应用数学和力学,第26卷 第9期(2005年9月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_088 (2005) 09_1128_0

一个抛物型方程侧边值问题的正则逼近解在一类 Sobolev 空间中的最优误差界*

李洪芳, 傅初黎, 熊向团

(兰州大学 数学系, 兰州 30000)

(王银邦推荐)

摘要: 逆热传导问题(IHCP)是严重不适定问题, 即问题的解(如果存在)不连续依赖于数据• 但目前关于逆热传导问题的已有结果主要是针对标准逆热传导问题• 文中给出了出现在实际问题中的一个抛物型方程侧边值问题, 即一个含有对流项的非标准型逆热传导问题的正则逼近解一类 Sobolev 空间中的最优误差界•

关 键 词: 逆热传导问题; 不适定问题; 抛物型方程侧边值问题; 正则化方法; 最优误差界

中图分类号: O1 5 文献标识码: A

引 言

逆热传导问题(IHCP)是严重不适定问题, 即问题的解(如果存在)不连续依赖于数据[1, 2]• 本文考虑一个抛物型方程侧边值问题, 即如下含对流项 u_x 的非标准型逆热传导问题[3~]:

$$\begin{cases} u_t + u_x = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & x \geqslant 0, \\ u(1, t) = g(t), & t \geqslant 0, \quad u(x, t)|_{x \to \infty} \text{ 有界}, \end{cases} \tag{1}$$

这里 $g(t) \in L^2(0, \infty)$ 是固定位置 $x = 1$ 处的温度值• 我们要由 $x = 1$ 处的温度测量值 $g_\delta(t)$ 来确定问题(1)在区间 $0 \leqslant x < 1$ 上的解 $u(x, t)$, 这里 $g(t)$ 和 $g_\delta(t)$ 满足:

$$\| g(t) - g_\delta(t) \| \leqslant \delta, \tag{2}$$

其中 δ 为测量误差, $\| \cdot \|$ 表示 L^2_范数• 目前已经有几类正则化方法可以恢复解的稳定性[4~], 但这些正则化方法的误差估计至多是阶数最优的, 或在 L^2 意义下最优• 本文应用一个基于谱分析基础上的正则化方法来处理问题(1), 给出了正则近似解在 H_q 尺度下的最优误差界•

* 收稿日期: 2003_05_30; 修订日期: 2005_05_1
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(102 1050)
作者简介: 李洪芳(19 5—), 女, 山东临沂人, 博士(E_mail: lihf 04@ st. lzu. edu. cn);
傅初黎(1945—), 男, 山西怀仁人, 教授, 博导(联系人. Tel: + 86_931_8912483; E_mail: fuchuli @ lzu. edu. cn)•

1　一般不适定反问题的最优误差界

本节的主要结果是已知的[8,9]，但它是我们下一节讨论的基础。我们考虑任意不适定问题

$$Ax = y, \tag{3}$$

其中 $A \in \mathscr{L}(X, Y)$ 是无穷维Hilbert空间 X 到 Y 的单射线性有界算子且值域 $R(A)$ 非闭。假设 $y^\delta \in Y$ 是误差数据且满足 $\|y - y^\delta\| \leqslant \delta$。任意算子 $R: Y \to X$ 都可看作求解(3)的一种特殊方法，且(3)的近似解由 Ry^δ 给出。

设 $M \subset X$ 是一有界集合。我们引入由 $y^\delta \in Y$ 来确定 x 的最坏情形误差 $\Delta(\delta, R)$ 如下：

$$\Delta(\delta, R) := \sup\left\{ \|Ry^\delta - x\| \mid x \in M, y^\delta \in Y, \|Ax - y^\delta\| \leqslant \delta \right\}. \tag{4}$$

这一最坏情形误差表示当问题(3)的解 x 在集合 M 中变动时，方法 R 的最大误差。如果 $\Delta(\delta, R_\delta) = \inf_R \Delta(\delta, R)$，我们就称参数依赖方法 $R = R_\delta$ 在集合 M 上是最优的（或 $\Delta(\delta, R_\delta)$ 是最优误差界），其中最小值是对所有方法 $R: Y \to X$ 取的。

