

文章编号: 1000\_0887(2005) 10\_1143\_09

# 分层流体中的二维代数孤立波 及其垂向结构\*

苏晓冰<sup>1,2</sup>, 魏 岗<sup>1,2</sup>, 戴世强<sup>3</sup>

(1. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200030;

2. 解放军理工大学 理学院, 南京 211101;

3. 上海大学 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委戴世强来稿)

**摘要:** 研究具有自由面的, 上部为浅层的大深度分层流体中代数孤立波, 考察其垂向结构所对应的本征值问题, 给出了二维 Benjamin-Ono 方程的一个解析解, 并根据色散关系作了物理解释. 作为数值例子, 研究了具有 Holmboe 型密度分布的密跃层结构的特殊情形, 并用射线理论探讨了这种内波的传播机制

**关键词:** 二维 Benjamin-Ono 方程; 分层流体; 本征值问题; 内波垂向结构

**中图分类号:** O353.2      **文献标识码:** A

## 引 言

在连续分层海洋中, 随着扰动范围接近于密度垂向变化的尺度, 会出现一类特殊形式的孤立波——代数孤立波, 它的控制方程为 Benjamin-Ono 方程(以下简称为 BO 方程)<sup>[1,2]</sup>, 其垂向结构可化为求解一类 Sturm-Liouville 本征值问题<sup>[3]</sup>(以下简称为 S-L 问题)。

BO 方程源于普遍的物理海洋学背景, 且具有许多与 KdV 型方程相类似的性质, 同时还存在与众不同的代数孤立波解, 因此, 该方程及其应用研究一直受到广泛重视. 一维 BO 方程可采用拟 Lagrange 坐标的 Long 方程导出<sup>[1]</sup>, 或直接由 Euler 方程导出<sup>[3]</sup>. 有关一维或一维高阶 BO 方程及其解的性态、代数孤立波的相互作用等问题已得到广泛研究<sup>[4-7]</sup>. 二维 BO 方程由 Ablowitz 和 Segur<sup>[8]</sup>在研究代数孤立波受横向扰动情况下的稳定性时建立, 对这类方程的研究相对较少, 可能与其方程为不可积系统有关. 最近 Tsuji 等人<sup>[9]</sup>对二流体系统中的二维 BO 方程进行了数值模拟, 然而反映物理实质的解析结果尚未见报道。

内波垂向结构的 S-L 问题通常与边界条件、密度垂向分布等因素有关. 对于密度的指数分布, Benjamin<sup>[1]</sup>获得了自由面的“刚盖”近似下的解析解, 证明了该条件下可以忽略偶数模态

\* 收稿日期: 2004\_03\_25; 修订日期: 2005\_05\_15

基金项目: 国防预研基金资助项目(51443030103QT0601); 中国博士后基金资助项目(2004036099); 海洋工程国家重点实验室基金资助项目(0502)

作者简介: 苏晓冰(1958—), 男, 汉族, 江苏人, 副教授, 硕士;

魏岗(联系人, Tel: + 86\_21\_62933162; E-mail: Gwei@mail.shu.edu.cn)。

对内孤立波的影响; 对于非常弱的 Holmboe 型密度分布, 程友良等人<sup>[3]</sup>证明了满足上、下界面分别有第二类和第一类边界条件的垂向结构存在第一模态(非振荡型)的 Legendre 多项式解。然而对于一般密度分布, 且考虑自由面效应的弱非线性内波的垂向结构, 求解通常比较困难。值得指出的是, 射线理论正在被愈来愈广泛地用于内波传播问题的研究<sup>[10-12]</sup>。

本文拟从 Euler 方程出发, 对具有自由面的上部浅层的大深度分层流体, 推导二维 BO 方程及其相应的 S<sub>L</sub> 问题, 利用试探法探求二维 BO 方程的解析解; 利用数值模拟求解 Holmboe 型密度分布下内波垂向结构的 S<sub>L</sub> 问题, 并借助射线理论探究此类弱非线性内波的传播机制。

## 1 控制方程及其推导

考虑不可压、无粘流动, 取垂直向上为  $z$  轴正方向, 自由面位于  $z = 0$ , 则控制方程组为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \rho = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = 0, \quad (2)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{V} \right] = -\nabla p - \rho \mathbf{g}, \quad (3)$$

式中  $\mathbf{V} = (u, v, w)$ ,  $\mathbf{g} = g(0, 0, 1)$  分别为流体速度和重力加速度。边界条件为<sup>[13, 14]</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{g}{c^2} w = 0 & (z = 0), \\ w \rightarrow 0 & (z \rightarrow \infty), \end{cases} \quad (4)$$

