应用数学和力学,第 26 卷 第 9 期(2005 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 09_1097_08

一致正规结构与 Reich 的公开问题的解答*

曾六川

(上海师范大学 数学系, 上海 200234)

(张石生推荐)

摘要: 在具有一致正规结构且其范数是一致Gateaux 可微的 Banach 空间中,研究了 Reich 提出的公开问题• 在给渐近非扩张映象作更适当的假设下,对 Reich 的公开问题给出了一个肯定的答复• 所得结果在下列方面推广与改进了张石生教授的最新结果:(i) 去掉了张教授的较强条件"迭代参数列收敛到零";(ii) 去掉了张教授的较强假设"渐近非扩张映象有不动点";(iii) 也去掉了张教授的较强条件"Banach 压缩映象原理生成的序列强收敛"• 而且,这些结果也推广与改进了先前由 Reich, Shioji, Takahashi, Ueda 及 Wittmann 等多位作者得到的相应结果•

关 键 词: 渐近非扩张映象; 不动点; 一致正规结构; 一致 Gateaux 可微范数; 迭代逼近

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

本文处处设 E 是一实的Banach空间, E^* 是 E 的对偶空间, D 是E 的非空子集, $J: E \to 2^{E^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象:

$$J(x) = \left\{f \in E^*: \langle x, f\rangle = \|x\| \cdot \|f\|, \ \|f\| = \|x\|\right\}, \qquad \forall x \in E, \tag{1}$$

其中$\langle \cdot, \cdot\rangle$表 E 与E^* 之间的广义对偶对•

定义 1 设 $T: D \to D$ 是一映象•

1) T 称为渐近非扩张的[1], 如果存在一序列$\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ 使得

$$\|T^n x - T^n y\| \leqslant k_n \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in D,\ n \geqslant 1,$$

特别地, 当$\{k_n\}$是常数列$\{1\}$时, T 称为非扩张的•

2) T 称为一致L_Lipschitz 的, 其中 L 是正常数, 如果

$$\|T^n x - T^n y\| \leqslant L\|x - y\|, \qquad \forall x, y \in D,\ n \geqslant 1,$$

特别地, 每个渐近非扩张映象 $T: D \to D$ 是一致L_Lipschitz 的, 其中 $L = \sup_{n\geqslant 1} k_n < \infty$•

3) T 称为渐近正则的, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \|T^{n+1}x - T^n x\| = 0, \qquad \forall x \in D•$$

熟知[2], 当 T 是非扩张映象时, 映象 $T_\lambda = \lambda I + (1 - \lambda) T$ 在D 上是渐近正则的, 其中 $\lambda \in$

* 收稿日期: 2003_08_21; 修订日期: 2005_03_15
基金项目: 高等学校优秀青年教师教学和科研奖励基金资助项目;上海市曙光计划基金资助项目
作者简介: 曾六川(1965—) , 男, 湖南邵东人, 教授, 博士, 博士生导师(E_mail: zenglc@hotmail.com)•

$(0,1)$ 且 I 是 E 的恒等映象, 即

$$\lim_{n\to\infty}\|T_\lambda^n x - T_\lambda^{n+1}x\| = 0, \qquad \forall x \in D.$$

定义 2[3] 设 D 是 E 的非空闭凸子集, $x \in D$ 是一给定点, $T: D \to D$ 是一映象.

1) 如果 T 是具有序列 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $k_n \to 1$ 的渐近非扩张映象, 则由下式定义的序列 $\{x_n\} \subset D$:

$$\begin{cases} x_0 \in D, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T^n y_n, \qquad n \geqslant 0, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T^n x_n \end{cases} \tag{2}$$

称为第一型的修正的 Reich 序列, 其中 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的两个数列.

2) 在(2)中, 如果取 $\beta_n = 1$, $\forall n \geqslant 0$, 则 $y_n = x_n$. 于是, 由下式定义的序列 $\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 \in D, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T^n x_n, \qquad n \geqslant 0, \end{cases} \tag{3}$$

称为第二型的修正的 Reich 序列, 其中 $\{\alpha_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的实数列.

3) 如果 T 是非扩张映象, 则由下私定义的序列 $\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 \in D, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T y_n, \qquad n \geqslant 0, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n \end{cases} \tag{4}$$

及由下式定义的序列 $\{x_n\}$:

$$\begin{cases} x_0 \in D, \\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) T x_n, \qquad n \geqslant 0, \end{cases} \tag{5}$$

都称为 Reich 序列, 其中 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的两个实数列.