现在我们考虑集合 M 具有形式

$$M_{\varphi, E} = \left\{ x \in X \mid x = [\varphi(A^* A)]^{1/2} v, \quad \|v\| \leqslant E \right\} \tag{5}$$

时的一些最优性结果，其中算子函数 $\varphi(A^* A)$ 由谱表示来定义[8,9]。当 $A: L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 是乘法算子：$Ax(s) = a(s)x(s)$ 时，算子函数 $\varphi(A^* A)$ 有表达式

$$\varphi(A^* A)x(s) = \varphi(|a(s)|^2)x(s).$$

为了导出由(4)式定义的最坏情形误差 $\Delta(\delta, R)$ 的显式最优误差界，我们假设(5)式中函数 φ 满足如下的假设条件：

假设 1.1[8,9]　(5)式中的函数 $\varphi(\lambda): (0, a] \to (0, \infty)$（其中 a 是一个常数且满足 $\|A^* A\| \leqslant a$）是连续的，且有如下性质：

(i) $\lim_{\lambda \to 0} \varphi(\lambda) = 0$;

(ii) $\varphi(\lambda)$ 在 $(0, a]$ 上严格单增;

(iii) $\rho(\lambda) := \lambda \varphi^{-1}(\lambda): (0, \varphi(a)] \to (0, a\varphi(a)]$ 是严格凸函数。

如下定理给出了最优误差界的显式表达式：

定理 1.1[8,9]　设 $M_{\varphi, E}$ 由(5)式给出，假设条件 1.1 成立，且 $(\delta^2/E^2) \in \sigma((A^* A)\varphi(A^* A))$，其中 $\sigma(A^* A)$ 表示算子 $A^* A$ 的谱，那么

$$\inf_R \Delta(\delta, R) = E \sqrt{\rho^{-1}\left(\frac{\delta^2}{E^2}\right)}. \tag{6}$$

2　问题(1)在 H_q 尺度下的最优误差界

为了便于在频域空间考虑问题(1)，我们通过使函数 $u(x, \cdot)$，$g(\cdot) := u(1, \cdot)$，$f(\cdot) := u(0, \cdot)$ 及其它出现在本文中的 t 的函数在负半轴上取零值将其定义域延拓到整个 t 实轴。令

$$\hat{h}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} h(t) \, dt \tag{ }$$

表示函数 $h(t)$ 的Fourier变换，$\|\cdot\|$ 和 $(\cdot, \cdot)$ 分别表示 $L^2(\mathbb{R})$ 空间中范数和内积。

当 $u(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ 时，问题(1)的解已由它的Fourier变换给出[4~]：

$$\hat{u}(x, \xi) = e^{(1-x)\theta(\xi)} \hat{g}(\xi), \qquad 0 \leqslant x < 1, \tag{8}$$

其中

$$\theta(\xi)=\frac{1}{2}\left[\sqrt[4]{1+16\xi^2}\left(\cos\frac{\beta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\beta}{2}\right)-1\right],\qquad \xi\in\mathbf{R},\tag{9}$$

$$\beta=\arg(1+4\xi\mathrm{i}),\ \tan\beta=4\xi,\qquad -\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4},\tag{10}$$

$$\cos\beta=\frac{\sqrt{\sqrt{1+16\xi^2}+1}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{1+16\xi^2}}.\tag{11}$$

我们引入一个r阶的Hilbert空间$H_r\mid_{r\in\mathbf{R}^+}$:

$$H_0=H:=L^2(\mathbf{R}),\ H_r=\left\{v(t)\in H\mid \|v\|_r<\infty\right\},$$

其中

$$\|v\|_r:=\|(1+\xi^2)^{r/2}\hat{v}(\xi)\|=\left(\int_{-\infty}^{\infty}(1+\xi^2)^r|\hat{v}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi\right)^{1/2},\quad r\in\mathbf{R}^+\tag{12}$$

是H_r中范数. 相应的频域中的Hilbert空间$\hat{H}_r\mid_{r\in\mathbf{R}^+}$记为:

$$\hat{H}_0=\hat{H}=L^2(\mathbf{R}),\ \hat{H}_r=\left\{\hat{v}(\xi)\in\hat{H}\mid \|\hat{v}(\xi)\|_r<\infty\right\},\tag{13}$$