式中  $c$  为波的传播速度。考虑层化海洋的密跃层结构, 取 Holmboe 型密度分布<sup>[15]</sup>

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_{\infty} \exp[-\alpha \tanh(\beta_0(z + h_0)/h_0)] & (-2h_0 \leq z \leq 0), \\ \rho_{\infty} = \text{const} & (z \leq -2h_0). \end{cases} \quad (5)$$

相应的 Brunt-Vaisala 频率为

$$N^2(z) = \begin{cases} \frac{g\alpha_0}{h_0} \text{sech}^2(\beta_0(z + h_0)/h_0) & (-2h_0 \leq z \leq 0), \\ 0 & (z \leq -2h_0), \end{cases} \quad (6)$$

式中  $h_0$  为密跃层中心深度,  $\beta_0$  为描述密度跃变强度的参数, 假定  $z = -2h_0$  处的  $\rho(z)$  连续。

以  $h_0$ 、 $a$  和  $\lambda$  分别表示特征长度、特征波幅和特征波长, 假设弱非线性参数  $\varepsilon (= a/h_0)$  与色散参数  $\mu (= h_0/\lambda)$  满足平衡关系:  $\varepsilon = O(\mu)$ 。

对于上层流体运动 ( $-2h_0 \leq z \leq 0$ ), 假定非线性长波在  $y$  方向具有弱的传播特性, 作如下 Gardner-Morikawa 变换<sup>[16]</sup> (以下简称为 G<sub>M</sub> 变换):

$$\xi = \alpha(x - ct), \quad \eta = \varepsilon^{3/2}y, \quad \zeta = z, \quad \tau = \varepsilon^2t, \quad (7)$$

其中  $c = c_0 + \varepsilon_1 + O(\varepsilon^2)$ ,  $\kappa = 1 + \varepsilon_1 + O(\varepsilon^2)$ , 这里  $\kappa$  为波数因子,  $c_0$  为线性长波传播速度,  $c_i (i = 1, 2, \dots)$  及  $\kappa_i (i = 1, 2, \dots)$  为待定常数, 它们是各阶波速和波数的修正因子。将各个变量按如下小参数  $\varepsilon$  展开:

$$u(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \varepsilon u_1(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \varepsilon^2 u_2(\xi, \eta, \zeta, \tau) + O(\varepsilon^3), \quad (8)$$

$$v(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \varepsilon^{3/2} v_1(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \varepsilon^{5/2} v_2(\xi, \eta, \zeta, \tau) + O(\varepsilon^{7/2}), \quad (9)$$

$$w(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \varepsilon^2 w_1(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \varepsilon^3 w_2(\xi, \eta, \zeta, \tau) + O(\varepsilon^4), \quad (10)$$

$$p(\xi, \eta, \zeta, \tau) = p_0(\zeta) + \varepsilon p_1(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \varepsilon^2 p_2(\xi, \eta, \zeta, \tau) + O(\varepsilon^3), \quad (11)$$

$$\rho(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \rho_0 + \varepsilon \rho_1(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \varepsilon^2 \rho_2(\xi, \eta, \zeta, \tau) + O(\varepsilon^3), \quad (12)$$

式中已考虑了不可压缩条件以及静力平衡条件  $dp_0(\zeta)/d\zeta = -\rho_0(\zeta)g$ 。将上述变换和展开式代入方程(1) ~ (3) 和边界条件(4), 比较  $\varepsilon$  的同次幂系数, 可获得关于  $\varepsilon$  的各阶方程。

从  $\varepsilon$  的最低阶方程可导出关于  $w_1$  的方程和边界条件

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \rho_0 \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right) - \frac{g}{c_0^2} \frac{d\rho_0}{d\zeta} w_1 = 0, \tag{13}$$

$$\frac{dw_1}{dz} - \frac{g}{c_0^2} w_1 = 0 \quad (\text{在 } z = 0) \cdot \tag{14}$$

用分离变量的方法求解上述方程, 为此设

$$w_1(\xi, \eta, \zeta, \tau) = - \frac{\partial f_1(\xi, \eta, \tau)}{\partial \xi} \varphi(\zeta), \tag{15}$$

其中  $f_1(\xi, \eta, \tau)$  代表待定的一阶波幅函数, 它满足条件  $f_1|_{\xi \rightarrow \infty, \eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ 。将式(15)代入方程(13)和(14), 可推导出控制垂向结构的常微分方程和自由面条件, 即

$$\frac{d}{d\zeta} \left( \rho_0 \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) - \frac{g}{c_0^2} \frac{d\rho_0}{d\zeta} \varphi = 0, \tag{16}$$