关于由(5)定义的 Reich 序列 $\{x_n\}$ 的收敛性问题, Reich[4] 提出了下面的公开问题:

公开问题 设 E 是一 Banach 空间. 他问到, 是否存在一实数列 $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$, 使得对 E 中关于非扩张映象具有不动点性质(简记 FPP) 的任意的弱紧凸子集 D, 及对任意的非扩张映象 $T: D \to D$ 和任意的 $x \in D$, 由(5) 定义的序列 $\{x_n\}$ 收敛到 T 的不动点.

关于上述公开问题, 尽管 Reich[4, 5] 在 E 是一致光滑的 Banach 空间且 $\{\alpha_n\} = \{n^{-\alpha}\}$, $0 < \alpha < 1$ 的条件下给出了一个肯定的答复. 但是, 该问题一般来说仍未解决. 因此, 这需要进一步的研究努力.

Wittmann[6] 在 E 是 Hilbert 空间且 $\{\alpha_n\}$ 满足

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant 1, \quad \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty \tag{6}$$

的条件下也给出了一个肯定的答复.

Shioji 与 Takahashi[7] 把 Wittmann 的结果推广到了具有一致 Gateaux 可微范数的 Banach 空间的情况.

张石生教授[3] 研究了分别由(2)与(3)定义的第一型、第二型的修正的 Reich 序列 $\{x_n\}$ 的收敛性问题. 而且, 他也研究了分别由(4)与(5)定义的 Reich 序列 $\{x_n\}$ 的收敛性问题. 无疑, 在更一般形式与更一般的条件下, 他对 Reich 的公开问题给出了肯定的答复. 因而, 其结

果推广与改进了文献[4]至文献[8]等文中的相应结果•

受张石生教授[3]的启发与触动,本文继续研究分别由(2)与(3)定义的第一型、第二型的修正的 Reich 序列$\{x_n\}$的强收敛性问题,以及分别由(4)与(5)定义的Reich 序列$\{x_n\}$的强收敛性问题• 在给渐近非扩张映象作更适当的假设下,对 Reich 的公开问题给出了肯定的答复• 我们的结果在下列方面推广与改进了张石生教授[3]的结果:(i) 张的较强的条件 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0$ 被去掉;(ii) 张的 $F(T) \neq \emptyset$ 的假设被去掉;(iii) 张的较强条件"$\{z_n\}$强收敛到某一不动点 $z \in F(T)$",被我们的较弱条件 $\|z_n - Tz_n\| \to 0\ (n\to\infty)$ 取代• 而且无疑,我们的结果也推广与改进了文献[4]至文献[8]等文中的相应结果•

1 预备知识

设 E 是一实 Banach 空间,且 $U = \{x \in E: \|x\| = 1\}$• 回顾到,$E$ 的范数称为 Gateaux 可微的(且 E 称为光滑的),如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{7}$$

对每个 $x, y \in U$ 都存在• E 的范数称为一致 Gateaux 可微的,如果对每个 $y \in U$,极限(7)对 $x \in U$ 一致地存在• 已知[9],如果 E 是光滑的,则正规对偶映象 J 是单值的且是从E 的强拓扑到 E^* 的弱 * 拓扑连续的;如果 E 的范数是一致 Gateaux 可微的,则 J 在E 的每个有界子集上是从 E 的强拓扑到E^* 的弱 * 拓扑一致连续的• 又回顾到,E 的范数称为一致Frechet 可微的(且 E 称为一致光滑的),如果极限(7)对$(x, y) \in U\times U$ 一致地存在• 由于 E^* 是一致凸的,当且仅当 E 的范数是一致 Frechet 可微的,故每个具有一致凸对偶空间的 Banach 空间是自反的且具有一致 Gateaux 可微的范数• 反之,其逆不真•

设 D 是一 Banach 空间 E 的非空有界闭凸子集,$T: D \to D$ 是具有序列$\{k_n\} \subset [1, \infty)$,$\lim_{n\to\infty} k_n = 1$的渐近非扩张映象• 固定一个$x \in D$• 对每个 $n \geqslant 1$,定义压缩映象$S_n: D \to D$ 如下:

$$S_n(z) = \left(1 - \frac{t_n}{k_n}\right)x + \frac{t_n}{k_n}T^n z,$$

其中$\{t_n\} \subset (0, 1)$是满足 $t_n \to 1$的任意序列• 则由Banach 压缩映象原理 S_n 有唯一不动点$z_n \in D$•