这里

$$\|\hat{v}(\xi)\|_r=\|(1+\xi^2)^{r/2}\hat{v}(\xi)\|,\qquad r\in\mathbf{R}^+.$$

本文中我们假设问题(1)的解$u(x,t)$满足先验光滑性条件:

$$M_{p,E}:=\left\{u(x,\cdot)\in H\mid \|u(0,t)\|_p=\|f\|_p\leqslant E,\ p\geqslant 0\right\},\tag{14}$$

显然, $u(x,t)\in M_{p,E}$等价于$\hat{u}(x,\xi)\in\hat{M}_{p,E}$, 其中

$$\hat{M}_{p,E}:=\left\{\hat{u}(x,\xi)\in\hat{H}\mid \|\hat{u}(0,\xi)\|_p=\|\hat{f}(\xi)\|_p\leqslant E,\ p\geqslant 0\right\},$$

由(8)、(12)式和$f(t):=u(0,t)$, 我们有

$$\hat{M}_{p,E}=\left\{\hat{u}(x,\xi)\in\hat{H}\mid \|(1+\xi^2)^{(p-q)/2}\mathrm{e}^{(x/2)(\sqrt[4]{1+16\xi^2}\cos(\beta/2)-1)}\times\hat{u}(x,\xi)\|_q\leqslant E,\ 0\leqslant q\leqslant p\right\},\tag{15}$$

将问题(1)改写为算子方程

$$A_q(x)u(x,t)=g(t)=u(1,t),\qquad A_q(x)\in\mathscr{L}(H_q,H).\tag{16}$$

(16)式在频域中的等价算子方程为

$$\begin{cases}\hat{A}_q(x)\hat{u}(x,\xi)=\hat{g}(\xi)=\hat{u}(1,\xi), & \hat{A}_q(x)\in\mathscr{L}(\hat{H}_q,\hat{H}),\\ \hat{A}_q(x)=\mathscr{F}A_q(x)\mathscr{F}^{-1},\end{cases}\tag{17}$$

其中$\mathscr{F}:L^2(\mathbf{R})\to L^2(\mathbf{R})$是映任意$L^2(\mathbf{R})$中函数$v(t)$到它的Fourier变换$\hat{v}(\xi)$的(酉)Fourier算子. 由(8)式知

$$\hat{A}_q(x)=\mathrm{e}^{-(1-x)\theta(\xi)},\tag{18}$$

其中$\theta(\xi)$由(9)式给出. 由关系式

$$\left(\hat{A}_q(x)\hat{v}_1(\xi),\hat{v}_2(\xi)\right)_{L^2(\mathbf{R})}=\left(\hat{v}_1(\xi),\mathrm{e}^{-(1-x)\overline{\theta(\xi)}}\hat{v}_2(\xi)\right)_{L^2(\mathbf{R})}=\left(\hat{v}_1(\xi),(1+\xi^2)^{-q}\mathrm{e}^{-(1-x)\overline{\theta(\xi)}}\hat{v}_2(\xi)\right)_q,$$

我们有

$$\hat{A}_q^*(x)=(1+\xi^2)^{-q}\mathrm{e}^{-(1-x)\overline{\theta(\xi)}},\tag{19}$$

且$\hat{A}_q^*(x)\hat{A}_q(x):\hat{H}_q\to\hat{H}_q$由下式给出

$$\hat{A}_q^*(x)\hat{A}_q(x)=(1+\xi^2)^{-q}\mathrm{e}^{-(\sqrt[4]{1+16\xi^2}\cos(\beta/2)-1)(1-x)},\tag{20}$$

进而, 由(5)、(15)及(20)知, (15)式又可写成等价形式

$$\mathcal{M}_{\varphi,E} = \left\{\hat{u}(x,\xi)\in H_q \mid \left\|[\varphi(A_q^*(x)A_q(x))]^{-(1/2)}\hat{u}(x,\xi)\right\|_q \leqslant E\right\}, \tag{21}$$

