应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 09_1121_07

一类集值非线性混合变分包含问题的逼近解

张从军[1], 孙 敏[2]

(1. 南京财经大学 应用数学系, 南京 210003;
2. 安徽大学 数学系, 合肥, 230039)

(张石生推荐)

摘要: 在 Hilbert 空间中讨论了一类集值非线性混合变分包含问题逼近解的存在性, 建立了变分包含问题与其预解方程的等价性, 获得了 3 个迭代算法并研究了算法的收敛性 该结果推广统一了近期一些学者关于变分包含问题的相关结果

关 键 词: 变分包含; 预解方程; 迭代算法
中图分类号: O177.91 文献标识码: A

引 言

变分不等式与变分包含问题, 作为基础数学与应用数学的一个重要分支, 近些年来引起了许多学者的广泛兴趣 它为我们统一研究经济等诸多领域产生的问题提供了有力的数学工具

受文献[1]至文献[11]的启发, 本文讨论一类集值非线性混合变分包含问题的逼近解 建立了变分包含问题与其预解方程的等价性, 得到了 3 个迭代算法并研究了算法的收敛性 本文结果推广统一了文献[1]至文献[8]中关于变分包含问题的一些近期结果

本文设 H 是实 Hilbert 空间, 范数和内积分别是 , , 2^H 表示 H 的幂集, $C(H)$ 表示 H 的所有紧子集组成的集族 , $N:H\ \ H\ \ H$, $g:H\ \ H$, 都是单值映射, $T, A:H\ \ 2^H$ 都是集值映射

我们要讨论如下问题:

求 $x\ \ H$, $u\ \ T(x)$, $v\ \ A(x)$ 使得 $g(x)\ \ \mathrm{dom}$, 且,

$$g(x)-N(u,v),\ \ (y,g(x))\qquad (g(x))-\ \ (y),\qquad y\ \ H,\tag{1}$$

其中 $:H\ \ R\ \left\{+\ \ \right\}$ 是泛函, $\mathrm{dom}\ \ =\left\{x\ \ H:\ \ (x)<+\ \ \right\}$

以上问题称为集值非线性混合变分包含问题, 满足上面条件的 $x\ \ H$, $u\ \ T(x)$, $v\ \ A(x)$ 称为(1)的解

收稿日期: 2003_05_26; 修订日期: 2005_04_05
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19871048); 江苏省高校自然科学研究计划资助项目(04KJD110075)
作者简介: 张从军(1956), 男, 教授, 江苏省 333 工程 培养对象, 研究方向为非线性泛函分析及应用(联系人: Tel: + 86_25_83494885; Fax: + 86_25_84028410; E_mail: zcjyysxx@163.com)

1 预备知识

定义 1. 1 映射 $:H \quad H \quad H$ 称为是单调的, 如果

$$(x, y), x - y \qquad 0, \qquad x, y \quad H, \tag{2}$$

称为是严格单调的, 如果(2) 中等号当且仅当 $x = y$ 时成立 称为是 _强单调的, 如果存在常数 > 0, 使

$$(x, y), x - y \qquad x - y \quad ^2, \qquad x, y \quad H,$$

称为是 _Lipschitz 连续的, 如果存在常数 > 0, 使

$$(x, y) \qquad x - y \quad , \qquad x, y \quad H$$

定义 1. 2 设 $:H \quad H \quad H$ 是单值映射, $:H \quad R \quad \{+ \quad \}$ 是真泛函, $x \quad H$, 我们称 $w \quad H$ 为 在 $x \quad$ dom 处的 _次梯度, 如果

$$w, \ (y, x) \qquad (y) - \quad (x), \qquad y \quad H,$$

如下定义的 (x) 称为 在 x 处的 _次微分, 即

$$(x) = \{w \quad H: \ w, \ (y, x) \qquad (y) - \quad (x), \qquad y \quad H\}$$

定义 1. 3 集值映射 $Q:H \quad 2^H$ 称为是 _单调的, 如果对任意的 $x, y \quad H, w \quad Q(x), z \quad Q(y)$, 有

$$w - z, \ (x, y) \qquad 0, \tag{3}$$

Q 称为是极大 _单调的, 当且仅当它是 _单调的, 且不存在其它的 _单调集值映射, 它的图象严格包含 Graph(Q)