设K 是Banach 空间 E 的非空有界闭凸子集,$d(K) = \sup\{\|x - y\|: x, y \in K\}$是$K$ 的直径• 对每个 $x \in K$,令 $r(x, K) = \sup\{\|x - y\|: y \in K\}$,$r(K) = \inf\{r(x, K): x \in K\}$($K$ 关于自身的Chebyshev 半径)• E 的正规结构系数定义为数

$$N(E) = \inf\{d(K)/r(K): K \text{ 是} E \text{ 的有界闭凸子集,满足 } d(K) > 0\},$$

空间 E 称为具有一致正规结构,如果 $N(E) > 1$• 已知[10],具有一致正规结构的空间是自反的;所有一致凸或一致光滑的 Banach 空间都具有一致正规结构• Lim 与 Xu[10]证明了下列结果:

引理 1[10] 设 E 是具有一致正规结构的Banach 空间,D 是E 的非空有界子集,$T: D \to D$ 是一致L_Lipschitz 的映象,满足$L < N(E)^{1/2}$• 又设存在 D 的非空闭凸子集K,满足下列性质(P):

$$(\mathrm{P}) \qquad x \in K \Rightarrow \omega_{\mathrm{w}}(x) \subset K,$$

其中 $\omega_w(x)$ 是 T 在 x 的弱 ω_ 极限集, 即集

$$\left\{y \in E: y = 弱\_\lim_{j\to\infty} T^{n_j}x \text{ 对某个 } n_j \uparrow \infty\right\},$$

则 T 在 K 中有不动点•

命题 1 设 E 是具有一致正规结构的 Banach 空间, D 是 E 的非空有界子集, $T: D \to D$ 是渐近正则的渐近非扩张映象, 具有序列 $\{k_n\} \subset [1, \infty)$, $k_n \to 1$• 又设存在 D 的非空闭凸子集 K, 具有同引理 1 中相同的性质(P), 则 T 在 K 中有不动点•

证明 由于 $\lim_{n\to\infty} k_n = 1$ 且 $N(E) > 1$, 故存在自然数 m_0 使得 $T^{m_0}: D \to D$ 是一致 L_Lipschitz 的, $L < N(E)^{1/2}$• 对每个 $x \in K$, 记 T^{m_0} 在 z 的弱 ω_ 极限集为 $\omega'_w(x)$• 于是, 由性质(P) 推得 $\omega'_w(x) \subset \omega_w(x) \subset K$• 把引理 1 用于映象 T^{m_0}, 得知 T^{m_0} 在 K 中有不动点 z• 注意到, T 在 D 上是渐近正则的• 因而, $\lim_{n\to\infty} \| T^n z - T^{n+1} z \| = 0$• 从而, 有

$$z = \lim_{j\to\infty} T^{jm_0} z = \lim_{j\to\infty} T^{jm_0+1} z = Tz•$$

设 μ 是自然数集 N 上的平均, 即, l^∞ 上满足 $\|\mu\| = 1 = \mu(1)$ 的连续线性泛函• 已熟知, μ 是 N 上的平均, 当且仅当

$$\inf\{a_n: n \in N\} \leqslant \mu(a) \leqslant \sup\{a_n: n \in N\},$$

$\forall a = (a_1, a_2, \cdots) \in l^\infty$• 根据实际情况, 本文用 $\mu_n(a_n)$ 代替泛函值 $\mu(a)$• N 上的平均 μ 称为 Banach 极限[7], 如果 $\mu_n(a_n) = \mu_n(a_{n+1})$, $\forall a = (a_1, a_2, \cdots) \in l^\infty$• 利用 Hahn_Banach 定理, 可证 Banach 极限的存在性• 又知, 如果 μ 是 Banach 极限, 则

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \mu_n(a_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad \forall a = (a_1, a_2, \cdots) \in l^\infty,$$

设 $\{x_n\}$ 是 E 中的有界序列, 则可定义 E 上实值连续凸函数 ϕ: $\phi(z) = \mu_n \|x_n - z\|^2$, $\forall z \in E$•