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} - \frac{g}{c_0^2} \varphi = 0 \quad (\text{在 } \zeta = 0), \tag{17}$$

$u_1, v_1, p_1, \rho_1$  可进一步由  $f_1$  和  $\varphi$  求得。

从  $\varepsilon$  的下一阶方程可推得  $w_2$  的控制方程和边界条件

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \rho_0 \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} \right) - \frac{g}{c_0^2} \frac{d\rho_0}{d\zeta} w_2 = J(f_1; \rho_0, \varphi), \tag{18}$$

$$\frac{dw_2}{d\zeta} - \frac{g}{c_0^2} w_2 = - \frac{2g}{c_0^2} c_1 w_1 \quad (\text{在 } z = 0), \tag{19}$$

这里  $J$  为一阶解的已知泛函。方程(16)和(18)中函数  $\varphi(\zeta)$  和  $w_2(\xi, \eta, \zeta, \tau)$  满足可解性条件<sup>[16, 17]</sup>

$$\rho_0 \left\{ \varphi \quad w_2 - \varphi \quad w_2' \right\} \Big|_{\zeta = -2h_0} = - \int_0^{2h_0} J \cdot \varphi d\zeta. \tag{20}$$

将边界条件(17)、(19)以及式(15)代入方程(20)经整理得:

$$c_0 \rho_0 \left\{ \varphi \quad w_2 - \varphi \quad w_2' \right\} \Big|_{\zeta = -2h_0} = 2a \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + b \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + d f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + c_0 a \int_0^\xi \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} d\zeta, \tag{21}$$

其中系数

$$a = - \int_0^{2h_0} (\rho_0 \varphi)' \varphi d\zeta, \quad b = - c_1 \left[ 2 \int_0^{2h_0} (\rho_0 \varphi)' \varphi d\zeta - \frac{2g\rho_0(0) \varphi^2(0)}{c_0^2} \right],$$

和

$$d = \int_0^{2h_0} [3(\rho_0 \varphi^2)' - 2(\rho_0 \varphi \varphi') - 2\rho_0 \varphi \varphi''] \varphi d\zeta.$$

对于下层流体 ( $-\infty \leq z \leq -2h_0$ ), 假设波动仅来自上层流体的扰动, 作如下的 G\_M 变换:

$$\xi = \varepsilon(x - ct), \quad \eta = \varepsilon^{3/2}y, \quad Z = \varepsilon(z + 2h_0), \quad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{22}$$

根据连续性方程和上述变换, 将各变量作如下展开:

$$u(\xi, \eta, Z, \tau) = \varepsilon^2 U_1(\xi, \eta, Z, \tau) + O(\varepsilon^3), \tag{23}$$

$$v(\xi, \eta, Z, \tau) = \varepsilon^2 V_1(\xi, \eta, Z, \tau) + O(\varepsilon^3), \tag{24}$$

$$w(\xi, \eta, Z, \tau) = \varepsilon^2 W_1(\xi, \eta, Z, \tau) + O(\varepsilon^3), \tag{25}$$

$$p(\xi, \eta, Z, \tau) = p_0(z) + \varepsilon^2 P_1(\xi, \eta, Z, \tau) + O(\varepsilon^3), \tag{26}$$

$$\rho(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \rho_0 + \varepsilon \rho_1(\xi, \eta, \zeta, \tau) + \varepsilon^2 \rho_2(\xi, \eta, \zeta, \tau) + O(\varepsilon^3). \quad (27)$$

将上述 G<sub>M</sub> 变换和各展开式代入方程(1)~(4), 可得关于  $\varepsilon$  的各阶方程.

从  $\varepsilon$  的最低阶方程可导出关于  $W_1$  的方程和边界条件, 即

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W_1}{\partial Z^2} = 0, \quad (28)$$

$$\begin{cases} W_1(\xi, \eta, Z, \tau) |_{Z=0} \rightarrow -\frac{\partial f_1}{\partial \xi} \varphi(\zeta) \Big|_{\zeta \rightarrow -2h_0} & (Z \rightarrow -2h_0), \\ W_1(\xi, \eta, Z, \tau) |_{Z \rightarrow \infty} \rightarrow 0 & (|Z|, |\xi| \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (29)$$

上述边值问题的解为如下的 Cauchy 主值积分<sup>[17]</sup>, 即

$$W_1(\xi, \eta, Z, \tau) = \frac{1}{\pi} \text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_1(\xi', \eta, \tau)}{\partial \xi'} \frac{Z}{Z^2 + (\xi - \xi')^2} d\xi', \quad (30)$$