其中

$$\varphi(A_q^*(x)A_q(x)) = (1+\xi^2)^{q-p}\mathrm{e}^{-x\left(\sqrt[4]{1+16\xi^2}\cos(\beta/2)-1\right)}, \tag{22}$$

令 $r=\sqrt[4]{1+16\xi^2}$, 那么 $r\geqslant 1$, $\xi^2=(r^4-1)/16$ 且

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+16\xi^2}}\right)} = \frac{\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{2}r},$$

因此, 由(20)及(22)式我们知道 $\varphi(\lambda)$ 可由如下参数表达式给出

$$\begin{cases}\lambda(r) = \left(1+\dfrac{r^4-1}{16}\right)^{-q}\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{(1+r^2)/2}-1\right)(1-x)},\\[2ex] \varphi(r) = \left(1+\dfrac{r^4-1}{16}\right)^{q-p}\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{(1+r^2)/2}-1\right)x},\end{cases}\qquad r\geqslant 1. \tag{23}$$

由(23)式给出的函数 $\varphi(\lambda)$ 有如下性质:

命题 2.1　设当 $0<x<1$ 时 $0\leqslant q\leqslant p$, 而 $x=0$ 时 $0\leqslant q<p$, 那么由(23)式定义的函数 $\varphi(\lambda)$ 连续且有如下性质:

(i) $\lim\limits_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda)=0$;

(ii) $\varphi(\lambda)$ 严格单增;

(iii) $\rho(\lambda)=\lambda\varphi^{-1}(\lambda)$ 严格单增且有参数表达式:

$$\begin{cases}\lambda(r) = \left(1+\dfrac{r^4-1}{16}\right)^{q-p}\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{(1+r^2)/2}-1\right)x},\\[2ex] \rho(r) = \left(1+\dfrac{r^4-1}{16}\right)^{-p}\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{(1+r^2)/2}-1\right)},\end{cases}\qquad r\geqslant 1; \tag{24}$$

(iv) $\rho^{-1}(\lambda)$ 严格单增且有参数表达式:

$$\begin{cases}\lambda(r) = \left(1+\dfrac{r^4-1}{16}\right)^{-p}\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{(1+r^2)/2}-1\right)},\\[2ex] \rho^{-1}(r) = \left(1+\dfrac{r^4-1}{16}\right)^{q-p}\mathrm{e}^{-\left(\sqrt{(1+r^2)/2}-1\right)x},\end{cases}\qquad r\geqslant 1; \tag{25}$$

(v) 对 $\rho(\lambda)$ 的反函数 $\rho^{-1}(\lambda)$, 成立

$$\rho^{-1}(\lambda) = \lambda^x\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{\lambda}\right]^{4q-4p(1-x)}(1+o(1)),\qquad \delta\to 0; \tag{26}$$

(vi) 由(24)式定义的函数 $\rho(\lambda)$ 严格凸, 当且仅当

$$\left(p\,\Psi(r)+\frac{1}{\sqrt{2}}\Phi(r)\right)\left((p-q)\,\Psi(r)+\frac{x}{\sqrt{2}}\Phi(r)\right)\left(q\,\Psi(r)+\frac{x}{\sqrt{2}}\Phi(r)\right)+$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(p(1-x)-q)(\Psi'(r)\,\Phi(r)-\Psi(r)\,\Phi'(r))>0,\qquad r\geqslant 1, \tag{2\ }$$

其中

$$\Psi(r):=\frac{r^3/4}{1+(r^4-1)/16}=\frac{4r^3}{r^4+15},\quad \Phi(r):=\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}. \tag{28}$$

证明　函数 $\varphi(\lambda)$ 的连续性是显然的.