引理 2[7] 设 E 是具有一致 Gateaux 可微范数的 Banach 空间, C 是 E 的非空闭凸子集, $\{x_n\}$ 是 E 中的有界序列• 设 μ 是 Banach 极限, $z \in C$• 则 $\mu_n \|x_n - z\|^2 = \min_{y \in C} \mu_n \|x_n - y\|^2$ 当且仅当 $\mu_n \langle y - z, J(x_n - z)\rangle \leqslant 0$, $\forall y \in C$•

引理 3[11] 设 $\{\lambda_n\}$ 是 $[0, 1]$ 中的实数列, $\{\gamma_n\}$、$\{\mu_n\}$ 是非负的实数列, 满足: $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$• 若存在自然数 n_0 使得 $\gamma_{n+1} \leqslant (1 - \lambda_n)\gamma_n + \lambda_n \cdot \sigma_n + \mu_n$, $\forall n \geqslant n_0$, 其中 $\limsup_{n\to\infty} \sigma_n \leqslant 0$, 则 $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$•

引理 4[3],[11] 设 E 是一实 Banach 空间, $J: E \to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对一切 $x, y \in E$, 下列不等式成立:

(a) $\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle, \qquad \forall j(x + y) \in J(x + y);$

(b) $\|x + y\|^2 \geqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x)\rangle, \qquad \forall j(x) \in J(x)•$

引理 5[12] 设 E 是具有一致正规结构的 Banach 空间, D 是 E 的非空有界闭凸子集, $T: D \to D$ 是渐近非扩张映象, 则 T 在 D 中有不动点•

2 主要结果

定理 1 设 E 是具有一致正规结构的实 Banach 空间, 其范数是一致 Gateaux 可微的• 设

D 是E 的非空有界闭凸子集, $T:D\to D$ 是渐近正则的渐近非扩张映象, 具有序列$\{k_n\}\subset[1,\infty)$, $k_n\to 1$. 设$\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$是$[0,1]$ 中的二实数列, 满足: $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$. 对任给的 $x\in D$ 及任一 $n\geqslant 1$, 定义压缩映象 $S_n:D\to D$ 如下:

$$S_n(z)=(1-d_n)x+d_nT^nz, \tag{8}$$

其中, 对 $\forall n\geqslant 1$, $d_n=t_n/k_n$, $t_n\in(0,1)$ 且 $t_n\to 1(n\to\infty)$. 设 z_n 是S_n 的唯一不动点, 即 z_n 满足:

$$z_n=S_n(z_n)=(1-d_n)x+d_nT^nz_n,\qquad n\geqslant 1, \tag{*}$$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}(k_n-1)/(k_n-t_n)<\infty$且$\lim_{n\to\infty}\|z_n-Tz_n\|=0$, 则由(2) 定义的第一型的修正的Reich 序列$\{x_n\}$强收敛到不动点$z\in F(T)$.

证明　首先观察到, 对每个 $\nu\in F(T)$,

$$\langle z_n-T^nz_n,J(z_n-\nu)\rangle=\langle z_n-\nu,J(z_n-\nu)\rangle+\langle\nu-T^nz_n,J(z_n-\nu)\rangle\geqslant$$
$$-(k_n-1)\|z_n-\nu\|^2\geqslant-(k_n-1)d^2,$$

其中 $d=\mathrm{diam}D$, 即 D 的直径. 由于 z_n 是S_n 的不动点, 故有

$$z_n-T^nz_n=\frac{1-d_n}{d_n}(x-z_n), \tag{9}$$

于是, 由上述不等式即得

$$\langle z_n-x,J(z_n-\nu)\rangle\leqslant s_nd^2, \tag{10}$$

其中 $s_n=d_n(k_n-1)/(1-d_n)=t_n(k_n-1)/(k_n-t_n)\to 0\,(n\to\infty)$. 现在, 设 μ 是一 Banach 极限, 并定义 $\Phi:D\to[0,\infty):\Phi(z)=\mu_n\|z_n-z\|^2$. 由于 Φ 是连续的凸函数, 并当 $\|z\|\to\infty$ 时 $\Phi(z)\to\infty$, 且 E 是自反的, 因而, Φ 在D 上达到其下确界. 于是, 集

