

文章编号: 1000_0887(2005) 10_1161_07

非线性双重介质模型的精确解 及动态特征

同登科¹, 张鸿庆², 王瑞和¹

(1. 石油大学(华东) 数学与计算科学学院, 山东东营 257061;

2. 大连理工大学 应用数学系, 大连 116024)

(我刊编委张鸿庆来稿)

摘要: 考虑了二次梯度项的非线性双重介质模型 在模型中假设岩块和裂缝间的压力差作为初始未知量, 在岩块中是拟先态的, 从而避免了解联立方程组 利用广义 Hankel 变换求得了径向流动的解析解, 由于解析解是无穷级数, 无法得到具体的值 通过数值求解特征值问题, 从而算得了窟体的压力值, 并探讨了非线性参数和双重介质参数变化时压力的变化规律, 给出了典型压力曲线图版, 这些结果可用于实际的试井分析

关键词: 非线性双重介质; Hankel 变换; 解析解; 压力曲线

中图分类号: TE312 **文献标识码:** A

引 言

在油藏工程设计计算中, 通过假设小的压缩率或小的压力梯度, 可以忽略非线性二次梯度项 在某些操作过程中, 很小的压力梯度可能引起预测孔隙压力的显著错误, 例如水力压裂、大的压降流动、试井、钻杆测试和大的压降脉冲测试^[1], 特别地, 高灵敏度的压力测量装置必定能检测到如此小的压力波动 在流动系统中, 忽略这个波动是由于探测线性化近似, 而不是由于异常 在流动方程中保留二次梯度项的非线性方法是由 Odeh 和 Babu^[1] 提出的, 他们发现注入井压力变化与生产井压力变化不同, 不像线性解预测的那样 Finjord 和 Aadnoy^[2] 用这种非线性方法解决稳态和拟稳态条件的油藏压力, Wang 和 Dusseault^[3] 在弹性多孔介质方面应用了相似的方法 Charabarty 等人^[4] 的研究表明, 非线性项在具有高注入量和小油藏传导率定流量的情况下有显著影响 Bai 等人^[5] 提出了在裂缝相中带二次梯度项的非线性双孔隙度模型 Streltsova^[6] 使用了相似的技巧, 岩石的压力从裂缝压力中消除, 从而避免了求双孔隙度系统的联立解 这种方法显示了比传统的双孔隙度模型更优越, 因为知道岩石压力通常几乎没有意义, 但 Bai 等人^[5] 只考虑了有界定压地层定产生产时的解析解且得到的解是错误的 本文考虑了有界封闭地层定产生产时的非线性双重介质模型, 利用广义 Hankel 变换求得解, 由

收稿日期: 2003_04_28; 修订日期: 2005_03_25

基金项目: 国家九七三课题资助项目(2002CB211708); 山东省自然科学基金资助项目(Y2003F01)

作者简介: 同登科(1963), 男, 陕西志丹人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86_546_8393487; Fax: + 86_546_8396065; E_mail: tongdk@mail.hdpu.edu.cn)

于解析解是无穷级数,无法得到具体的值。通过数值求解特征值问题,算得了具体的压力值,并探讨了非线性参数和双重介质参数变化时压力的变化规律,给出了典型压力曲线图版,这些结果可用于实际的试井分析。并纠正了文献[5]给出的解的错误。

1 数学模型

假设在双重介质中流体只有通过裂缝才能流到井筒。岩块、裂缝间的流体交换量正比于岩块和裂缝之间的压力差。且认为岩块和裂缝之间的压力差是介质间流动的唯一动力,介质间的流动控制着岩块相的方程,并且由于非线性压力波动,二次梯度项被包括在裂缝相中,因此

$$-\frac{k_1}{c_1} \frac{d(p_1 - p_2)}{dt} = \frac{k_2}{c_2} \frac{d^2 p_2}{dt^2} - \frac{k_1}{c_1} (p_2 - p_1), \quad (1)$$

$$\frac{k_2}{c_2} \frac{d^2 p_2}{dt^2} + \frac{k_2}{c_2} (p_2)^2 = \frac{k_1}{c_1} \frac{d(p_1 - p_2)}{dt} + \frac{k_1}{c_1} (p_2 - p_1), \quad (2)$$

其中 1、2 分别代表岩块和裂缝, p 是流体压力, k 是渗透率, μ 是动态粘度, ω 是孔隙度, c 是压缩率, t 是时间, s^* 是岩块的特征维数。对于正交裂缝,在 Warren 和 Root^[7] 的模型中, $s^* = 60/s^*$, 其中 s^* 是裂缝间隙。