(i) 由(23)式, 我们知道 $\lambda'(r)<0$, 即 $\lambda(r)$ 是严格单调递减的且 $\lim\limits_{r\to+\infty}\lambda(r)=0$, 因此 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\varphi(\lambda)=\lim\limits_{r\to+\infty}\varphi(r)=0$;

(ii) 由(23)式, 当 $0< x < 1, p \geqslant q \geqslant 0$ 和 $x = 0, p > q \geqslant 0$ 时, 也有 $\dot{\lambda}(r) < 0$, 故 $\varphi'(\lambda) = \dot{\varphi}(r)/\dot{\lambda}(r) > 0$, 即当 $0< x < 1, p \geqslant q \geqslant 0$ 和 $x = 0, p > q \geqslant 0$ 时, $\varphi(\lambda)$ 严格单增;

(iii) 由(ii)我们知道 $\varphi^{-1}(\lambda)$ 在命题条件下也是严格单增的, 且有参数表达式

$$\begin{cases} \lambda(r) = \left(1+\dfrac{r^4-1}{16}\right)^{q-p} e^{-\left(\sqrt{(1+r^2)/2}-1\right)x}, \\ \varphi^{-1}(r) = \left(1+\dfrac{r^4-1}{16}\right)^{-q} e^{-\left(\sqrt{(1+r^2)/2}-1\right)(1-x)}, \end{cases} \qquad r \geqslant 1,$$

因此 $\rho(\lambda) = \lambda\varphi^{-1}(\lambda)$ 也严格单增, 且有参数表达式(24);

(iv) 由(iii)知 $\rho^{-1}(\lambda)$ 也严格单增, 表达式(25)可以由(24)式直接得到;

(v) 由(25)式知

$$\ln\frac{1}{\lambda} = p\ln\left(1+\frac{r^4-1}{16}\right) + \sqrt{\frac{1+r^2}{2}} - 1 = \frac{r}{\sqrt{2}}(1+o(1)), \qquad r \to \infty,$$

等价地,

$$r = \sqrt{2}\ln\frac{1}{\lambda}(1+o(1)), \qquad \lambda \to 0, \tag{29}$$

结合(29)和(25)式, 我们有

$$\begin{aligned} \rho^{-1}(r) = {} & \left(1+\frac{r^4-1}{16}\right)^{q-p} e^{-\left(\sqrt{(1+r^2)/2}-1\right)x} = \\ & \left(\left(1+\frac{r^4-1}{16}\right)^{-p} e^{-\left(\sqrt{(1+r^2)/2}-1\right)}\right)^x \left(1+\frac{r^4-1}{16}\right)^{q-p(1-x)} = \\ & \lambda^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{\lambda}\right)^{4q-4p(1-x)}(1+o(1)), \qquad \lambda \to 0. \end{aligned} \tag{30}$$

事实上, 令 $F(\lambda) = \rho^{-1}(\lambda)\lambda^{-x}((1/\sqrt{2})\ln(1/\lambda))^{-4q+4p(1-x)}$, 易证

$$\lim_{\lambda\to 0}F(\lambda) = \lim_{r\to\infty}\rho^{-1}(r)\left(\frac{1}{\lambda(r)}\right)^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{\lambda(r)}\right)^{-4q+4p(1-x)} = 1,$$

因此, 表达式(26)成立;

(vi) 由(24)式定义的函数 $\rho(\lambda)$ 严格凸当且仅当 $\rho''(\lambda) > 0$. 注意到

$$\rho''(\lambda) = \frac{\ddot{\rho}(r)\dot{\lambda}(r) - \dot{\rho}(r)\ddot{\lambda}(r)}{(\dot{\lambda}(r))^3},$$

且当 $x > 0, p \geqslant q \geqslant 0$ 或 $x = 0, p > q \geqslant 0$ 时,

$$\dot{\lambda}(r) = -\lambda(r)\left((p-q)\Psi(r) + \frac{x}{\sqrt{2}}\Phi(r)\right) < 0,$$

故 $\rho''(\lambda) > 0$ 等价于

$$\ddot{\rho}(r)\dot{\lambda}(r) < \dot{\rho}(r)\ddot{\lambda}(r), \tag{31}$$

由于

$$\ddot{\lambda}(r) = \lambda(r)\left[\left((p-q)\Psi(r) + \frac{x}{\sqrt{2}}\Phi(r)\right)^2 - \left((p-q)\dot{\Psi}(r) + \frac{x}{\sqrt{2}}\dot{\Phi}(r)\right)\right],$$

$$\dot{\rho}(r) = -\rho(r)\left(p\Psi(r) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi(r)\right),$$

$$\ddot{\rho}(r) = \rho(r)\left[\left(p\Psi(r) + \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi(r)\right)^2 - \left(p\dot{\Psi}(r) + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{\Phi}(r)\right)\right],$$

其中, $\Psi(r)$ 和 $\Phi(r)$ 由(28)式给出. 经过简单计算我们知道结论(vi)成立. 证明完毕.