$$K=\left\{y\in D:\Phi(y)=\min_{z\in D}\Phi(z)\right\}$$

是非空闭凸集. 尽管 K 在T 之下未必是不变的, 但它却具有性质(P). 事实上, 如果 y 是K 中的点, $p=$ 弱 $\_\lim_{j\to\infty}T^{m_j}y$ 属于$\omega_w(y)$, T 在y 的弱 $\omega_$极限集, 则据$\lim_{n\to\infty}\|z_n-Tz_n\|=0$及 Φ 的弱下半连续性, 即有

$$\Phi(p)\leqslant\liminf_{j\to\infty}\Phi(T^{m_j}y)\leqslant\limsup_{m\to\infty}\Phi(T^my)=$$
$$\limsup_{m\to\infty}\mu_n\|z_n-T^my\|^2=\limsup_{m\to\infty}\mu_n\|T^mz_n-T^my\|^2\leqslant$$
$$\limsup_{m\to\infty}k_m^2\cdot\mu_n\|z_n-y\|^2=\mu_n\|z_n-y\|^2=\min_{z\in D}\Phi(z),$$

据此即知, p 属于K. 因此, K 满足性质(P). 再由命题 1 得知, T 有不动点$z\in K$. 注意到, E 的范数是一致Gateaux 可微的. 因 z 也是 Φ 在D 上的最小点, 故据引理 2 推得

$$\mu_n\langle y-z,J(z_n-z)\rangle\leqslant 0,\qquad\forall y\in D, \tag{11}$$

特别地, 有

$$\mu_n\langle x-z,J(z_n-z)\rangle\leqslant 0, \tag{12}$$

合并(12) 与(10), 即得 $\mu_n\langle z_n-z,J(z_n-z)\rangle=\mu_n\|z_n-z\|^2\leqslant 0$. 所以, 存在$\{z_n\}$ 的一子列$\{z_{n_j}\}$强收敛到z. 今断言, $\{z_n\}$ 的每个强收敛子列的极限都等于z. 设$\{z_{m_j}\}$ 是$\{z_n\}$ 的另一子列, 且强收敛到 y, 则由$\lim_{n\to\infty}\|z_n-Tz_n\|=0$ 推得, y 是T 的不动点. 由于 E 的范数是一致Gateaux 可微的, 故 J 在E 的每个有界子集上是从E 的强拓扑到E^* 的弱* 拓扑一致连续的.

观察到,

$$
\begin{aligned}
&|\langle z_{n_j}-x, J(z_{n_j}-y)\rangle-\langle z-x, J(z-y)\rangle| = \\
&\quad |\langle z_{n_j}-z, J(z_{n_j}-y)\rangle+\langle z-x, J(z_{n_j}-y)-J(z-y)\rangle| \leqslant \\
&\quad \|z_{n_j}-z\|\cdot\|z_{n_j}-y\|+|\langle z-x, J(z_{n_j}-y)-J(z-y)\rangle|,
\end{aligned}
$$

因此,据 $\|z_{n_j}-z\|\to 0\ (j\to\infty)$ 即得

$$\lim_{j\to\infty}\langle z_{n_j}-x, J(z_{n_j}-y)\rangle=\langle z-x, J(z-y)\rangle, \tag{13}$$

类似地,也可证,

$$\lim_{j\to\infty}\langle z_{m_j}-x, J(z_{m_j}-z)\rangle=\langle y-x, J(y-z)\rangle, \tag{14}$$

从而,由(10),(13)及(14)推得

$$\langle z-x, J(z-y)\rangle\leqslant 0,\ \langle y-x, J(y-z)\rangle\leqslant 0,$$

两不等式相加,即得 $\langle z-y, J(z-y)\rangle=\|z-y\|^2=0$· 可见,$z=y$· 这就证明了$\{z_n\}$强收敛到 z·

下面断言,由(2)定义的序列$\{x_n\}$强收敛到上述$z\in F(T)$· 事实上,由(2),引理4(a)及 T 的渐近非扩张性推得,对每个 $n\geqslant 1$,

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-z\|^2=\|(1-\alpha_n)(T^n y_n-z)+\alpha_n(x-z)\|^2\leqslant \\
&\quad (1-\alpha_n)^2k_n^2\|y_n-z\|^2+2\alpha_n\langle x-z, J(x_{n+1}-z)\rangle, \\
&\|y_n-z\|\leqslant\beta_n\|x_n-z\|+(1-\beta_n)k_n\|x_n-z\|\leqslant k_n\|x_n-z\|\cdot
\end{aligned}
\tag{15}
$$