将方程(1)代入方程(2),得

$$\frac{k_2}{c_2} \frac{d^2 p_2}{dt^2} + \frac{k_2}{c_2} (p_2)^2 = \frac{k_1}{c_1} \frac{d(p_1 - p_2)}{dt} + \frac{k_1}{c_1} (p_2 - p_1), \quad (3)$$

上式右边最后一项说明,岩块和裂缝之间压力的变化率是裂缝中流体存储变化的真正源泉。

注意到,方程(1)中没有涉及空间波动,如果知道初始压力,能够确定 p_1 和 p_2 之间函数的依赖关系。

方程(1)可改写为

$$\frac{d(p_1 - p_2)}{dt} = -\frac{k_1}{c_1} (p_1 - p_2), \quad \frac{d(p_1 - p_2)}{dt} = \frac{k_1}{c_1} (p_2 - p_1), \quad (4)$$

如果知道岩块和裂缝之间初始压力,那么

$$p_1 = p_2 + p_{12}^0 e^{-t} \quad (5)$$

将式(5)代入式(3),由于径向流

$$\frac{d^2 p_2}{dt^2} + \frac{1}{r} \frac{dp_2}{dr} + c_2 \left(\frac{dp_2}{dr} \right)^2 = \frac{dp_2}{dt} + e^{-t}, \quad (6)$$

其中 $\frac{1}{r} \frac{dp_2}{dr} = \frac{2c_2}{k_2} \frac{dp_2}{dr}$, $\frac{1}{r} \frac{dp_2}{dr} = \frac{k_1 p_{21}^0}{k_2}$, $p_{21}^0 = -p_{12}^0 = p_2^0 - p_1^0$

无量纲量定义为

$$p_{D2} = \frac{2k_2 h (p_2^0 - p_2)}{q}, \quad r_D = \frac{r}{r_w}, \quad t_D = \frac{k_2 t}{2c_2 r_w^2},$$

$$= \frac{q c_2}{2k_2 h}, \quad = \frac{k_1 p_{D21}^0}{k_2}, \quad = \frac{k_1}{k_2} \frac{2c_2}{c_1},$$

其中 h 是油藏厚度, p_2^0 是裂缝中初始压力, q 是流量, r_w 是井眼半径。

方程(6)的无量纲形式为

$$\frac{d^2 p_{D2}}{dt_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{dp_{D2}}{dr_D} - \left(\frac{dp_{D2}}{dr_D} \right)^2 = \frac{dp_{D2}}{dt_D} - e^{-t_D} \quad (7)$$

2 有界封闭地层的非线性双重介质模型

考虑方程(7)的井底定产量生产内边界条件和有界封闭地层外边界条件的定解问题为

$$\begin{cases} \frac{p_{D2}}{r_D} \Big|_{r_D=1} = -1, & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p_{D2}}{r_D} \Big|_{r_D=r_{De}} = 0, & (9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{D2} \Big|_{t_D=0} = 0 & (10) \end{cases}$$

作变换

$$p_{D2} = -\frac{1}{2} \ln x(r_D, t_D), \quad (11)$$

则方程(7)~(10)化为

$$() \begin{cases} \frac{x^2}{r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{x}{r_D} = \frac{x}{t_D} + x e^{-t_D}, \\ \left(\frac{x}{r_D} - x \right) \Big|_{r_D=1} = 0, \\ \frac{x}{r_D} \Big|_{r_D=r_{De}} = 0, \\ x \Big|_{t_D=0} = 1 \end{cases}$$

为了求解定解问题(), 下面我们引进有限 Hankel 变换

$$x(s_n) = \int_1^{r_{De}} r_D V(s_n r_D) x(r_D, t_D) dr_D, \quad (12)$$

其中

$$V(s_n r) = [s_n J_1(s_n) + J_0(s_n)] Y_0(s_n r) - [Y_0(s_n) + s_n Y_1(s_n)] J_0(s_n r),$$

s_n 是方程

$$[s J_1(s) + J_0(s)] Y_1(s r_{De}) - [Y_0(s) + s Y_1(s)] J_1(s r_{De}) = 0$$

的第 n ($n = 1, 2, \dots$) 个正根

$x(s_n)$ 逆变换由下式确定

$$x(r_D, t_D) = \frac{2}{r_D} \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 J_1^2(s_n r_{De}) V(s_n r_D) x(s_n) \left\{ [J_0(s_n) + s_n J_1(s_n)]^2 - (s_n^2 + \frac{1}{r_D^2}) J_1^2(s_n r_{De}) \right\}^{-1} \quad (13)$$

