及

$$v(0, \tau) \cdot w(0, \tau) = -2\omega(\partial w(0, \tau)/\partial z). \quad (23)$$

问题(18)~(21)的解答是显然的, 即:

$$w(z, \tau) = U + \frac{2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Gamma_n \sin\left[\frac{n\pi z}{h}\right], \quad (24)$$

其中

$$U = [w_b + (z/h)(w_t - w_b)], \quad (25)$$

$$\Gamma_n = \exp[-\omega\tau\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2], \quad (26)$$

$$A_n = \int_0^h \left\{ c - \left[w_b + \frac{z}{h}(w_t - w_b) \right] \right\} \sin\left[\frac{n\pi z}{h}\right] dz. \quad (27)$$

将(22)和(23)代入(24), 分别有:

$$v(h, \tau) \cdot w(h, \tau) = -\frac{2\omega}{h} \left[(w(h, \tau) - w(0, \tau)) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Gamma_n \frac{n\pi}{h} \right], \quad (28)$$

$$v(0, \tau) \cdot w(0, \tau) = -\frac{2\omega}{h} \left[(w(h, \tau) - w(0, \tau)) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \Gamma_n \frac{n\pi}{h} \right]. \quad (29)$$

(28)与(29)相减, 有:

$$[v(h, \tau) \cdot w(h, \tau) - v(0, \tau) \cdot w(0, \tau)] = [2c - w(h, \tau) - w(0, \tau)] F(n), \quad (30)$$

其中

$$F(n) = -\frac{8\omega}{h} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \Gamma_n. \quad (31)$$

(28)与(29)相加, 有:

$$[v(h, \tau) \cdot w(h, \tau) + v(0, \tau) \cdot w(0, \tau)] = [w(h, \tau) - w(0, \tau)] G(n), \quad (32)$$

其中

$$G(n) = -\frac{8\omega}{h} \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \Gamma_n \quad (33)$$

联合求解式(30)~式(33),即可得到:

$$w(h, \tau) = \frac{c \cdot F(n)[G(n) + v(0, \tau)]}{2v(h, \tau)v(0, \tau) - [v(h, \tau) - v(0, \tau)] \cdot [F(n) - G(n)] + 2F(n)G(n)}, \quad (34)$$

$$w(0, \tau) = \frac{c \cdot F(n)[G(n) - v(h, \tau)]}{2v(h, \tau)v(0, \tau) - [v(h, \tau) - v(0, \tau)] \cdot [F(n) - G(n)] + 2F(n)G(n)}. \quad (35)$$

将式(34)和式(35)代入式(24)~式(27)即可求得式(18)~式(21)的解答,然后由变换式(17)可以得到式(13)~式(16)的解答。最终可以方便地求得式(4)、式(9)~式(11)的解答。

3 算例比较分析

从目前已有的实验数据来看,在需要考虑大应变影响的固结问题中,物质描述中的固结系数为常数的土体极少。所以作为示例,这里初始孔隙比为9,两边界都为排水边界的土层,在自重作用下开始固结时,下边界最终孔隙比变为1。渗透系数、有效应力与孔隙比之间的关系取Townsend等^[11]为了对美国9所高等院校及研究所的不同大变形固结计算程序进行比较而给出的数据,其中有效应力与孔隙比的关系为:

$$\sigma' = 1.083 \times 10^4 e^{-4.456} \quad (\text{kPa}) \quad (36)$$

渗透系数与孔隙比的关系为:

$$k = 1.291 \times 10^{-7} e^{4.65} \quad (\text{m/d}) \quad (37)$$

为了与Gibson等人^[11]的线性化大应变固结方程做相应的比较,在Gibson的线性方程中的常数项的取法遵循“最终沉降量相等”的原则,也就是说,对于具有相同的物理力学性质的土体,不管采用什么样的函数来拟合其性质,最终的沉降量应该是相同的。实际的选取方法为:取某个恒定的孔隙比,由此得到 $\lambda(e)$ 的值(如图2;同时,作为常数的固结系数也通过该孔隙比的值求出)。另外,为了进一步考虑假设(5)的合理程度,在采用试验数据关系(36)的基础上,对式(1)采用了有限元解答。为了使得由数值解所得的最终沉降量与采用其它两种假设所得的结果相等,在3种计算方法中,假设(5)的具体表达式分别为:

1) 在采用试验结果(36)的基础上,运用有限元计算时,由(5)可以得到

$$\lambda(e) = \frac{d}{de} \left(\frac{de}{d\sigma'} \right) = 0.025e^{4.456}. \quad (38)$$

2) 在假设(2)和(5)的基础上所得的固结方程(4)中,得到

$$\lambda(e) = \frac{d}{de} \left(\frac{de}{d\sigma'} \right) = \frac{(e-9)}{10}. \quad (39)$$

3) 在线性化的Gibson方程中,考虑到最终沉降量,由Gibson的方法可得

$$\lambda(e) = \frac{d}{de} \left(\frac{de}{d\sigma'} \right) = 0.343. \quad (40)$$

3种不同条件下计算所得的无量纲化结果如图3至图7所示。图3至图5为3种方法计算得到的物质描述的孔隙比沿无量纲深度的分布随时间因子的变化曲线,图6为时间因子 $T = 0.1$ 时3种方法计算得到的孔隙比沿无量纲深度分布的对比曲线,图7为3种方法计算得到的无量纲土层厚度随时间因子变化曲线。

从以上图中可以发现:3种计算方法得到结果规律性较为一致,但是在固结过程中孔隙比分布存在较大的差别,本文所得出的非线性固结问题的解答更加接近非线性数值计算结果。

4 结 论

本文在比Gibson假设更为普遍的假设条件下,研究了土体在自重作用下大应变固结问题

的完整解析解, 通过与 Gibson 线性化解答和有限元解答的比较, 得出以下结论:

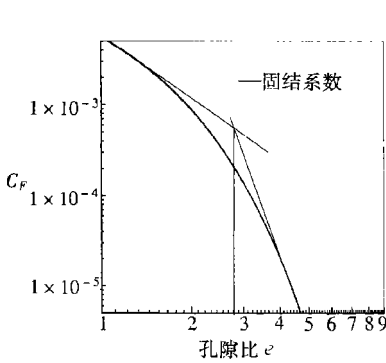


图2 Gibson 方程的线性化方法

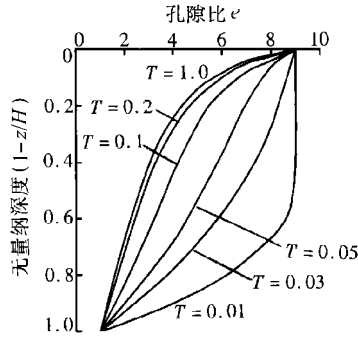


图3 孔隙比沿深度分布(有限元)

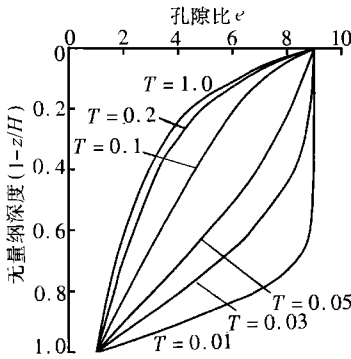


图4 孔隙比沿深度分布(本文解)

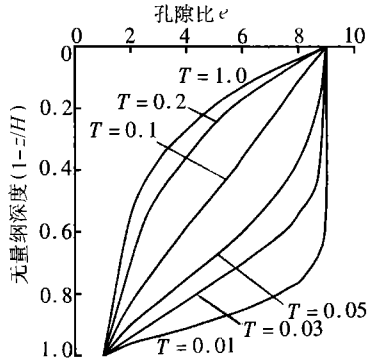


图5 孔隙比沿深度分布(线性化)