今考虑(15)的右边的第1项· 观察到,

$$
\begin{aligned}
&(1-\alpha_n)^2k_n^2\|y_n-z\|^2\leqslant \\
&\quad (1-\alpha_n)\|x_n-z\|^2+(k_n^4-1)(1-\alpha_n)\|x_n-z\|^2\leqslant \\
&\quad (1-\alpha_n)\|x_n-z\|^2+(k_n-1)\cdot M_1,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

其中 $M_1=d^2\cdot\sup_{n\geqslant 0}(k_n^2+1)(k_n+1)$·

又考虑(15)的右边的第2项· 由(*)即得

$$x_n-z_m=(1-d_m)(x_n-x)+d_m(x_n-T^m z_m),\qquad \forall n\geqslant 0,\ m\geqslant 1, \tag{17}$$

所以,由(17)及引理4(b)推得

$$
\begin{aligned}
&d_m^2\|x_n-T^m z_m\|^2=\|(x_n-z_m)-(1-d_m)(x_n-x)\|^2\geqslant \\
&\quad \|x_n-z_m\|^2-2(1-d_m)\langle x_n-x, J(x_n-z_m)\rangle= \\
&\quad (1-2(1-d_m))\|x_n-z_m\|^2+2(1-d_m)\langle x-z_m, J(x_n-z_m)\rangle,
\end{aligned}
$$

于是,即得

$$\frac{d_m^2}{1-d_m}\|x_n-T^m z_m\|^2+\frac{1-2d_m}{1-d_m}\|x_n-z_m\|^2\geqslant 2\langle x-z_m, J(x_n-z_m)\rangle, \tag{18}$$

因 $z_m\to z\in F(T)\ (m\to\infty)$,故有 $\lim_{m\to\infty}\|T^m z_m-z\|\leqslant\lim_{m\to\infty}k_m\|z_m-z\|=0$,于是有 $T^m z_m\to z\ (m\to\infty)$· 从而,

$$\lim_{m\to\infty}\|x_n-z_m\|=\lim_{m\to\infty}\|x_n-T^m z_m\|=\|x_n-z\|, \tag{19}$$

令 $m\to\infty$,在(18)的两边取极限· 利用(19),先得到(18)的左边的极限

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{d_m^2}{1-d_m}\|x_n-T^m z_m\|^2+\frac{1-2d_m}{1-d_m}\|x_n-z_m\|^2\right\}=$$

$$\lim_{m\to\infty}\left\{\frac{d_m^2+(1-2d_m)}{1-d_m}\|x_n-z_m\|^2\right\}=$$
$$\lim_{m\to\infty}(1-d_m)\|x_n-z_m\|^2=0,\qquad \|x_n-z\|^2=0\ (\text{因 } d_m\to 1), \tag{20}$$

由于 J 在 E 的每个有界子集上是从 E 的强拓扑到 E^* 的弱* 拓扑一致连续的, 因此, 也得到 (18) 右边的极限

$$\lim_{m\to\infty}2\langle x-z_m, J(x_n-z_m)\rangle = 2\langle x-z, J(x_n-z)\rangle, \tag{21}$$

从而, 由(18)、(20)及(21)得 $\langle x-z, J(x_n-z)\rangle\leqslant 0,\ \forall n\geqslant 0$. 故 $\limsup_{n\to\infty}\langle x-z, J(x_n-z)\rangle\leqslant 0$.

注意到, $\lim_{n\to\infty}(k_n-t_n)=0$. 故对任给 $\varepsilon>0$, 存在自然数 m_1 使得 $k_n-t_n<\varepsilon,\ \forall n\geqslant m_1$. 即 $\varepsilon^{-1}(k_n-1)<\dfrac{k_n-1}{k_n-t_n},\ \forall n\geqslant m_1$. 再由 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{k_n-1}{k_n-t_n}<\infty$ 得 $\sum_{n=0}^{\infty}(k_n-1)<\infty$.