上式对  $Z$  求导, 并取  $Z \rightarrow 0$  的极限, 得

$$\frac{\partial W_1(\xi, \eta, 0, \tau)}{\partial Z} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{f_1(\xi', \eta, \tau)}{\xi - \xi'} d\xi'. \quad (31)$$

根据匹配原则<sup>[18]</sup>, 上、下层各阶变量摄动解及其导数在  $z = -2h_0$  处保持一致, 可导出

$$W_1(\xi, \eta, Z, \tau) |_{Z \rightarrow 0} = \frac{\partial f_1(\xi, \eta, \tau)}{\partial \xi} \varphi(\zeta) \Big|_{\zeta \rightarrow -2h_0}, \quad (32)$$

$$\varphi(\zeta) |_{\zeta \rightarrow -2h_0} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial \xi} \Big|_{\zeta \rightarrow -2h_0} = \frac{\partial W_1}{\partial Z} \Big|_{Z \rightarrow 0} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \aleph(f_1) \Big|_{\zeta \rightarrow -2h_0}, \quad (34)$$

$$\varphi'(\zeta) |_{\zeta \rightarrow -2h_0} = 0, \quad (35)$$

其中  $\aleph(f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi', \eta, \tau) / (\xi - \xi') d\xi'$  为 Hilbert 变换, 不失一般性, 令  $\varphi(-2h_0) = 1$ .

将式(33)、(34)和(35)代入式(21), 则有

$$2A \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + B \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + D f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + c_0 \rho_\infty \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \aleph(f_1) + c_0 A \int_0^\xi \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} d\xi = 0. \quad (36)$$

上述方程即为控制弱非线性长波的二维 BO 方程. 取“刚盖”近似, 令  $\varphi(0) = 0$ , 则有

$$\frac{\partial f_1}{\partial \tau} - c_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \alpha f_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \aleph(f_1) + \gamma \int_0^\xi \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} d\xi = 0, \quad (37)$$

其中  $\alpha = d/2a$ ,  $\beta = c_0 \rho_\infty / 2a$ ,  $\gamma = c_0 / 2$ . 容易验证: 当  $c_1 = 0$  时, 式(36)或式(37)与 Ablowitz 和 Segur<sup>[8]</sup> 的二维 BO 方程完全一致.

## 2 二维 BO 方程的物理解

作变量代换  $\xi = \bar{\xi} - c_0 \tau$ , 假定二维代数孤立波沿  $x$  方向传播占优, 其波长  $\lambda$  为一维代数孤立波波长  $\lambda_0$  的修正, 即

$$\lambda = \lambda_0(1 - \delta) = \frac{\beta}{c_0 - c_1}(1 - \delta), \quad (38)$$

其中小参数  $\delta$  表示修正因子. 设二维代数孤立波的解具有如下形式

$$f_1(\bar{\xi}, \eta, \tau) = \frac{a\lambda^2}{(\bar{\xi} + \mu\eta)^2 + \lambda^2}, \quad (39)$$

其中  $a$ 、 $\mu$  为待定系数, 且  $\mu$  正比于波数比, 即  $\mu \propto O(k_y/k_x)$ , 这里  $k_x$ 、 $k_y$  分别为  $x$  和  $y$  方向的

波数• 将式(39)代入方程(37), 经系数比较有

$$\mu^2 = \frac{(c_0 + c_1) \lambda + \beta}{\gamma \lambda^2}, \tag{40}$$

$$a = -\frac{4\beta}{\alpha \lambda} \approx -a_0(1 + \delta), \tag{41}$$

式中  $a_0 = 4\beta/(\alpha\lambda_0)$  为一维代数孤立波的波幅• 将式(38)代入式(40), 可导出

$$\mu \approx \left[ \frac{(c_0 + c_1) \delta}{\gamma} \right]^{1/2} (\lambda_0)^{-1/2}. \tag{42}$$

由于  $\lambda_0 \propto O(k_x)^{-1}$ , 取  $\delta \propto O(\gamma/(c_0 + c_1))$ , (注意  $0 < \delta < 1$ ), 利用  $\mu \propto O(k_y/k_x)$ , 立即有

$$k_y^2 \sim O(k_x^3). \tag{43}$$

满足 BO 方程的色散关系式<sup>[1]</sup>为

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 - 2\beta c_0 k^2 |k| \tag{44}$$

