

文章编号: 1000-0887(2005)09-1105-09

# 型界面裂纹 Dugdale 模型的动态扩展问题

吕念春<sup>1,3,4</sup>, 程云虹<sup>2</sup>, 田修波<sup>1</sup>, 程 靳<sup>4</sup>

(1. 哈尔滨工业大学 材料科学与工程学院, 哈尔滨 150001;

2. 东北大学 土木工程系, 沈阳 110006;

3. 沈阳理工大学 材料科学与工程学院, 沈阳 110168;

4. 哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

(王银邦推荐)

**摘要:** 通过复变函数论的方法, 对材料的非线性特性下的 型界面裂纹 Dugdale 模型的动态扩展问题进行了研究. 采用自相似函数的方法可以获得解析解的一般表达式. 应用该法还可以很容易将所讨论的问题转化为 Riemann\_Hilbert 问题, 并可以相当简单地得到问题的闭合解. 利用这些解并采用叠加原理, 就可以求得任意复杂问题的解.

**关键词:** 复变函数; Dugdale 模型; 界面裂纹; 自相似函数; 解析解

**中图分类号:** O346.1 **文献标识码:** A

## 引 言

在裂纹动态扩展过程中, 裂纹尖端附近发生大范围塑性变形, 所以仅仅考虑材料的线弹性响应是不够的, 而应该进一步研究材料非线性特性下的裂纹动态扩展问题, 这样才可能进一步揭示固体的动态断裂规律<sup>[1]</sup>. 在非线性断裂力学中还有一个成功的模型, 即所谓的 Dugdale 模型, 也可以推广到动力学情形. 这一推广最早为 Kanninen 给出<sup>[2]</sup>. 本文将它推广到 型界面问题的断裂动力学之中, 利用复变函数论的方法给出解的一般表示. 但这一类动力学问题, 由于数学上的困难, 对其研究较少<sup>[3~5]</sup>. 应用自相似函数论的方法可以很容易地将所讨论的问题转化为 Riemann\_Hilbert 问题, 而后一问题可以用通常的 Muskhelishvili 方法<sup>[6,7]</sup>求解.

## 1 正交异性体弹性动力学反平面问题的相关方程

对于正交异性体, 我们选择 Cartesian 坐标轴和物体的弹性对称轴相一致, 所考虑的问题被限制在反平面上, 则正交异性体的反平面运动方程为:

$$C_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

式中  $C_{44}$ 、 $C_{55}$  为弹性常数,  $\rho$  为材料密度,  $w$  为沿  $z$  方向的位移<sup>[3]</sup>, 利用 Atkinson 的变换方法, 令

收稿日期: 2004\_07\_06; 修订日期: 2005\_04\_05

作者简介: 吕念春(1965), 男, 辽宁省朝阳市人, 副教授, 博士, 主要从事复合材料断裂动力学方面的研究(Tel: + 86\_451\_86419660; E\_mail: lnc\_65@163.com);

程靳(1945), 男, 辽宁省辽阳市人, 教授, 硕士, 博士生导师(联系人. Tel: + 86\_451\_86416375(o); + 86\_451\_86414970(h); E\_mail: hitwg@0451.com)

$$= x - t + Ty, \quad (2)$$

这里  $w$  为复变量,  $T$  为  $y$  的函数

现构造运动方程的解如下:

$$w = \operatorname{Re} \int ( ) dy, \quad (3)$$

式中的积分是在  $y$  的实轴上进行的 将(3)代入(1)式后可知,只要满足关系式:

$$C_{55} + C_{44}T^2 - \rho^2 = 0, \quad (4)$$

则运动方程(1)将成为恒等式,因此  $( )$  是由边界条件所确定的任意函数

而(4)式有两个根,我们仅取虚部为正的根,而后可得:

$$T( ) = i \sqrt{(C_{55} - \rho^2)/C_{44}}, \quad (5)$$

然后,将(3)代入(1)的正交异性体物理方程可得:

$$y_z = \operatorname{Re} \int C_{44}T ( ) dy, \quad x_z = \operatorname{Re} \int C_{55} ( ) dy \quad (6)$$