对初边值问题(), 作 Hankel 变换得

$$\frac{x}{t_D} + (e^{-t_D} + s_n^2) x = 0, \quad (14)$$

$$x \Big|_{t_D=0} = \frac{2}{s_n} \quad (15)$$

求解微分方程得

$$x = \frac{2}{s_n} e^{-\frac{1}{2}(1-e^{-t_D})} e^{-\frac{s_n^2}{2} t_D} \quad (16)$$

对方程(16)求 Hankel 逆变换得

$$x(r_D, t_D) = \frac{e^{-\gamma(1-e^{-t_D})}}{e} \frac{J_1^2(s_n r_{De}) e^{-s_n^2 t_D} V(s_n r_D)}{n=1 \left[J_0(s_n) + s_n J_1(s_n) \right]^2 - (s_n^2 + \gamma^2) J_1^2(s_n r_{De})} \tag{17}$$

将方程(17)代入方程(11)得

$$p_D(r_D, t_D) = - \frac{1}{\ln} \left[\frac{e^{-\gamma(1-e^{-t_D})}}{e} \frac{J_1^2(s_n r_{De}) e^{-s_n^2 t_D} V(s_n r_D)}{n=1 \left[J_0(s_n) + s_n J_1(s_n) \right]^2 - (s_n^2 + \gamma^2) J_1^2(s_n r_{De})} \right] \tag{18}$$

井壁上的压降 ($r_D = 1$)

$$p_{wD}(t_D) = - \frac{1}{\ln} \left[2 \frac{e^{-\gamma(1-e^{-t_D})}}{e} \frac{J_1^2(s_n r_{De}) e^{-s_n^2 t_D}}{n=1 \left[J_0(s_n) + s_n J_1(s_n) \right]^2 - (s_n^2 + \gamma^2) J_1^2(s_n r_{De})} \right] \tag{19}$$

3 模型的分析

利用 Hankel 变换求得的解需要特征方程的根, 我们结合逐步扫描法和布伦特 (Brent) 方法求解了特征方程。方程(19)描述的是具有定产生内边界和封闭外边界的非线性双重介质模型的解。解中包含的基本参数有: α 、 ξ 、 r_{De} , 压力瞬态分析是在井筒处, 忽略了井筒储集的影响。

1) 图 1 表示对于不同的 η 值压力的瞬时变化, 对于较大的 η 值, 压力增加得较早。相对于较小的 η 值而言, 较大的 η 值表明在裂缝中的流动较快。在初始阶段 η 的影响较小, 随着时间的增加, η 的影响越来越明显, 此时反映在图形上就是曲线随着 η 的变化而相互发散, 在过渡段对压力曲线的影响最大。在晚时段 η 的影响越来越小。