注 如果 $:H \quad H \quad H$ 满足条件: $x, y \quad H, \ (x, y) = - \quad (y, x), \ :H \quad R \quad \{+ \quad \}$ 是真泛函, 易知集值映射 $: H \quad 2^H$ 是 _单调的

称 $J \ = (I + \qquad)^{-1}$ 是关于 的预解算子, 其中 > 0 是常数, I 是恒等算子

引理 1. 1[5] 若 $:H \quad H \quad H$ 是严格单调的, $Q:H \quad 2^H$ 是 _单调的集值映射, 若$(I + \quad Q)$ 的值域满足 $R(I + \quad Q) = H$, 其中 > 0 是常数, I 是恒等映射, 则 Q 是极大 _单调的且逆映射$(I + \quad Q)^{-1}$ 是单值映射

引理 1. 2[5] 设 $:H \quad H \quad H$ 是 _强单调的, _Lipschitz 连续的, 满足条件: $x, y \quad H, \ (x, y) = - \quad (y, x)$, 则

$$J \ (x) - J \ (y) \qquad x - y \quad , \qquad x, y \quad H, \tag{4}$$

其中 $= \quad ^{-1}$

易于验证问题(1) 存在解的以下两个充要条件:

定理 1. 1 设 $:H \quad H \quad H$ 是严格单调的, $x, y \quad H, \ (x, y) = - \quad (y, x), \ :H \quad R \quad \{+ \quad \}$ 是真泛函, 满足 $R(I + \qquad) = H, \ > 0$, 则 $x \quad H, u \quad T(x), v \quad A(x)$ 是问题(1) 的解当且仅当 $x \quad H, u \quad T(x), v \quad A(x)$ 满足关系

$$g(x) = J \ [g(x) - \quad (g(x) - N(u, v))] \tag{5}$$

下面考虑问题(1) 的预解方程 令 $R \ = I - J$ 其中 I 恒等算子, J 是预解算子, 对于给定的非线性算子 $T, A: H \quad C(H), \ , N: H \quad H \quad H, g: H \quad H$, 考虑下面的问题: 求 $z, x \quad H, u \quad T(x), v \quad A(x)$ 使得

$$g(x) + \quad ^{-1} R \ z = N(u, v), \tag{6}$$

其中 > 0 是一个常数 方程(6) 称为问题(1) 预解方程

定理 1.2 令 $:H \quad H \quad H$ 是严格单调的, $x, y \quad H, \quad (x, y) = - \quad (y, x), \quad :H$ $R \quad \{+ \quad \}$ 是真泛函满足 $R(I + \quad) = H$, 其中 > 0, 则 $x \quad H, u \quad T(x), v \quad A(x)$ 是问题(1) 的解当且仅当 $z, x \quad H, u \quad T(x), v \quad A(x)$ 满足预解方程(6), 其中

$$g(x) = J \ z, \ z = g(x) - \quad (g(x) - N(u, v)) \tag{7}$$

2 迭代算法

定理 1.1 表明集值变分包含问题(1) 等价于不动点问题

$$x = (1- \quad)x + \quad \{x - g(x) + J \ [g(x) - \quad (g(x) - N(u, v))]\}, \tag{8}$$

这里 $0 < \quad < 1$ 是一参数 由此式可以得到如下算法

算法 2.1 设 $T, A: H \quad C(H)$ 是集值映射, $, N: H \quad H \quad H, g: H \quad H$ 是单值映射, 给定 $x_0 \quad H, u_0 \quad T(x_0), v_0 \quad A(x_0)$, 令

$$x_1 = (1- \quad)x_0 + \quad \{x_0 - g(x_0) + J \ [g(x_0) - \quad (g(x_0) - N(u_0, v_0))]\},$$