在  $y = 0$  上,(2)式转化为:

$$w = x - t \quad (7)$$

### 1.1 位移是齐次

当位移是齐次(我们将零次齐次函数简称齐次,以下同)时,我们取:

$$( ) = f\left(\frac{x}{t}\right), \quad (8)$$

将其代入(3)式、(6)式,利用 Cauchy 公式,在  $y = 0$  上得:

$$\begin{cases} x_z = \operatorname{Re} \left[ -2i \frac{C_{44}T}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) \right], & x_z = \operatorname{Re} \left[ -2i \frac{C_{55}}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) \right], \\ \frac{w}{t} = \operatorname{Re} \left[ 2i \frac{x}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) \right] \end{cases} \quad (9)$$

根据自相似方法<sup>[4],[8,9]</sup>,令:  $\xi = x/t$ ,而后我们取:

$$F( ) = -2iC_{44}T( ) f( ),$$

则(9)式将变为:

$$\begin{cases} x_z = \frac{C_{55}}{C_{44}t} \operatorname{Re} \left[ \frac{F( )}{T( )} \right], & x_z = \frac{1}{t} \operatorname{Re} F( ), \\ \frac{w}{t} = \frac{1}{C_{44}} \operatorname{Re} \left[ \frac{F( )}{T( )} \right] \end{cases} \quad (10)$$

### 1.2 应力是齐次

当应力是齐次时,我们取:

$$( ) = f\left(\frac{x}{t}\right), \quad (11)$$

将(11)式代入(3)式、(6)式,利用 Cauchy 公式,在  $y = 0$  上得:

$$\begin{cases} \frac{y_z}{t} = \operatorname{Re} \left[ 2iC_{44} \frac{T( )}{t} f\left(\frac{x}{t}\right) \right], & \frac{x_z}{t} = \operatorname{Re} \left[ 2iC_{55} \frac{f\left(\frac{x}{t}\right)}{t} \right], \\ \frac{2w}{t^2} = \operatorname{Re} \left[ -2i \frac{f\left(\frac{x}{t}\right)}{t} \right] \end{cases} \quad (12)$$

我们令:  $F( ) = 2iC_{44}T( ) f( )$ ,

则(12)式将变为:

$$\begin{cases} \frac{yz}{t} = \frac{1}{t} \operatorname{Re} F(\cdot), & \frac{xz}{t} = \frac{C_{55}}{C_{44}t} \operatorname{Re} \left[ \frac{F(\cdot)}{T(\cdot)} \right], \\ \frac{2w}{t} = \frac{1}{C_{44}} \operatorname{Re} \left[ \frac{F(\cdot)}{T(\cdot)} \right] \end{cases} \quad (13)$$

### 1.3 具有任意自相似指数的问题

设在一无限弹性半空间  $y = 0$  上有任意个载荷区域及位移区域, 这些区域的端点各以不同的常速移动, 初始静止, 这些区域上的载荷及位移是如下函数的线性组合:

$$\frac{d^k f_s(x)}{dx^k} \frac{d^m f_n(t)}{dt^m}, f_i(\cdot) = \begin{cases} 0 & (\cdot < 0), \\ i & (\cdot > 0), \end{cases} \quad (14)$$

式中  $k, s, m, n$  为任意正整数,  $x, t$  的复杂函数一般可表示为(14)式的线性组合, 因而若能求得具有(14)式形式的载荷或位移问题的解, 则可通过叠加得到复杂问题的解 现引入线性微分算子及反演:

$$L = \frac{m+n}{x^m t^n}, \quad \text{反演为} \quad L^{-1} = \frac{-m-n}{x^{-m} t^{-n}}, \quad (15)$$

式中负导数表示  $(m+n)$  阶积分, 零导数表示函数本身 容易证明, 必存在  $m, n$ , 使  $L$  作用于(14)式后, 得到的函数是  $x, t$  的零次齐次函数, 称此  $m, n$  为自相似指数 利用前面的方法, 可以得出:

当  $Lw$  是齐次函数时, 只需将  $w, xz, yz$  换成  $Lw, Lxz, Lyz$ , 则(8)式~(10)式仍然成立

当  $Lxz, Lyz$  是齐次函数时, 只需将  $w, xz, yz$  换成  $Lw, Lxz, Lyz$ , 则(11)式~(13)式仍然成立

因此, 在  $y = 0$  上可得到如下一般性结论<sup>[4, 5]</sup>:

当  $Lw$  是齐次函数时, 我们令:

$$w^0 = Lw, \quad xz^0 = Lxz, \quad yz^0 = Lyz \quad (16)$$

当  $Lxz, Lyz$  是齐次函数时, 我们令:

$$w^0 = \frac{1}{t} Lw, \quad xz^0 = \frac{1}{t} Lxz, \quad yz^0 = \frac{1}{t} Lyz \quad (17)$$

在引进符号的帮助下, 所有的一般表达式可写为:

$$\begin{cases} yz^0 = \frac{1}{t} \operatorname{Re} F(\cdot), & \frac{xz^0}{t} = \frac{C_{55}}{C_{44}t} \operatorname{Re} \left[ \frac{F(\cdot)}{T(\cdot)} \right], \\ \frac{w^0}{t} = \frac{1}{C_{44}} \operatorname{Re} \left[ \frac{F(\cdot)}{T(\cdot)} \right] \end{cases} \quad (18)$$

若令:  $f(\cdot) = F(\cdot)/T(\cdot)$ ,

则(18)式变为:

$$\begin{cases} yz^0 = \frac{1}{t} \operatorname{Re} [f(\cdot) T(\cdot)], & \frac{xz^0}{t} = \frac{C_{55}}{C_{44}t} \operatorname{Re} f(\cdot), \\ \frac{w^0}{t} = \frac{1}{C_{44}} \operatorname{Re} f(\cdot) \end{cases} \quad (19)$$

## 2 两种不同正交异性材料的界面问题

设两种不同材料界面处于  $y = 0$  的平面上, 在无限远处受到剪切载荷大小  $P$  的作用下开始出现一无限小的微观裂纹, 并以最大的速度沿着界面扩展, 如图1所示 由于在两种不同材料界面上作用力与反作用力相等, 因此对于反平面问题, 我们有:

$$\sigma_{yz}^{(1)}(x, 0, t) = \sigma_{yz}^{(2)}(x, 0, t), \tag{20}$$

也就是说,在  $y = 0, -\infty < x < \infty$  的平面上,界面上的剪应力的的大小相等,方向相反 式中右上角括号内的数字分别表示 1、2 两种材料中相应的物理量<sup>[4]</sup> 而后将(18)式、(5)式代入(20)式,那么我们就可以得到异种材料之间的关系式如下:

$$\text{Im} \sqrt{(C_{55}^{(1)} - \rho^{(1)} v^2) / C_{44}^{(1)}} f^{(1)}(\omega) = \text{Im} \sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} v^2) / C_{44}^{(2)}} f^{(2)}(\omega) \tag{21}$$

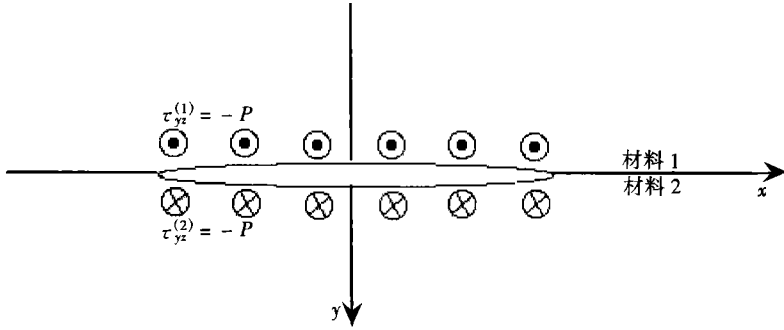


图 1 两种不同材料界面的裂纹扩展示意图

为了不失一般性,我们总假定  $C_{55}^{(1)} / \rho^{(1)} < C_{55}^{(2)} / \rho^{(2)}$ , 对于不同的  $v$  值, 根据(21)式可得:

$$\begin{cases} \text{当 } v^2 < \frac{C_{55}^{(1)}}{\rho^{(1)}} < \frac{C_{55}^{(2)}}{\rho^{(2)}} \text{ 时, } \text{Im} f^{(1)}(\omega) = \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} v^2) / C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(C_{55}^{(1)} - \rho^{(1)} v^2) / C_{44}^{(1)}}} \text{Im} f^{(2)}(\omega), \\ \text{当 } \frac{C_{55}^{(1)}}{\rho^{(1)}} < v^2 < \frac{C_{55}^{(2)}}{\rho^{(2)}} \text{ 时, } \text{Re} f^{(1)}(\omega) = \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} v^2) / C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(\rho^{(1)} v^2 - C_{55}^{(1)}) / C_{44}^{(1)}}} \text{Im} f^{(2)}(\omega), \\ \text{当 } \frac{C_{55}^{(1)}}{\rho^{(1)}} < \frac{C_{55}^{(2)}}{\rho^{(2)}} < v^2 \text{ 时, } \text{Re} f^{(1)}(\omega) = \frac{\sqrt{(\rho^{(2)} v^2 - C_{55}^{(2)}) / C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(\rho^{(1)} v^2 - C_{55}^{(1)}) / C_{44}^{(1)}}} \text{Re} f^{(2)}(\omega) = 0, \end{cases} \tag{22}$$

上面的最后一式之所以为零,是因为弹性波的扰动绝对不会超过两种介质中最大声速的传播范围

设裂纹以恒定速度  $V$  (小于声速) 沿  $x$  轴正、负方向对称扩展,在裂纹之外两种材料的界面上,位移应连续,故有

$$w^{(1)} = w^{(2)}, y = 0, |x| > Vt \tag{23}$$

由(19)式可知,此时边界条件可改写为:

$$\frac{1}{C_{44}^{(1)}} \text{Re} f^{(1)}(\omega) = \frac{1}{C_{44}^{(2)}} \text{Re} f^{(2)}(\omega), |x| > Vt \tag{24}$$

将(24)式、(22)式联立,我们应当注意到当两种介质相同时,所得的解必须转化为单一介质中问题的相应解<sup>[4,51,18]</sup>,可以得出:

$$\begin{cases} f^{(1)}(\omega) = m(\omega) n^{(1)}(\omega), f^{(2)}(\omega) = m(\omega) n^{(2)}(\omega), \\ n^{(1)}(\omega) = \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} v^2) / C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(C_{55}^{(1)} - \rho^{(1)} v^2) / C_{44}^{(1)}}} + \frac{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} v^2) / C_{44}^{(2)}}{(C_{55}^{(1)} - \rho^{(1)} v^2) / C_{44}^{(1)}}, \\ n^{(2)}(\omega) = 1 + \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - \rho^{(2)} v^2) / C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(C_{55}^{(1)} - \rho^{(1)} v^2) / C_{44}^{(1)}}}, \end{cases} \tag{25}$$

式中  $m(\omega)$  必须满足下式:



$$\operatorname{Re}[T^{(2)}(\cdot)m(\cdot)n^{(2)}(\cdot)] = P t [ (x+t) + (x-t) ] = P [ (\cdot + \cdot) + (\cdot - \cdot) ], \quad y = 0, \quad |x| < V \quad (29)$$

利用 (Dirac) 函数的性质<sup>[12, 13]</sup>, 我们将得到:

$$(\cdot + \cdot) + (\cdot - \cdot) = \operatorname{Re} \left[ \frac{2i}{(\cdot - \cdot)^2} \right] \quad (30)$$