利用式(43), 上式化为

$$\begin{aligned} \omega^2 = & c_0^2(k_x^2 + k_y^2) - 2\beta c_0(k_x^2 + k_y^2) \left| k_x \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{k_y}{k_x} \right)^2 \right] \right| + O(k_x^5) \approx \\ & c_0^2 k_x^2 \left[ 1 + \left( \frac{k_y}{k_x} \right)^2 - 2 \frac{\beta}{c_0} |k_x| \right], \end{aligned} \tag{45}$$

或近似地有

$$k_x \omega = c_0 k_x^2 - \beta k_x^2 |k_x| + \frac{c_0}{2} k_y^2. \tag{46}$$

容易验证, 式(46)恰为二维 BO 方程(37)所对应的色散关系• 因此, 所设解(39)满足非线性波动传播的物理实质, 代表二维代数孤立波, 与一维形式相比, 它的波长变短、波幅增高•

### 3 垂向结构分析

本节首先采用数值模拟求解本征值问题, 并用 WKB 方法<sup>[18]</sup>验证数值结果的可靠性; 其次讨论密跃层结构对内波垂向结构的影响; 最后利用射线理论分析弱非线性内波的传播•

方程(16)、边界条件(17)和式(33)构成弱非线性内波垂向结构的非标准 Sturm-Liouville 本征值问题, 方程(16)可化为

$$\varphi'' - \frac{N^2}{g} \varphi + xN^2 \varphi = 0, \tag{47}$$

$$\frac{d\varphi}{d\zeta} - xg\varphi = 0 \quad (\zeta = 0), \tag{48}$$

$$\varphi = 0 \quad (\zeta = -2h_0), \tag{49}$$

其中  $x = 1/c_0^2$  为待求的本征值, 它同时出现在方程和边界条件中• 采用二阶中心差分格式和一阶迎风格式, 离散方程(47)和边界条件(48)、(49)• 根据离散方程组存在非平凡解的条件可确定一组序列本征值  $x^{(i)} \{ 0 < x^{(1)} < x^{(2)} < \dots < x^{(n)} \}$ , 对应的本征函数  $\{ \varphi \}$  决定了内波的垂向结构• 数值试验表明, 随着垂向的等分  $m$  的增大, 本征值序列  $x^{(i)}$  趋于稳定, 如图1所示, 其中横坐标为第  $i$  个本征值的序列数  $\{ n \}$ , 纵坐标为序列本征值的相对误差  $E/(%)$ •

对于高阶模式, 若满足条件  $(x^{(i)} g) \gg 1$ , 则方程(47)退化为

$$\varphi'' + xN^2 \varphi = 0 \tag{50}$$

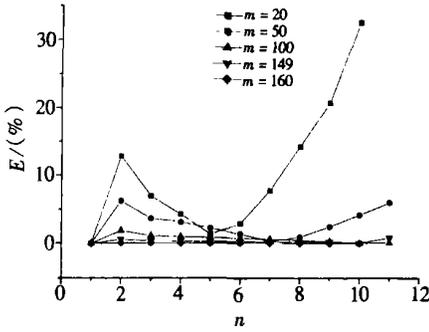


图1 垂向等分数  $m$  对序列  $\{n\}$  本征值  $x^{(i)}$  的影响

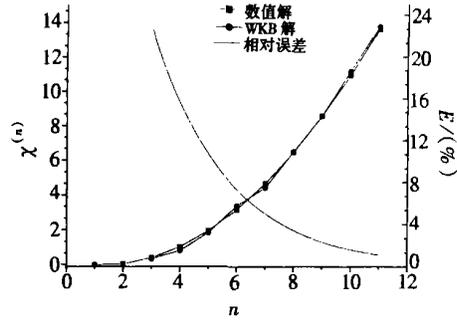


图2 直接数据模拟和 WKB 计算的本征值  $x^{(i)}$  比较

上述方程经 Liouville\_Green 变换<sup>[18]</sup>, 且满足条件  $x^{(i)} \gg [(N^2)''/(4N^4) - 5(N')^2/(16N^2)]$ , 则振荡解可由 WKB 方法给出

$$\varphi(\zeta) = \frac{D \cos\left[X \int_{\zeta}^{\zeta_0} \sqrt{N^2} d\zeta'\right] + F \sin\left[X \int_{\zeta}^{\zeta_0} \sqrt{N^2} d\zeta'\right]}{4\sqrt{N^2}} \quad (51)$$

式中  $D, F$  为待定常数。将上式代入边界条件(48)和(49), 则本征值由下列超越方程决定

$$x^{(i)} = \frac{1}{N\sqrt{N}} \frac{dN^2}{d\zeta} \tan\left[x^{(i)} \int_{\zeta}^{\zeta_0} \sqrt{N^2} d\zeta'\right] \quad (52)$$