因为 $u_0 \quad T(x_0), v_0 \quad A(x_0)$, 存在 $u_1 \quad T(x_1), v_1 \quad A(x_1)$ 使得

$$u_1 - u_0 \quad M(T(x_1), T(x_0)),$$

$$v_1 - v_0 \quad M(A(x_1), A(x_0)),$$

其中 $M(\ ,\ )$ 是 $C(H)$ 上的 Hausdorff 度量 令

$$x_2 = (1- \quad)x_1 + \quad \{x_1 - g(x_1) + J \ [g(x_1) - \quad (g(x_1) - N(u_1, v_1))]\},$$

同样地, 我们可以得到序列 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 使得

$$u_n \quad T(x_n): \quad u_{n+1} - u_n \quad M(T(x_{n+1}), T(x_n)),$$

$$v_n \quad A(x_n): \quad v_{n+1} - v_n \quad M(A(x_{n+1}), A(x_n)),$$

$$x_{n+1} = (1- \quad)x_n + \quad \{x_n - g(x_n) + J \ [g(x_n) - \quad (g(x_n) - N(u_n, v_n))]\},$$

$$n = 0, 1, 2,$$

定理 1.2 表明集值非线性混合变分包含问题(1) 与预解方程(6) 是等价的 这一转换从数值与逼近的观点看非常重要, 预解方程(6) 更加广泛与灵活 由此可得如下两个迭代算法

算法 2.2 设 $g: H \quad H$ 是可逆的, (6) 可写成

$$R \ z = - \quad (g(x) - N(u, v))$$

即

$$z = J \ z - \quad (g(x) - N(u, v)) = g(x) - \quad (g(x) - N(u, v))] \tag{9}$$

对于给定的 $z_0 \quad H, \quad x_0 \quad H, g(x_0) = J \ (z_0)$, 取 $u_0 \quad T(x_0), v_0 \quad A(x_0)$

由下面的迭代公式计算得到序列 $\{z_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 与 $\{x_n\}$,

$$g(x_n) = J \ z_n, \tag{10}$$

$$u_n \quad T(x_n): \quad u_{n+1} - u_n \quad M(T(x_{n+1}), T(x_n)), \tag{11}$$

$$v_n \quad A(x_n): \quad v_{n+1} - v_n \quad M(A(x_{n+1}), A(x_n)), \tag{12}$$

$$z_{n+1} = g(x_n) - \quad (g(x_n) - N(u_n, v_n)), \quad n = 0, 1, 2, \tag{13}$$

算法 2.3 设 $g: H \quad H$ 是可逆的, (6) 可以写成

$$0 = - \quad ^{-1}R \ z - (g(x) - N(u, v)),$$

$$R \ z = (1- \quad ^{-1})R \ z - (g(x) - N(u, v)),$$

$$z = J \ z + (1- \quad ^{-1})R \ z - (g(x) - N(u, v)) = (1- \quad ^{-1})R z + N(u, v)$$

给定 $z_0 \quad H$, 由下面的迭代公式计算得到序列 $\{z_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 与 $\{x_n\}$,

$$g(x_n) = J \ z_n,$$

$$u_n \quad T(x_n): \quad u_{n+1} - u_n \qquad M(T(x_{n+1}), T(x_n)),$$
$$v_n \quad A(x_n): \quad v_{n+1} - v_n \qquad M(A(x_{n+1}), A(x_n)),$$
$$z_{n+1} = (1 - \ ^{-1}) R \ z_n + N(u_n, v_n), \qquad n = 0, 1, 2,$$

3 收敛性分析

本节讨论由算法 2.1 和算法 2.2 得到的逼近解收敛于集值变分包含问题(1)与预解方程(6)的精确解所需的条件 为此需要下面的定义

定义 3.1 对于任意的 $x_1, x_2 \quad H$, 算子 $T: H \quad C(H)$ 称为 _M_Lipschitz 连续的, 若存在一个常数 > 0 使得 $M(T(x_1), T(x_2)) \qquad x_1 - x_2$, 其中 $M(\ , \ )$ 是 $C(H)$ 上的 Hausdorff 度量