由于  $T(\cdot)$  在亚音速范围内为纯虚量 因此(29) 式中的  $m(\cdot)$  在区间  $|x| < V$  上必然为纯实量, 且  $m(\cdot) = P$  因为在  $|x| < Vt$  时,  $y_z$  取不同的 2 个值, 则  $m(\cdot)$  中必有 2 个待定的实常数 而在坐标原点位移有界, 即  $0, m(\cdot) = o(1)$  利用对称性、无穷远条件及裂纹尖端的应力奇异性<sup>[14-16]</sup>, 可确定  $m(S)$  的唯一解必满足如下形式:

$$m(S) = S^n (V^2 - S^2)^{-3/2} \left\{ A + 2B/[P(S^2 - A^2)] \right\}, \quad (31)$$

式中  $A, B$  为待定实常数,  $n$  为待定指数

将(31) 式代入(19) 式、(25) 式、(29) 式后, 即可确定指数  $n$  :

$$n = \#$$

因此当  $S \rightarrow A$  时, 由(29) 式、(30) 式、(31) 式及(5) 式, 可确定实常数  $B$  :

$$B = \frac{AP(V^2 - A^2)^{3/2}}{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - A^{(2)}s^2)/C_{44}^{(2)}}} n^{(2)}(A), \quad (32)$$

然后将(31) 式代入(17) 式、(19) 式、(25) 式, 即可求得  $y = 0$  上的应力  $S_z$ 、位移  $w$ 、动态应力强度因子  $K_3(t)$  分别为:

$$S_z(x, 0, t) = \operatorname{Re}_{Q_{C_d}}^{x/t} - \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - Q^{(2)}s^2)/C_{44}^{(2)}}}{(S^2 - V^2)^{3/2}} \left[ A + \frac{2B}{P(S^2 - A^2)} \right] n^{(2)}(S) dS, \quad |x| > Vt, \quad (33)$$

$$w = \frac{1}{C_{44}^{(2)}Q_0} \int_0^t dt \operatorname{Re}_{Q_{C_d}}^{x/t} - \frac{S}{(V^2 - S^2)^{3/2}} \left[ A + \frac{2B}{P(S^2 - A^2)} \right] n^{(2)}(S) dS, \quad |x| < Vt, \quad (34)$$

$$K_3(t) = \lim_{x \rightarrow Vt} \sqrt{2P(x - Vt)} \operatorname{Re}_{Q_{C_d}}^{x/t} - \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - Q^{(2)}s^2)/C_{44}^{(2)}}}{(S^2 - V^2)^{3/2}} \left[ A + \frac{2B}{P(S^2 - A^2)} \right] n^{(2)}(S) dS = \frac{\sqrt{Pt(C_{55}^{(2)} - Q^{(2)}V^2)/C_{44}^{(2)}}}{V^{3/2}} \left[ A + \frac{2B}{P(V^2 - A^2)} \right] n^{(2)}(V) \# \quad (35)$$

(35) 式的极限属于  $0/\#$  型, 必须转化为  $\frac{0}{0}$  型后, 方可应用罗比塔(L. Hospital) 法则进行求导计算<sup>[17]</sup>, 从而得出上式的极限值

在各向同性体中, 弹性波的扰动范围可以用半径为  $c_1t, c_2t$  的圆形区域来表示, 这里的  $c_1, c_2$  分别为弹性体的纵、横波波速 而在各向异性体中, 扰动的范围不在是圆形区域, 不会超过弹性体的门槛值  $C_d = \sqrt{C_{55}/Q}$  (声速) 当  $|x| > C_d t$  时,  $\operatorname{Im}[T(S)] = 0$ , 因而应力、位移皆为 0; 这说明  $y = 0$  时, 弹性波的扰动不会超过  $C_d t$  将(33) 式代入边界条件(27) 式后, 即可确定实常数  $A$  :

$$\begin{cases} J_1 = \operatorname{Re}_{Q_M}^{c_d} - \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - Q^{(2)}s^2)/C_{44}^{(2)}}}{(S^2 - V^2)^{3/2}} n^{(2)}(S) dS, \\ J_2 = \operatorname{Re}_{Q_M}^{c_d} - \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)} - Q^{(2)}s^2)/C_{44}^{(2)}}}{(S^2 - A^2)(V^2 - S^2)^{3/2}} n^{(2)}(S) dS, \\ A = (P - 2BP^{-1}J_2)/J_1, \end{cases} \quad (36)$$