图2比较了两种方法计算的结果: 当  $x^{(i)}$  较大时, 两者计算的本征值趋于一致; 而当  $x^{(i)}$  较小时, WKB 方法失效, 故误差较大。上述分析表明, 所用数值方法是有效的。

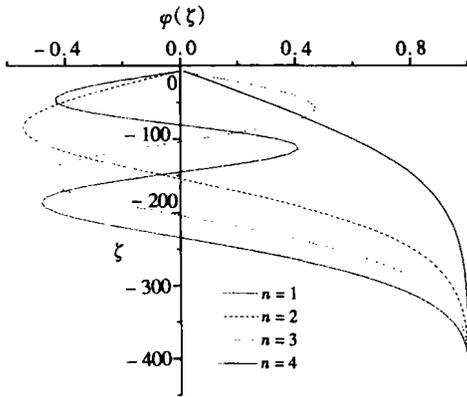


图3 四阶内波模式对应的本征函数  $\varphi_i^z$

取典型的海洋跃层结构参数,  $\rho_\infty = 1.0124 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $h_0 = 100 \text{ m}$ ,  $\alpha_0 = 0.0125$ ,  $\beta_0 = 1$ , 图3给出了前4阶内波模式对应的本征函数。试验表明: 在上部浅层分层的大深度海洋中, “刚盖”近似条件符合得相当好; 第1模式( $n = 1$ )对应的本征函数  $\varphi_1^{(1)}$  在密跃层内是深度的单调增函数, 高阶模式( $n \geq 2$ )对应的本征函数  $\varphi_i^{(n)}$  为振荡型, 在开区间  $(0, -\infty)$  保持  $n$  个零点, 与标准 SL 问题的性态类似。

随着密跃层厚度变小( $\beta_0$  增大, 其它条件不变), 亦即密度跃变的强度增大, 此时, 同一模式本征值  $x^{(n)}$  增加, 相应的长波传播速度  $c_0^{(n)}$  减小; 最低阶模式( $n = 1$ )的本征函数衰减得更快, 高阶模式(例如  $n = 3$ )的波数变大, 如图4所示, 这种变化伴随着内波模式的转换, 极易导致系统失稳或界面破碎。此外, 随着  $\beta_0$  的增加, 数值计算出的有效模式数  $n$  减少, 这时系统趋近于两层流体模型, 相应地, 系统仅存在快波和慢波两种模式。

波矢的空间曲线构成射线。射线理论源于几何光学近似, 对于 BV 频率  $N$  在垂向急剧变化的情形, 若内波特征量沿水平坐标和时间是缓变的, 而沿铅垂方向坐标是快变的, 则几何光学近似仍然有效<sup>[19]</sup>。考虑较高阶的内波模式, 垂向波数  $k_z$  变大, 取代数孤立波波长和 WKB 解

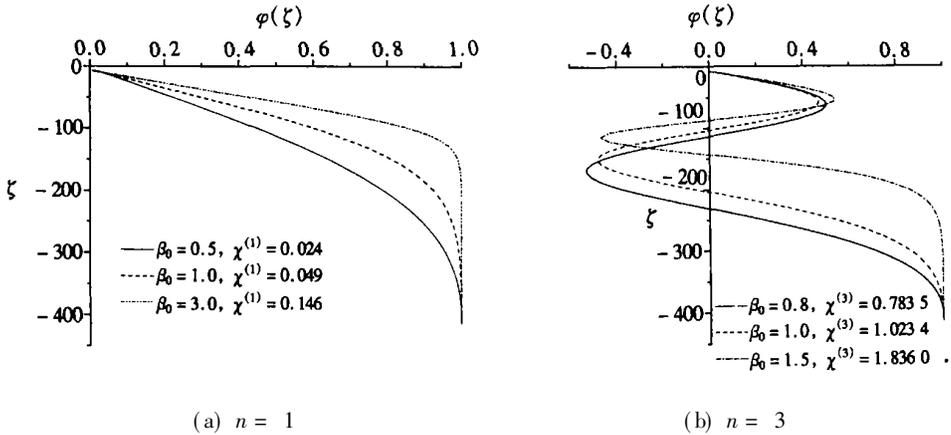


图 4 密度跃变强度的变化对本征函数  $\varphi_i^{(n)}$  的影响

的垂向波数, 则内波的波矢可近似表示为

$$\mathbf{k}^{(n)} = (k_x^{(n)}, k_z^{(n)}) = (2\pi(\lambda^{(n)})^{-1}, x^{(n)} \sqrt{N^2}) \cdot \quad (53)$$