定义 3.2 对于任意的 $x_1, x_2 \quad H$, 算子 $g: H \quad H$ 称为 _强单调的, 若存在一个常数 $>$ 0 使得

$$g(x_1) - g(x_2), x_1 - x_2 \qquad x_1 - x_2 \ ^2$$

定理 3.1 设 $T: A: H \quad C(H)$ 分别是 _M_Lipschitz 连续的与 _M_Lipschitz 连续的, $g: H \quad H$ 是 _Lipschitz 连续的且是 _强单调的, $G: H @H \ y \ H$ 是R_强单调的, D_Lipschitz 连续的, $P x, y \ I \ H$, $G(x, y) = - G(y, x)$, $N(u, \#)$ 是 C_Lipschitz 连续的, $N(\#, v)$ 是 X_Lipschitz 连续的, 并满足

$$\sqrt{1 - 2N + L^2} + SL + SQCB + SQXA < 1 + SQL, \tag{14}$$

则存在满足(8) 的 $x \ I \ H$, $u \ I \ T(x)$, $v \ I \ A(x)$, 使得由算法 2.1 生成的 $\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 在 H 中分别强收敛于 u、v 与 $x\#$

证明 由算法 2.1, 我们有

$$\begin{aligned}
&+ x_{n+1} - x_n + \ = \ + (1 - K)(x_n - x_{n+1}) + K(x_n - x_{n-1} - g(x_n) + g(x_{n-1})) + \\
&\quad K\{ JU[g(x_n) - Q(g(x_n) - N(u_n, v_n))] - JU[g(x_{n-1}) - \\
&\quad Q(x_{n-1}) - N(u_{n-1}, v_{n-1}))]\} + [\\
&\quad (1 - K) + x_n - x_{n-1} + + K + x_n - x_{n-1} - g(x_n) + g(x_{n-1}) + + \\
&\quad KS + (1 - Q)(g(x_n) - g(x_{n-1})) + Q(N(u_n, v_n) - N(u_{n-1}, v_{n-1})) + [\\
&\quad (1 - K) + x_n - x_{n-1} + + K + x_n - x_{n-1} - g(x_n) + g(x_{n-1}) + + \\
&\quad KS(1 - Q) + g(x_n) - g(x_{n-1}) + + KQS + N(u_n, v_n) - N(u_n, v_{n-1}) + + \\
&\quad KQS + N(u_n, v_{n-1}) - N(u_{n-1}, v_{n-1}) + \#
\end{aligned} \tag{15}$$

因为 $g: H \ y \ H$ 是 L_Lipschitz 连续的并且是 N_强单调的, 故有

$$+ g(x_n) - g(x_{n-1}) + [\ L + x_n - x_{n-1} + , \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
&+ x_n - x_{n-1} - g(x_n) + g(x_{n-1}) +^2 = \\
&\quad + x_n - x_{n-1} +^2 - 23 x_n - x_{n-1}, g(x_n) - g(x_{n-1}) 4 + \ + g(x_n) - g(x_{n-1}) +^2 [\\
&\quad (1 - 2N + L^2) + x_n - x_{n-1} +^2 \#
\end{aligned} \tag{17}$$

因为 $N(\#, v)$ 是 X_Lipschitz 连续的且 $T: H \ y \ C(H)$ 是 A_M_Lipschitz 连续的, 故

$$\begin{aligned}
&+ N(u_n, v_{n-1}) - N(u_{n-1}, v_{n-1}) + [\ X + u_n - u_{n-1} + [\\
&\quad xM(T(x_n), T(x_{n-1})) [\ RA + x_n - x_{n-1} + ,
\end{aligned} \tag{18}$$