注 2.1　函数 $\rho(\lambda)$ 的严格凸性有一个易于验证的充分条件，即若成立

$$p(1-x)-q>0, \tag{32}$$

则不等式(2)也成立。

如第 1 节所述，任一算子 $R(x): H\to H_q$ 可看作问题(1)由测量数据 $g_\delta(t)\in H$ 求解 $u(x,t)$ 的一种特殊方法，且问题(1)的近似解由 $R(x)g_\delta(t)$ 给出。我们考虑在 H_q 范数($0\leqslant q\leqslant p$)意义下的最好可能的最坏情形误差(即最优误差界)：

$$\omega_q(\delta,x):=\inf_{R(x):H\to H_q}\ \sup_{\substack{g_\delta\in H,\, u(x,\cdot)\in M_{p,E}\\ \|g_\delta-g\|\leqslant\delta}}\|R(x)g_\delta(t)-u(x,t)\|_q, \tag{33}$$

其中 $M_{p,E}$ 由(14)式给出。由 Parserval 公式知 $\omega_q(\delta,x)=\hat{\omega}_q(\delta,x)$，这里

$$\hat{\omega}_q(\delta,x):=\inf_{\hat{R}(x):\hat{H}\to\hat{H}_q}\ \sup_{\substack{\hat{g}_\delta\in\hat{H},\,\hat{u}(x,\xi)\in\hat{M}_{\varphi,E}\\ \|\hat{g}_\delta-\hat{g}\|\leqslant\delta}}\|\hat{R}(x)\hat{g}_\delta(\xi)-\hat{u}(x,\xi)\|_q,$$

其中 $\hat{M}_{\varphi,E}$ 由(21)式给出，而 φ 由(23)式给出。应用定理 1.1，其中 $A: X\to Y$ 由 $\hat{A}_q(x):\hat{H}_q\to\hat{H}$ 代替，并利用命题 2.1 可得

定理 2.1　设当 $0<x<1$ 时 $0\leqslant q\leqslant p$，而当 $x=0$ 时 $0\leqslant q<p$，$\delta^2/E^2\leqslant 1$，那么在条件(2)下，成立

$$\omega_q(\delta,x)=E^{1-x}\delta^x\left[\sqrt{2}\ln\frac{E}{\delta}\right]^{2q-2p(1-x)}(1+o(1)),\qquad \delta\to 0. \tag{34}$$

证明　由(20)和(22)式，我们有

$$\hat{A}_q^*(x)\hat{A}_q(x)\varphi(\hat{A}_q^*(x)\hat{A}_q(x))=(1+\xi^2)^{-p}e^{-(\sqrt[4]{1+16\xi^2}\cos(\beta/2)-1)},$$

因此

$$\mathrm{range}(\hat{A}_q^*(x)\hat{A}_q(x)\varphi(\hat{A}_q^*(x)\hat{A}_q(x)))=[0,1],\qquad \forall x\in[0,1],$$

即

$$\sigma(\hat{A}_q^*(x)\hat{A}_q(x)\varphi(\hat{A}_q^*(x)\hat{A}_q(x)))=[0,1].$$

由 $\delta^2/E^2\leqslant 1$，我们知道 $(\delta^2/E^2)\in\sigma(\hat{A}_q^*(x)\hat{A}_q(x)\varphi(\hat{A}_q^*(x)\hat{A}_q(x)))$。应用定理 1.1 和(26)式，可得

$$\begin{aligned}\omega_q(\delta,x)&=\hat{\omega}_q(\delta,x)=E\sqrt{\rho^{-1}((\delta^2/E^2))}=\\&E^{1-x}\delta^x\left(\sqrt{2}\ln(E/\delta)\right)^{2q-2p(1-x)}(1+o(1)),\qquad \delta\to 0.\end{aligned}$$