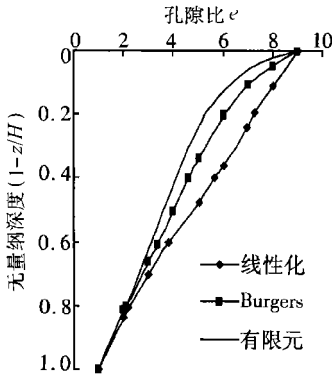


图6 孔隙比沿深度分布 ($T = 0.1$)

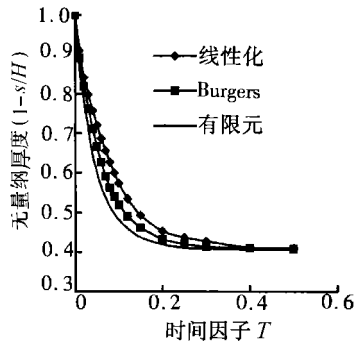


图7 土层厚度与时间因子关系

1) 在固结过程的大多数时间之内, 同一时刻同一土层深度, 由非线性固结理论计算所得的孔隙比要小于由线性固结理论得到的结果; 只有在整个固结过程的最后阶段, 在土层的下部才会出现与此相反的结果。

2) 在最终沉降量相同的条件下, 任意时刻由线性固结理论计算所得的沉降量 s 要小于由非线性固结理论计算所得的结果, 且小于实例中的数值结果。

3) 通过非线性解答、线性解答和数值解答的比较可以看出, 本文所得出的非线性固结问题的解答比较接近实际, 其误差要明显小于线性理论所产生的误差。

[参 考 文 献]

- [1] Gibson R E, Schiffman R L, Cargill K W. The theory of one dimensional soil consolidation of saturated clays, II. Finite non linear consolidation of thin homogeneous layers[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1981, **18**(2): 280—293.
- [2] Duncan J M. Limitations of conventional analysis of consolidation settlement[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1993, **119**(9): 1333—1359.
- [3] Babu D K. Infiltration analysis and perturbation methods: 1. Absorption with exponential diffusivity [J]. Water Resource Research, 1976, **12**(2): 89—93.
- [4] Parlange J Y. Theory of water movement in soils. I. One dimensional absorption[J]. Soil Science, 1971, **111**(2): 134—137.
- [5] Brutsaert W, Weisman R N. Comparison of solutions of a non linear diffusion equation[J]. Water Resources Research, 1970, **6**(9): 642—644.
- [6] Philip J R. Recent progress in the solution of the non linear diffusion equation[J]. Soil Science, 1974, **117**(4): 257—264.
- [7] 李冰河, 谢康和, 应宏伟, 等. 软粘土非线性一维大应变固结分析[J]. 岩土工程学报, 2000, **22**(3): 368—370.
- [8] ZHANG Ji_fa, XIE Xin_yu, ZENG Guo_xi. An analytical approach to one dimensional finite non linear consolidation by Lie group transformation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, **23**(5): 639—642.
- [9] 谢新宇, 张继发, 曾国熙. 半无限体地基一维非线性大变形固结解析分析方法研究[J]. 水利学报, 2002, **21**(7): 16—22.
- [10] Burgers J M. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion[J]. Transaction of Royal Netherlands Academic Science, 1939, **17**(2): 1—53.
- [11] Townsend F C, McVay M C. SOA: Large strain consolidation predictions[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1990, **116**(2): 222—243.

Similarity Solution of Self Weight Consolidation Problem for Saturated Soil

XIE Xin_yu, ZHANG Ji_fa, ZENG Guo_xi

(Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University,
Hangzhou 310027, P. R. China)

Abstract: More general assumption than that in the classical one dimensional large strain consolidation theory is adopted and the exact analytical solution of nonlinear finite strain self weight consolidation based on this assumption is obtained. By applying the same experimental data, the comparison of the solutions of linear and nonlinear finite strain theory, as well as the numerical calculating results from finite element method is presented. The results of the comparison show that the analytical solution obtained here takes on better agreement with practical cases than that of linear one, and they also show that, compared with the solutions from nonlinear theory, the settlement and the consolidation degree from linear theory are smaller.

Key words: self weight consolidation; Burgers equation; large strain; Lie Group transformation; similarity solution