同样, 因为 $N(u, \#)$ 是 C_Lipschitz 连续的且 $A: H \ y \ C(H)$ 是 B_M_Lipschitz 连续的, 又有

$$+ N(u_n, v_n) - N(u_n, v_{n-1}) + [\ C + v_n - v_{n-1} + [$$

$$M(A(x_n), A(x_{n-1})) [\quad CB + x_n - x_{n-1} + \# \tag{19}$$

由(15)式~(19)式，我们得到

$$+ x_{n+1} - x_n + [\ (1 - K + K\sqrt{1 - 2N + D^2} + KS(1 - Q)D + KSQCB + KSQRA) + x_n - x_{n-1} + [\ \mathrm{H} + x_n - x_{n-1} + , \tag{20}$$

其中

$$\mathrm{H} = 1 - K + K\sqrt{1 - 2N + D^2} + KS(1 - Q)D + KSQCB + KSQRA\#$$

由(14)，H< 1# 因此由(20)序列$\{x_n\}$是H中的Cauch列，即当$n\ y\ ]$时$x_n\ y\ x\ I\ H\#$ 由算法2.1，我们有

$$+ u_{n+1} - u_n + [\ M(T(x_{n+1}), T(x_n)) [\ A + x_n - x_{n-1} + ,$$

这表明序列$\{u_n\}$是H中的Cauchy列，即当$n\ y\ ]$时$u_n\ y\ u\ I\ H\#$ 同样我们可以说明序列$\{v_n\}$是H中的Cauchy列，即当$n\ y\ ]$时$v_n\ y\ v\ I\ H\#$ 由算子N, g, JU的连续性与算法2.1我们有

$$x = (1 - K)x + K\{x - g(x) + JU[g(x) - Q(g(x) - N(u, v))]\}\#$$

下面我们说明$u\ I\ T(x)\#$ 事实上，当$n\ y\ ]$时，

$$d(u, T(x)) [\ + u - u_n + + d(u_n, T(x)) [$$
$$+ u - u_n + + M(T(x_n) - T(x)) [\ + u - u_n + + A + x_n - x + \ y\ 0, n\ y\ 0$$

其中$d(u, T(x)) = \inf\{+ u - w +, w\ I\ T(x)\}$，我们有$d(u, T(x)) = 0\#$ 这表明$u\ I\ T(x)$，因为$T(x)\ I\ C(H)\#$ 同样也可以说明$v\ I\ A(x)\#$ 由定理1.1，$x\ I\ H, u\ I\ T(x), v\ I\ A(x)$是集值非线性混合变分包含问题(1)的解，由算法2.1生成的点列$\{u_n\}$、$\{v_n\}$与$\{x_n\}$在H中分别强收敛于u、v与x，这就完成了证明#

定理3.2 设$T, A: H\ y\ C(H)$分别是A_M_Lipschitz连续的与B_M_Lipschitz连续的，$g: H\ y\ H$是L_Lipschitz连续的与N_强单调的，且g是可逆的# $G: H\ @H\ y\ H$是R_强单调的，D_Lipschitz连续的，$P\ x, y\ I\ H$，$G(x, y) = - G(y, x)$，$N(u, \#)$是C_Lipschitz连续的，$N(\#, v)$是X_Lipschitz连续的，并满足

$$\sqrt{1 - 2N + L^2} + SL + SQCB + SQXA < 1 + SQL, \tag{21}$$

则存在满足(5)与(7)的$z, x\ I\ H, u\ I\ T(x), v\ I\ A(x)$，使由算法2.2生成的$\{z_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$与$\{x_n\}$在$H$中分别强收敛于$z$、$u$、$v$与$x\#$