现在, 置 $\gamma_n=\|x_n-z\|^2$, $\lambda_n=\alpha_n$, $\sigma_n=2\langle x-z, J(x_{n+1}-z)\rangle$, 且 $\mu_n=(k_n-1)\cdot M_1$. 则据(15)与(16)即得 $\gamma_{n+1}\leqslant(1-\lambda_n)\gamma_n+\lambda_n\cdot\sigma_n+\mu_n,\ \forall n\geqslant 0$, 其中 $\lambda_n\in[0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n=\infty$, $\limsup_{n\to\infty}\sigma_n\leqslant 0$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n<\infty$. 于是, 由引理 3 推得 $\gamma_n\to 0\ (n\to\infty)$, 即 $\{x_n\}$ 强收敛到不动点 $z\in F(T)$.

注 1 通过仔细地分析定理 1 的证明, 即知, 如果用条件 $\sup_{n\geqslant 1}k_n<N(E)^{1/2}$ 取代 T 的渐近正则性, 则定理 1 的结论仍真.

定理 2 如果定理 1 中的条件被满足, 则由(3)定义的第二型的修正的 Reich 序列 $\{x_n\}$ 强收敛到不动点 $z\in F(T)$.

利用证明定理 1 与定理 2 的方法, 可证下列结果.

定理 3 设 E 是具有一致正规结构的实 Banach 空间, 其范数是一致 Gateaux 可微的. 设 D 是 E 的非空有界闭凸子集, $T: D\to D$ 是非扩张映象. 设 $\{\alpha_n\}$、$\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的二实数列, 满足: $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$. 对任给的 $x\in D$, 定义压缩映象 $S_t: D\to D: S_t(z)=(1-t)x+tTz,\ \forall z\in D$, 其中 $t\in(0,1)$ 且 $t\to 1^-$. 则由(4)或(5)定义的 Reich 序列 $\{x_n\}$ 强收敛到不动点 $z\in F(T)$.

[参 考 文 献]

[1] Goebel K, Kirk W A. A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1972, **35**(1): 171—174.

[2] Edelstein M, O' Brien C R. Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations[J]. Journal of the London Mathematical Society, 1978, **17**: 547—554.

[3] 张石生. 关于 Reich 的公开问题[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(6): 572—578.

[4] Reich S. Some problems and results in fixed point theory[J]. Contemporary Mathematics, 1983, **21**: 179—187.

[5] Reich S. Strong convergence theorems for resolvent of accretive mappings in Banach spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1980, **75**: 287—292.

[6] Wittmann R. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings[J]. Archiv der Mathematik, 1992, **58**: 486—491.

[7] Shioji N, Takahashi W. Strong convergence of approximated sequence for nonexpansive mappings [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1997, **125**(12): 3641—3645.

[8] Takahashi W, Ueda Y. On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1984, **104**: 546—553.

[9] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. Berlin: Springer_Verlag, 1985.

[10] Lim T C, Xu H K. Fixed point theorems for asymptotically nonexpansive mappings[J]. Nonlinear Analysis—Theory Methods & Applications, 1994, **22**(11): 1345—1355.

[11] Chang S S, Cho Y J, Lee B S, et al. Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo_contractive mappings in Banach spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1998, **224**: 149—165.

[12] Kim T H, Xu H K. Remarks on asymptotically nonexpansive mappings[J]. Nonlinear Analysis—Theory Methods & Applications, 2000, **41**: 405—415.

Uniform Normal Structure and Solutions of Reich's Open Question

ZENG Lu_chuan

(Department of Mathematics, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P.R.China)

Abstract: The open question raised by Reich is studied in a Banach space with uniform normal structure, whose norm is uniformly Gateaux differentiable. Under more suitable assumptions imposed on an asymptotically nonexpansive mapping, an affirmative answer to Reich's open question is given. The results presented extend and improve ZHANG Shi_sheng's recent ones in the following aspects: (i) ZHANG's stronger condition that the sequence of iterative parameters converges to zero is removed; (ii) ZHANG's stronger assumption that the asymptotically nonexpansive mapping has a fixed point is removed; (iii) ZHANG's stronger condition that the sequence generated by the Banach Contraction Principle is strongly convergent is also removed. Moreover, these also extend and improve the corresponding ones obtained previously by several authors including Reich, Shioji, Takahashi, Ueda and Wittmann.

Key words: asymptotically nonexpansive mapping; fixed point; uniform normal structure; uniformly Gateaux differentiable norm; iterative approximation