为此, 描述内波的相位方程可写为

$$\xi \pm \frac{\lambda^{(n)}}{2\pi} x^{(n)} \int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{N^2(\zeta')} d\zeta' = \xi_0, \quad (54)$$

对应的射线方程为

$$\xi \mp \int_{\xi_0}^{\xi} 2\pi / (\lambda^{(n)} x^{(n)} \sqrt{N^2(\zeta)}) d\zeta = \xi_0, \quad (55)$$

其中负号表示反射射线满足的方程。

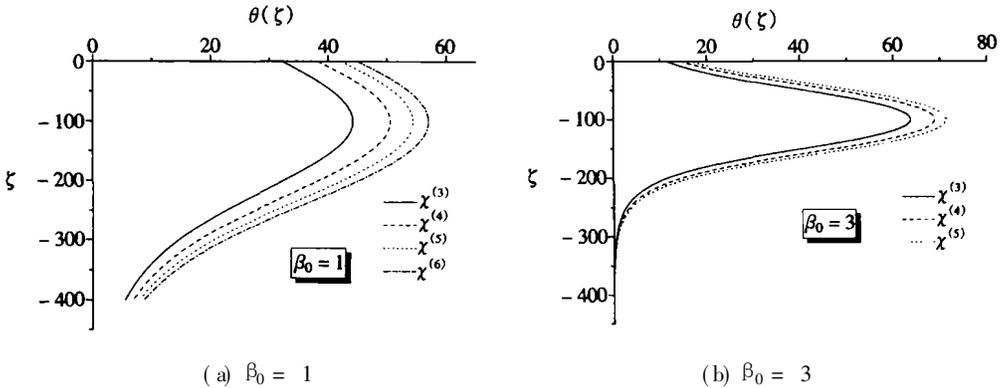
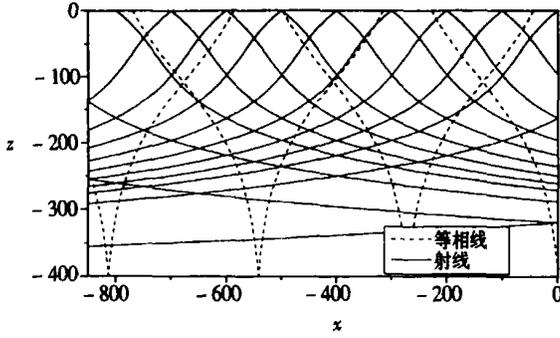


图 5 密度跃变强度的变化对射线角  $\theta$  的影响

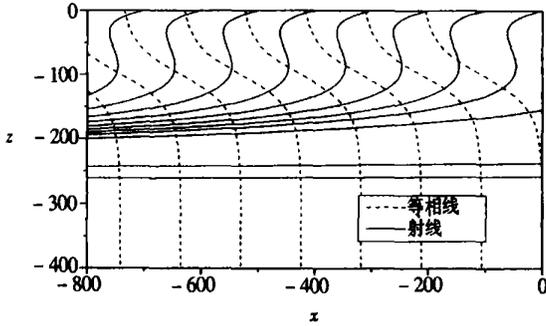
图 5 是不同内波模式的射线角  $\theta = \arctan(k_z/k_x)$  随深度的变化, 由于  $N(\zeta)$  的非均匀性, 弱非线性的内波沿弯曲的射线传播。图中, 不同的模式在自由面有不同的射线角, 模式数  $n$  越小, 在自由表面和深海域 ( $\zeta \rightarrow -\infty$ ) 的射线角就越小; 对于高阶本征模态, 由于  $k_x^{(n)} \ll k_z^{(n)}$ , 射线角在自由面趋于  $\pi/2$ , 这类弱非线性内波在自由面附近以垂向传播的形式存在; 随着跃变程度的增强, 在自由面和深海域的射线角趋于零, 内波在自由面和深海域近乎水平传播, 如图 5(b) 所示。

图 6 是根据式(54)和(55)绘制的模式数  $n = 3$  的等相线和射线。图中, 对应的弱非线性内波在自由表面和  $N(\zeta)$  趋于常数的深度间来回振荡。随着跃变程度的增强 ( $\beta_0$  变大), 一方面, 弱非线性内波将被限制在密跃层内传播, 另一方面, 高阶本征模态的射线在跃层中心附近