证明 由算法2.2，我们有

$$\begin{aligned}
+ z_{n+1} - z_n + &= \ + g(x_n) - g(x_{n-1}) - Q(g(x_n) - N(u_n, v_n) - \\
&Q(g(x_{n-1}) - N(u_{n-1}, v_{n-1})) + [\\
&(1 - Q) + g(x_n) - g(x_{n-1}) + + Q + N(u_n, v_n) - N(u_{n-1}, v_{n-1})) + [\\
&(1 - Q) + g(x_n) - g(x_{n-1}) + + Q + N(u_n, v_n) - \\
&N(u_n, v_{n-1})) + + Q + N(u_n, v_{n-1}) - N(u_{n-1}, v_{n-1}) + ,
\end{aligned} \tag{22}$$

因为$g: H\ y\ H$是L_Lipschitz连续的并且是N_强单调的，故有

$$+ g(x_n) - g(x_{n-1}) + [\ L + x_n - x_{n-1} + \# \tag{23}$$

因为$N(\#, v)$是X_Lipschitz连续的且$T: H\ y\ C(H)$是A_M_Lipschitz连续的，故有

$$+ N(u_n, v_{n-1}) - N(u_{n-1}, v_{n-1})) + [\ X + u_n - u_{n-1} + [$$
$$XM(T(x_n), T(x_{n-1})) [\ XA + x_n - x_{n-1} + , \tag{24}$$

同样地, 因为 $N(u, \#)$ 是 C_Lipschitz 连续的且 $A: H \ y \ C(H)$ 是 B_M_Lipschitz 连续的, 有

$$+ N(u_n, v_n) - N(u_n, v_{n-1}) + [\ C + v_n - v_{n-1} + [$$
$$cM(A(x_n), A(x_{n-1})) [\ CB + x_n - x_{n-1} + \# \tag{25}$$

由(22) ~ (25), 我们有

$$+ z_{n+1} - z_n + [\ ((1 - Q) L + QCB + QXA) + x_n - x_{n-1} + \# \tag{26}$$

再由(10), (23) 与引理 1. 2, 又有

$$+ x_n - x_{n-1} + = + x_n - x_{n-1} - (g(x_n) - g(x_{n-1})) + JU(z_n) - JU(z_{n-1}) + =$$
$$+ x_n - x_{n-1} - g(x_n) + g(x_{n-1}) + + \ + JU(z_n) - JU(z_{n-1}) + [$$
$$\sqrt{1 - 2N + L^2} + x_n - x_{n-1} + \ + \ + JU(z_n) - JU(z_{n-1}) + [$$
$$\sqrt{1 - 2N + L^2} + x_n - x_{n-1} + \ + \ S + z_n - z_{n-1} +$$

即

$$+ x_n - x_{n-1} + [\ \frac{S}{1 - \sqrt{1 - 2N + L^2}} + z_n - z_{n-1} + \# \tag{27}$$

合并(26) 与(27) 得

$$+ z_{n+1} - z_n + [\ ((1 - Q) L + QCB + QXA) \frac{S}{1 - \sqrt{1 - 2N + L^2}} + z_n - z_{n-1} + [$$
$$H + z_n - z_{n-1} + , \tag{28}$$

其中 $H = ((1 - Q) L + QCB + QXA) \dfrac{S}{1 - \sqrt{1 - 2N + L^2}} \#$

由(21), $H < 1\#$ 根据(28), 可知序列 $\{z_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 列, 从而当 $n \ y \ ]$ 时, $z_n \ y \ z \ I \ H\#$ 由(27), 序列 $\{x_n\}$ 也是 H 中的 Cauchy 列, 所以存在 $x \ I \ H$ 使当 $n \ y \ ]$ 时 $x_n \ y \ x \ I \ H\#$ 由(11), 我们有

$$+ u_{n+1} - u_n + \ [\ M(T(x_{n+1}), T(x_n)) [\ A + x_{n+1} - x_n + ,$$

这表明 $\{u_n\}$ 在 H 中是 Cauchy 列, 即当 $n \ y \ ]$ 时 $u_n \ y \ u \ I \ H\#$ 同样地, 我们可以说明序列 $\{v_n\}$ 是 H 中的 Cauchy 列, 即当 $n \ y \ ]$ 时 $v_n \ y \ v \ I \ H$, 根据算子 N、g、JU 的连续性与算法 212 我们就有