式中  $A < M < V$ , 积分是在主值意义下进行的#

对于  $\dot{0}$  型界面裂纹 Dugdale 模型的动态应力强度因子必有  $K_3(t) = 0$  这一关系<sup>[1]</sup>, 令  $P = -S$ , 然后利用(35)式可以很容易的推导出下式:

$$A + \frac{2B}{P(V^2 - A^2)} = 0 \quad (37)$$

由(36)式可知, 当变数  $M$  确定以后,  $A, J_1, J_2$  均含有一个未知量  $A$ ; 而(32)式中的常数  $B$  也含有一个未知量  $A$  因此利用(37)式可以很容易地解出  $A$  的数值解, 当然这里的  $A$  是不可能用函数的形式来表示的, 也只能得到数值解#

将(37)式代入(34)式, 当  $x \rightarrow y \rightarrow A$  时, 对(34)式取极限可以很容易地求出  $y > 0$  时裂纹尖端的张开位移  $D_3(t)$ :

$$\begin{aligned} D_3(t) = & \lim_{x \rightarrow y \rightarrow A} \left\{ \frac{1}{C_{44}^{(2)}} \int_0^t dt \operatorname{Re} \left[ Q_{C_d}^{x/t} - \frac{S}{(V^2 - S^2)^{3/2}} \left( A + \frac{2B}{P(S^2 - A^2)} \right) n^{(2)}(S) \right] dS = \right. \\ & \frac{1}{C_{44}^{(2)}} \lim_{x \rightarrow y \rightarrow A} \left\{ \int_0^t dt \operatorname{Re} \left[ Q_{C_d}^{x/t} - \frac{S}{(V^2 - S^2)^{3/2}} \left( \frac{2B}{P(S^2 - A^2)} - \frac{2B}{P(V^2 - A^2)} \right) n^{(2)}(S) \right] dS = \right. \\ & \left. \frac{2B}{P} \frac{t}{C_{44}^{(2)}} \lim_{x \rightarrow y \rightarrow A} \left[ \operatorname{Re} \left[ Q_{C_d}^S - \frac{S}{(S^2 - A^2)(V^2 - S^2)^{1/2}} n^{(2)}(S) \right] dS \right. \end{aligned} \quad (38)$$

根据具体问题的实际条件, 将相关的参数代入到(33)式、(38)式, 即可很容易求得相应的应力、裂纹尖端张开位移的数值解# 至此, 关于  $\dot{0}$  型界面裂纹 Dugdale 模型的动态扩展问题已经解决#

下面以(33)式、(38)式为例来分别描述应力场、裂纹尖端张开位移# 所假定的常数如下:

$$\begin{aligned} C_{55}^{(2)} = 2C_{44}^{(2)} &= 10.00 \text{ GPa}, \quad Q^{(2)} = 2.7 @ 9.8 @ 10^3 \text{ N/m}^3; \\ C_{55}^{(1)} = 2C_{44}^{(1)} &= 16.00 \text{ GPa}, \quad Q^{(1)} = 7.8 @ 9.8 @ 10^3 \text{ N/m}^3; \\ P = 200 \text{ N}, \quad A &= 200 \text{ m/s}, \quad V = 300 \text{ m/s}, \quad M = 250 \text{ m/s}; \end{aligned}$$

通过数值计算可知, 裂纹尖端附近应力场具有明显的奇异性, 见图 3; 相关的数值关系见表 1# 这一变化趋势与文献<sup>[18~21]</sup>的结果相类似, 从而说明这一结果的正确性#