的弯折程度加剧(见图 6(b)),由此可见,高阶模态的作用是导致系统失稳的重要因素。



(a)  $\beta_0 = 1$



(b)  $\beta_0 = 3$

图 6 模态数  $n = 3$  的等相线和射线

## 4 结 论

根据以上工作,我们得到几点结论:

1) 本文建立了具有自由面的上层很浅的大深度分层流体中的二维 BO 方程及其内波垂向结构所满足的 Sturm-Liouville 本征值问题,获得了满足二维 BO 方程的具有波动物理特征的解析解,其代表的二维代数孤立波与一维形式相比,波长变短、波幅增大。

2) 弱非线性内波垂向结构的非标准 S-L 本征值问题数值模拟表明:密度跃变趋强导致跃层中心附近高阶模态解的变化加剧,这种变化伴随着内波模态的转换,同时也是导致系统失稳的直接原因之一。

3) 根据射线理论,获得了上述弱非线性内波沿弯折射线传播的规律,描绘了导致界面失稳的重要因素之一的物理图像:高阶本征模态的射线在跃层中心附近的弯折程度加剧。

### [参 考 文 献]

- [1] Benjamin T B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth[J]. J Fluid Mech, 1967, 29: 559—592.
- [2] Ono H. Algebraic solitary waves in stratified fluids[J]. J Phys Soc Japan, 1975, 39(4): 1082—1092.
- [3] 程友良,戴世强.大深度分层流体中的二阶内孤立波[A].见:周连第,邵维文,鲁传敬等编.第五届全国水动力学学术会议暨第十五届水动力学研讨会论文集[C].北京:海洋出版社,2001,53—60.

- [4] 张领海. 广义三阶 Benjamin-Ono 方程[J]. 数学物理学报, 1993, 13(4): 473—479.
- [5] 韩效育, 郝海龙. 高阶 Benjamin-Ono 方程解的衰变性质[J]. 数学年刊, A 辑, 1996, 17(2): 163—172.
- [6] 张鸿庆, 张玉峰. Benjamin 方程的 Backlund 变换、非线性叠加公式及无穷守恒律[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(10): 1017—1021.
- [7] Grimshaw R, Zhu Y. Oblique interaction between internal solitary waves[J]. Stud Appl Math, 1994, 92: 249—270.
- [8] Ablowitz M J, Segur H. Long internal waves in fluids of great depth[J]. Stud Appl Math, 1980, 62: 249—262.
- [9] Tsuji H. Oblique interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid of infinite depth[J]. Fluid Dynamics Research, 2001, 29: 251—267.
- [10] Lighthill J. Waves in Fluid[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
- [11] 沈国光, 李德筠. 内波研究中的射线理论和陷波[J]. 水动力学研究与进展, A 辑, 1996, 11(1): 43—51.
- [12] Broutman D, Rottman J W, Eckermann S D. Ray methods for internal waves in the atmosphere and ocean[J]. Annu Rev Fluid Mech, 2004, 34: 559—593.
- [13] Lakshminih Kantha, Carolanne Clayson. Small Scale Processes in Geophysical Fluid Flows [M]. New York Academic Press, 2000.
- [14] 易家训. 流体力学[M]. 章克本, 张涤明, 陈启强, 等译. 北京: 高等教育出版社, 1983.
- [15] 富永政英. 海洋波动——基础理论和观测成果[M]. 关孟儒译. 北京: 科学出版社, 1984.
- [16] 戴世强. 约化摄动法和非线性波远场分析[J]. 力学进展, 1982, 12(1): 2—23.
- [17] 郭敦仁. 数学物理方法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1965.
- [18] 李家春, 周显初. 数学物理中的渐近方法[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
- [19] 徐肇廷. 海洋内波动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

## Two Dimensional Algebraic Solitary Wave and Its Vertical Structure in Stratified Fluid

SU Xiao\_bing<sup>1,2</sup>, WEI Gang<sup>1,2</sup>, DAI Shi\_qiang<sup>3</sup>

(1. School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P. R. China;

2. Faculty of Science, PLA University of Science & Technology, Nanjing 211101, P. R. China;

3. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

**Abstract:** The algebraic solitary wave and its associated eigenvalue problem in a deep stratified fluid with a free surface and a shallow upper layer were studied. And its vertical structure was examined. An exact solution for the derived 2D Benjamin-Ono equation was obtained, and physical explanation was given with the corresponding dispersion relation. As a special case, the vertical structure of the weakly nonlinear internal wave for the Holmboe density distribution was numerically investigated, and the propagating mechanism of the internal wave was studied by using the ray theory.

**Key words:** two dimensional Benjamin-Ono equation; stratified fluid; eigenvalue; vertical structure