$$z = g(x) - Q(g(x) - N(u, v)) = JUz - Q(g(x) - N(u, v))$$

即

$$g(x) + Q^{1} RUz = N(u, v)\#$$

下面我们说明 $u \ I \ T(x)\#$ 事实上, 当 $n \ y \ ]$ 时

$$d(u, T(x)) [\ + u - u_n + \ + \ d(u_n, T(x)) [$$
$$+ u - u_n + \ + \ M(T(x_n) - T(x)) [$$
$$+ u - u_n + \ + \ A + x_n - x + \ y \ 0,$$

其中

$$d(u, T(x)) = \inf\{ + u - w +, w \ I \ T(x)\},$$

于是 $d(u, T(x)) = 0$, 这说明 $u \ I \ T(x)$, 因为 $T(x) \ I \ C(H)\#$ 同样可说明 $v \ I \ A(x)\#$ 由定理 1. 2, 可知 $z, x \ I \ H, u \ I \ T(x), v \ I \ A(x)$ 是(6) 的解, 且算法 2. 2 生成的序列 $\{z_n\}$、$\{u_n\}$、$\{v_n\}$ 与 $\{x_n\}$ 在中分别强收敛于 z、u、v、x, 这就完成了证明#

[参 考 文 献]

[1] Muhammad Aslam Noor, Themistocles M Rassias. Resolvent equations for set- valued mixed variational inequalities[J]. Nonlinear Analysis, 2000, 42, 71) 83.

[2] Chang S S, Cho Y J, Lee B S, et al. Generalized set_valued variational inclusions in Banach spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 246, 409) 422.

[3] Chang S S. On the Mann and Ishikawa iterative approximation of solutions to variational inclusions with accretive type mappings[J]. Compute Math Appl, 1999, 31(9): 17) 24.

[4] 张从军.集值非线性混合变分包含问题解的存在性及其算法[J].应用数学学报, 2005, 28(1): 65) 72.

[5] Lee C H, Ansari Q H, Yao J C. A perturbed algorithm for strongly nonlinear variational inclusions[J]. Bull Austral Math Soc, 2000, 62, 417) 426.

[6] DING Xie_ping. Perturbed proximal point algorithms for generalized quasi- variational inclusions[J]. J Math Anal Appl, 1997, 210, 88) 101.

[7] Huang N J. Mann and Ishikawa type perturbed iterative algorithm for generalized nonlinear implicit quaip_variational inclusions[J]. Com Math Appl, 1998, 35(10): 1) 7.

[8] Khan M F, Ahman R, Ausari Q H. Generalized multivalued nonlinear variational inclusions monotone mappings[J]. Adv Nonlinear Var Inequal, 2000, 3(1): 93) 101.

[9] Chang S S. Existence and approximation of solutions to variational inclusions with accretive mappings in Banach spaces[J]. Appl Math Mechanics, 2001, 22(9): 898) 904.

[10] Chang S S. Set_valued variational inclusions in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 2000, 248: 438) 454.

[11] ZHANG Cong_jun, Cho Y J, Wei S M. Variational inequalities and subjectivity for set_valued monotone mappings[J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 1998, 12(1): 169) 178.

Approximate Solution to a Class of Multivalued Nonlinear Mixed Variational Inclusions

ZHANG Cong_jun[1], SUN Min[2]

(1. Department of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance & Economics, Nanjing 210003, P.R. China;

2. Department of Mathematics, Anhui University, Hefei 230039, P.R. China)

Abstract: Concerned with the existence and convergence properties of approximate solution to multivalued nonlinear mixed variational inclusion problem in a Hilbert space. We established the equivalence between the varitional inclusion and the general resolvent equations, obtained three iterative algorithms, provided the convergence analysis of the algorithms. The results obtained improved and generalized a number of resent results.

Key words: multivalued nonlinear mixed variational inclusion; resolvent equation; iterative algorithm