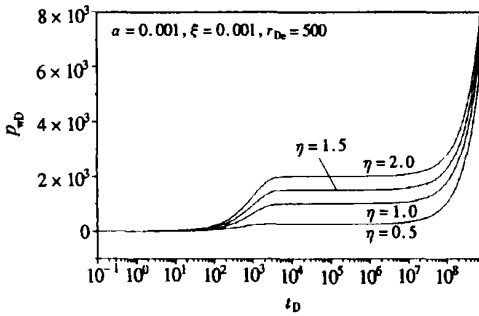


图 1 依赖于 η 的压力与时间曲线图

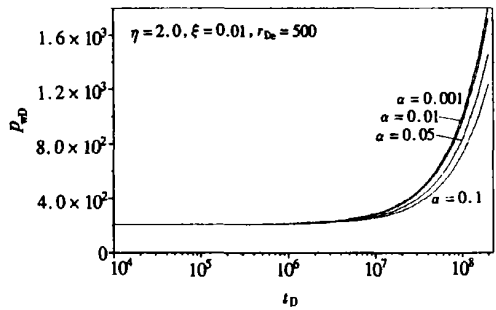


图 2 依赖于 α 的压力与时间曲线图

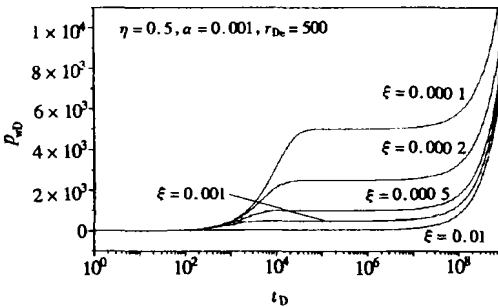


图 3 依赖于 ξ 的压力与时间曲线图

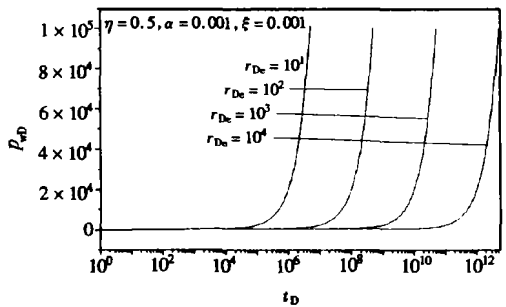


图 4 依赖于 r_{De} 的压力与时间曲线图

2) 的影响主要在晚时段, 对于 $\alpha = 0.001$ 和 $\alpha = 0.05$ 压力的差异可达 12% 左右 反映在图形上就是最上边的曲线和最下边的曲线

3) 图 3 是对于不同的 α 值, 非线性井眼压力解随时间的变化 α 对初始阶段没有影响, 对过渡阶段和晚期阶段的影响同 α 基本相似, 但压力变化比 α 剧烈

4) r_{De} 越大, 边界影响出现得越晚 在初始阶段, 对于不同的 r_{De} 压力曲线完全相同, 说明边界影响尚未达到 在过渡段压力曲线不同, r_{De} 越小, 过渡段出现得越早, 说明边界影响已到达

4 有界定压地层

经变换(11) 定产生的有界定压地层的非线性双重介质模型可写为

$$() \begin{cases} \frac{x^2}{r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{x}{r_D} = \frac{x}{t_D} + \alpha e^{-t_D}, \\ \left(\frac{x}{r_D} - x \right)_{r_D=1} = 0, \\ x |_{r_D=r_{De}} = 1, \\ x |_{t_D=0} = 1 \end{cases}$$

设 $x = u + \frac{1 - \alpha + r_D}{1 - \alpha + r_{De}}$ (20)

则初边值问题() 可简化为

$$\begin{cases} \frac{u^2}{r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{u}{r_D} = \frac{u}{t_D} + \alpha e^{-t_D} + e^{-t_D} \frac{1 - \alpha + r_D}{1 - \alpha + r_{De}} - \frac{1 - \alpha + r_{De}}{(1 - \alpha + r_{De}) r_D}, \\ \left(\frac{u}{r_D} - u \right)_{r_D=1} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\left(\frac{u}{r_D} - u \right)_{r_D=1} = 0, \quad (22)$$

$$u |_{r_D=r_{De}} = 0, \quad (23)$$

$$u |_{t_D=0} = 1 - \frac{1 - \alpha + r_D}{1 - \alpha + r_{De}} \quad (24)$$

作 Hankel 变换

$$u = H[u] = \int_1^{r_{De}} r_D u B_2(sr_D) dr_D, \quad (25)$$

其中

$$B_2(sr_D) = Y_0(sr_D)(s_n J_1(s_n) + J_0(s_n)) - J_0(sr_D)(s_n Y_1(s_n) + Y_0(s_n)),$$

$s_n (n = 1, 2, \dots)$ 是方程 $B_2(sr_{De}) = 0$ 的根 应用 Hankel 变换到方程(21) ~ (24) 得

$$\begin{cases} \frac{u}{t_D} + (s_n^2 + \alpha e^{-t_D})u = \frac{1}{(1 - \alpha + r_{De})} H\left[\frac{1}{r_D}\right] - e^{-t_D} H\left[\frac{1 - \alpha + r_D}{1 - \alpha + r_{De}}\right], \end{cases} \quad (26)$$

$$u |_{t_D=0} = \frac{r_{De}}{1 - \alpha + r_{De}} H[1] - \frac{1}{1 - \alpha + r_{De}} H[r_D], \quad (27)$$

其中

$$H[r_D] = \int_1^{r_{De}} r^2 B_2(snr_D) dr_D, \quad H\left[\frac{1}{r_D}\right] = \int_1^{r_{De}} B_2(snr_D) dr_D,$$

$$H[1] = \frac{2}{s_n} \left[-\frac{s_n J_1(s_n) + J_0(s_n)}{J_0(s_n r_{De})} \right]$$