表 1 裂纹尖端的切应力和坐标原点距离的相关数值

$x/m$	0.030 0	0.030 1	0.030 2	0.030 3	0.030 4	0.030 5	0.030 6
$S_{32}/(\text{N/m}^2)$	+ ]	299.243 7	281.201 8	268.448 6	258.569 1	248.847 7	241.228 2
$x/m$	0.030 7	0.030 8	0.030 9	0.031 0	0.031 1	0.031 2	0.031 3
$S_{32}/(\text{N/m}^2)$	233.655 3	227.898 7	221.635 3	215.636 6	210.450 8	205.396 1	200.786 8
$x/m$	0.031 4	0.031 5	0.031 6	0.031 7	0.031 8	0.031 9	0.032 2
$S_{32}/(\text{N/m}^2)$	196.510 6	193.105 6	188.143 8	184.773 5	180.410 2	176.787 3	174.106 4

从(38)式可知, 裂纹尖端张开位移  $D_3(t)$  和时间  $t$  成正比, 见图 4, 相关数值见表 2#

表 2 裂纹尖端张开位移  $D_3(t)$  和时间  $t$  的相关数值

$t @ 10^{-4}/\text{s}$	2	4	6	8	10
$D_3(t) @ 10^{-6}/\text{m}$	0.039 6	0.079 3	0.118 9	0.158 5	0.198 2
$t @ 10^{-4}/\text{s}$	12	14	16	18	20
$D_3(t) @ 10^{-6}/\text{m}$	0.237 8	0.277 5	0.317 1	0.356 7	0.396 4

## 5 结 论

采用自相似函数的途径能够获得  $\dot{0}$  型界面裂纹 Dugdale 模型的动态扩展问题的具体解, 这

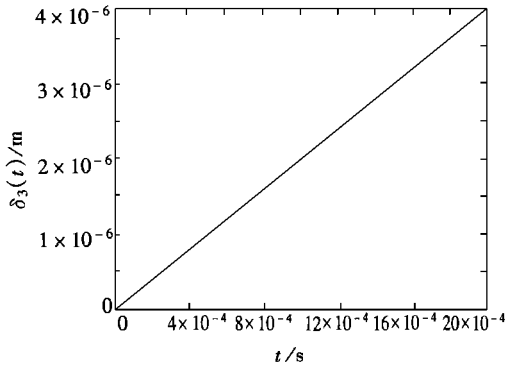
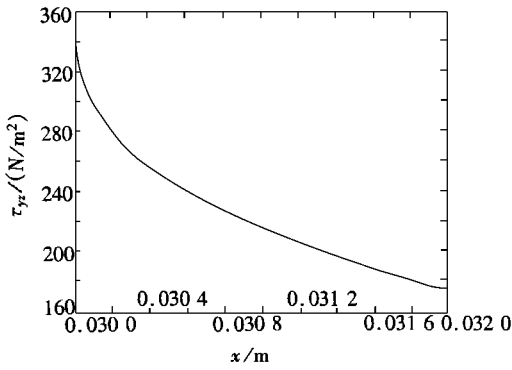


图3 裂纹尖端的切应力和坐标原点距离的关系 图4 裂纹尖端张开位移  $D_3(t)$  和时间  $t$  的关系

可认为是弹性理论的相似种类动态问题的解。解的方法是以专用的解析函数理论为基础,是简单的和简明的。这已经相当减少需要解决这一裂纹扩展问题的计算工作量。如果2种材料具有相同的材料常数,那么这些解就转化为单一正交异性材料中相应问题的解,详见文献[8]。