注 2.2　由(2)式我们知道若 $p(1-x)-q=0$，那么当 $0<x<1$，$p\geqslant q\geqslant 0$ 和 $x=0$，$p>q\geqslant 0$ 时，不等式(2)自然成立。进而，由(30)式可得在此情况下 $\rho^{-1}(\lambda)=\lambda^x$，那么 $\omega_q(\delta,x)=E^{1-x}\delta^x$，这表明当 $q=p(1-x)$ 时最优误差界 $\omega_q(\delta,x)$ 是 Hölder 型连续依赖于噪音水平 δ。

推论 2.1　设 $0\leqslant q<p$，$\delta^2/E^2\leqslant 1$，那么在条件(32)下成立

$$\omega_q(\delta,x)=E^{1-x}\delta^x\left[\sqrt{2}\ln\frac{E}{\delta}\right]^{2q-2p(1-x)}(1+o(1)),\qquad \delta\to 0.$$

证明　由注 2.1，条件(32)意味着(2)式成立，且此时 p 不可能等于 q。

注 2.3　对于 IHCP 我们更感兴趣的是 $x=0$ 附近的区域，例如 $0\leqslant x<1/2$。在此情况下，设 $p\geqslant 2q\geqslant 0$，那么 $p(1-x)-q>(p/2)-q\geqslant 0$，即条件(32)成立。因此，最优误差估计(34)对于 $x\in[0,1/2)$ 也必然成立。

对于构造特殊的最优正则化方法 $R_\alpha(x): H\to H_q$，即使得正则解 $u_\alpha^\delta(x,t)=R_\alpha(x)g_\delta(t)$

保证最优误差界 $\| u_\alpha^\delta(x, t) - u(x, t) \|_q \leqslant \omega_q(\delta, x)$ 成立的工作将在下一篇文章中给出•

[参 考 文 献]

[1] Beck J V, Blackwell B, Clair C R. Inverse Heat Conduction: Ⅰll_Posed Problem [M]. New York: Wiley, 1985, 1—8, 108—110.

[2] Carrasso A. Determining surface temperature from interior observations[J]. SIAM Journal of Applied Mathematics, 1982, **42**(3): 558—5 4.

[3] Beck J V. Nonlinear estimation applied to the nonlinear inverse heat conduction problem[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 19 0, **13**(4): 03— 16.

[4] FU Chu_li, ZHU You_bin, QIU Chun_yu. Wavelet regularization for an inverse heat conduction problem [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, **288**(1): 212—222.

[5] XIONG Xiang_tuan, FU Chu_li, LI Hong_fang. Central difference schemes in time amd error estimate on a non_standard inverse heat conduction problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, **157**(1): —91.

[6] FU Chu_li, XIONG Xiang_tuan, LI Hong_fang, et al. Wavelet and spectralregularized methods for a sideways parabolic equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, **160**(3): 881—908.

[ ] 邱春雨, 陶建红, 傅初黎. 一维非标准型逆热传导问题的 Fourier 正则化方法[J]. 兰州大学学报, 2002, **38**(1): 1—5.

[8] Tautenhahn U. Optimal stable approximations for the sideways heat equation[J]. Journal of Inverse and Ⅰll_Posed Problems, 199 , **5**(3): 28 —30 .

[9] Tautenhahn U. Optimality for ill_posed problems under general source conditions[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 1998, **19**(3/4): 3 —398.

Optimal Error Bound in a Sobolev Space of Regularized Approximation Solutions for a Sideways Parabolic Equation

LI Hong_fang, FU Chu_li, XIONG Xiang_tuan

(Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou 30000, P.R.China)

Abstract: The inverse heat conduction problem (IHCP) is severely ill_posed problem in the sense that the solution (if it exists) does not depend continuously on the data. But now the results on inverse heat conduction problem are mainly devoted to the standard inverse heat conduction problem. Some optimal error bounds in a sobolev spaceof regularized approximation solutions for a sideways parabolic equation, i.e., a non_standard inverse heat conduction problem with convection term which appears in some applied subject are given.

Key words: inverse heat conduction problem; ill_posed problem; sideways parabolic equation; regularization; optimal error bound