方程(26)和(27)的解为

$$u = \frac{e^{-\frac{s_n^2}{2} t_D - e^{-t_D}}}{(1 - \frac{s_n^2}{2} + r_{De})} \left\{ (r_{De} H[1] - H[r_D]) e^{-t_D} - H\left[\frac{1}{r_D}\right] \left(-\right)^{\frac{s_n^2}{2}} \right. \\ \left. \left[\left(-\frac{s_n^2}{2}, -e^{-t_D}\right) - \left(-\frac{s_n^2}{2}, -\right) \right] + \left(-\right)^{\frac{s_n^2}{2}-1} [(1 - \frac{s_n^2}{2}) H[1] + \right. \\ \left. H[r_D] \right] \left[\left(1 - \frac{s_n^2}{2}, -e^{-t_D}\right) - \left(1 - \frac{s_n^2}{2}, -\right) \right] \right\} \quad (28)$$

将方程(28)严格地反演到实空间得

$$u(r_D, t_D) = \frac{2}{2(1 - \frac{s_n^2}{2} + r_{De})} \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 e^{-\frac{s_n^2}{2} t_D - e^{-t_D}} J_0^2(s_n r_{De}) B_2(s_n r_D) \\ \left\{ (r_{De} H[1] - H[r_D]) e^{-t_D} - H\left[\frac{1}{r_D}\right] \left(-\right)^{\frac{s_n^2}{2}} \left[\left(-\frac{s_n^2}{2}, -e^{-t_D}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. \left(-\frac{s_n^2}{2}, -\right) \right] + \left(-\right)^{\frac{s_n^2}{2}-1} [(1 - \frac{s_n^2}{2}) H[1] + H[r_D] \right] \left[\left(1 - \frac{s_n^2}{2}, -e^{-t_D}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. \left(1 - \frac{s_n^2}{2}, -\right) \right] \right\} \left\{ [AJ_0(s_n) + s_n J_1(s_n)]^2 - (s_n^2 + A^2) J_0^2(s_n r_{De}) \right\}^{-1} \quad (29)$$

将 $u(r_D, t_D)$ 代入方程(20)得

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{A} \ln \left[u(r_D, t_D) + \frac{1 - A + Ar_D}{1 - A + Ar_{De}} \right] \quad (30)$$

[参 考 文 献]

- [1] Odeh A S, Babu D K. Comprising of solutions for the nonlinear and linearized diffusion equations[J]. SPE Reservoir Engineering, 1998, 3(4): 1202-1206.
- [2] Finjord J, Aadony B S. Effects of quadratic gradient term in steady-state and quasi-steady-state solutions for reservoir pressure[J]. SPE Formation Evaluation, 1989, 4(3): 413-417.
- [3] Wang Y, Dusseault M B. The Effect of quadratic gradient terms on the borehole solution in poroelastic media[J]. Water Resource Research, 1991, 27(12): 3215-3223.
- [4] Chakrabarty C, Farouq Ali S M, Tortike W S. Analytical solutions for radial pressure distribution including the effects of the quadratic gradient term[J]. Water Resource Research, 1993, 29(4): 1171-1177.
- [5] Bai M Q, Roegiers J C. A nonlinear dual-porosity model[J]. Appl Math Modelling, 1994, 18(9): 602-610.
- [6] Streltsova T D. Well Testing in Heterogeneous Formation[M]. New York: John Wiley & Sons, 1988.
- [7] Warren J E, Root P J. Behavior of naturally fractured reservoirs[J]. Soc Pet Eng J, 1963, 228(3): 245-255.

¹, ZHANG Hong_qing², WANG Rui_he¹

(1. Department of Applied Mathematics, Petroleum University (East of China),
Dongying, Shandong 257061, P. R. China;

2. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology,
Dalian 116024, P. R. China)

Abstract: A nonlinear dual porosity model considering a quadratic gradient term is presented. Assuming the pressure difference between matrix and fractures as a primary unknown, to avoid solving the simultaneous system of equations, decoupling of fluid pressures in the blocks from the fractures was furnished with a quasi-steady-state flow in the blocks. Analytical solutions were obtained in a radial flow domain using generalized Hankel transform. The real value cannot be gotten because the analytical solutions were infinite series. The real pressure value was obtained by numerical solving the eigenvalue problem. The pressure law of the changes of nonlinear parameters and those of dual porosity parameters was studied, and the plots of typical curves are given. All these result can be applied in well test analysis.

Key words: nonlinear dual porosity; Hankel transform; analytical solution; pressure curve