### [参 考 文 献]

- [1] 范天佑. 断裂动力学引论[M]. 北京:北京理工大学出版社, 1990, 82) 223.
- [2] Kanninen M F, Popelar C H. Advanced Fracture Mechanics [M]. Oxford: Oxford Univ Press, 1985, 20) 107.
- [3] Eringen A C, Suhubi E S. Elastodynamic Vol 2 Linear Theory [M]. New York, San Francisco, London: Academic Press, 1975, 208) 453.
- [4] 程新. 不同正交异性材料界面上的扩展裂纹问题[J]. 固体力学学报, 1987, 8(2): 108) 116.
- [5] LB Nian\_chun, CHENG Jin, CHENG Yun\_hong. Mode interface crack propagation in two joined media with weak dissimilarity and strong orthotropy[J]. Theo App Frac Mech, 2001, 36(2): 219) 231.
- [6] Muskhelishvili N I. Singular Integral Equations [M]. Moscow: Nauka, 1968, 8) 120.
- [7] Muskhelishvili N I. Some Fundamental Problems in the Mathematical Theory of Elasticity [M]. Moscow: Nauka, 1968, 20) 125.
- [8] 程新. 某些正交异性体弹性动力学问题[J]. 哈尔滨工业大学学报. 工程力学专辑, 1985(增刊): 8) 21.
- [9] Atkinson C. The Propagation of a brittle crack in anisotropic material[J]. Int J Engng Sci, 1965, 3(2): 77) 91.
- [10] Dugdale D S. Yielding of steel sheets containing slits[J]. J Mech Phys Soli, 1960, 18(1): 100) 104.
- [11] Bilby B A, Cottrell A H, Swinden K H. The spread of plastic yield from a notch[J]. Proc Roy Soc (London), Ser A, 1963, 272(1350): 304) 314.
- [12] Hoskins R F. Generalized Functions [M]. Horwood: Ellis, 1979, 19) 125.
- [13] 王燮山. 奇异函数及其在力学中的应用[M]. 北京:科学出版社, 1993, 3) 45.
- [14] Gakhov F D. Boundary Value Problems [M]. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 10) 136.
- [15] Sih G C. Mechanics of Fracture 4. Elastodynamics Crack Problems [M]. Leyden: Noordhoff, 1977, 213) 247.
- [16] Kanwal R P, Sharma D L. Singularity methods for elastostatics [J]. J Elasticity, 1976, 6(4): 405) 418.
- [17] 同济大学数学教研室, 高等数学(上册) [M]. 北京:高等教育出版社, 1994, 167) 172.



- [18] Ravi\_Chandar K, Knauss W G. An Experimental investigation into dynamic fracture: Pt 1, crack initiation and arrest[ J]. Int J Frac, 1984, 25(4) : 247) 262.
- [19] Ravi\_Chandar K, Knauss W G. An Experimental investigation into dynamic fracture: Pt 2, microstructural aspects[ J]. Int J Frac, 1984, 26(1): 65) 80.
- [20] Ravi\_Chandar K, Knauss W G. An Experimental investigation into dynamic fracture: Pt 3, on steady\_ state crack propagation and crack branching[ J]. Int J Frac , 1984, 26(2) : 141) 154.
- [21] Ravi\_Chandar K, Knauss W G. An experimental investigation into dynamic fracture: Pt 4, on the interaction of stress waves with propagation cracks[ J]. Int J Frac, 1984, 26( 3) : 189) 200.

D y n a m i c P r o p a g a t i o n P r o b l e m o n D u g d a l e  
M o d e l o f M o d e I n t e r f a c e C r a c k

L B N i a n \_ c h u n <sup>1,3,4</sup>, C H E N G Y u n \_ h o n g <sup>2</sup>,  
T I A N X i u \_ b o <sup>1</sup>, C H E N G J i n <sup>4</sup>

( 1. School of Material Science and Engineering, Harbin Institute of Technology ,  
Harbin 150001, P. R. China ;

2. Department of Civil Engineering, Northeastern University ,  
Shenyang 110006, P. R. China ;

3. School of Material Science and Engineering, Shenyang University of Science and Technology ,  
Shenyang 110168, P. R. China ;

4. Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology ,  
Harbin 150001, P. R. China )

Abstract: By the theory of complex functions, dynamic propagation problem on Dugdale model of mode interface crack for nonlinear characters of materials was studied. The general expressions of analytical solutions are obtained by the methods of self\_similar functions. The problems dealt with can be easily transformed into Riemann\_Hilbert problems and their closed solutions are attained rather simple by this approach. After those solutions were utilized by superposition theorem, the solutions of arbitrarily complex problems could be obtained.

Key words: complex function; Dugdale model; interface crack; self\_similar function; analytical solution