应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 10_1175_08

# 随机结构系统基于可靠性的优化设计*

安伟光, 孙克淋, 陈卫东, 王滨生, 蔡荫林

( 哈尔滨工程大学 航天工程系, 哈尔滨 150001)

( 王彪推荐)

摘要: 提出了以梁板( 薄板) 为基体的随机结构系统( 即结构元件的面积、长度、弹性模量和强度等均为随机变量) 在随机载荷作用下, 基于可靠性的优化设计方法• 给出了随机结构系统安全余量和系统可靠性指标的敏度表达式;给出最佳矢量型算法• 首先是用改进的一次二阶矩和随机有限元法求出安全余量的可靠性指标的表达式, 然后用概率网络估算( PNET) 法求出系统失效概率的公式, 对该式两边求导得出了系统可靠性指标的敏度表达式, 进而用最佳矢量型算法进行优化设计• 在优化迭代过程中, 采用梯度步和最佳矢量步相结合的方法进行计算• 最后给出了一个算例, 说明该方法计算效率高, 收敛稳定, 适合工程应用•

关 键 词: 随机结构; 可靠性; 敏度分析; 最佳矢量型算法; 优化设计
中图分类号: O213.2 文献标识码: A

## 引 言

传统的结构优化的数学模型中, 目标和约束函数都认为是确定性的量, 不符合结构实际所处的受力环境条件和本身的结构情况, 因而优化结果不能很好反映工程实际• 实际工程中, 结构系统通常为随机结构, 即载荷、强度和自身的刚度等均表现为随机性, 因此在这种系统优化中, 所建立的数学模型将赋予新的内涵: 即要考虑随机因素对约束和目标函数的影响, 以系统可靠性的角度开展优化设计• 针对这一想法, 本文开展以梁板系统可靠度约束下的最小重量设计•

## 1 随机结构系统失效模式安全余量表达式

### 1.1 板元安全余量

由文献[1]知, 板元安全余量为

$$Z = \sigma_a - \sigma_{e0}, \tag{1}$$

式中, $\sigma_a$ 为容许应力; $\sigma_{e0}$ 为板元中心处的等效应力, 且

$$\sigma_{e0} = (\sigma_{x0}^2 + \sigma_{y0}^2 - \sigma_{x0}\sigma_{y0} + 3\tau_{xy0}^2)^{1/2}, \tag{2}$$

其中, $\sigma_{x0}$、$\sigma_{y0}$ 和 $\sigma_{xy0}$ 为局部坐标系正应力和剪应力, 且为位移函数, 其表达式参见文献[1]•

* 收稿日期: 2003_08_25; 修订日期: 2005_03_11
基金项目: 国防科工委军工技术基础基金资助项目(Z192001A001)
作者简介: 安伟光( 1943—) , 男, 辽宁鞍山人, 教授, 博导( 联系人. Tel: + 86_451_82519209; E_mail: Anweiguang@ hrbeu. edu. cn)•

### 1.2 梁元安全余量

按文献[1, 2], 对任一梁元 $q$ 的端面(如左端) 对 $z$ 轴的安全余量为

$$
\begin{aligned}
Z_{2q-1} = \ & \sigma_y w_{zq} - \left\{ \frac{w_{zq}}{A_q}\mathrm{sg}(N_{x,2q-1}) \frac{EA_q}{L_q}(u_{x,2q-1} - u_{x,2q}) + \right. \\
& \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{w_{zq}}{A_{yq}}\mathrm{sg}(N_{y,2q-1})\left[\frac{12EI_{zq}}{L_q^3}(v_{y,2q-1} - v_{y,2q}) + \frac{6EI_{zq}}{L_q^2}(\theta_{z,2q-1} - \theta_{z,2q})\right] + \\
& \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{w_{zq}}{A_{zq}}\mathrm{sg}(N_{z,2q-1})\left[\frac{12EI_{yq}}{L_q^3}(v_{z,2q-1} - v_{z,2q}) + \frac{6EI_{yq}}{L_q^2}(\theta_{y,2q-1} - \theta_{y,2q})\right] + \\
& \frac{w_{zq}}{w_{xq}}\mathrm{sg}(M_{x,2q-1})\left[\frac{GI_{xq}}{L_q}(\theta_{x,2q-1} - \theta_{x,2q})\right] + \frac{w_{zq}}{w_{yq}}\mathrm{sg}(M_{y,2q-1}) \times \\
& \left[\frac{6EI_{yq}}{L_q^2}(v_{z,2q} - v_{z,2q-1}) + \frac{4EI_{yq}}{L_q}\left(\theta_{y,2q-1} + \frac{1}{2}\theta_{y,2q}\right)\right] + \mathrm{sg}(M_{z,2q-1}) \times \leqslant \\
& \left.\left[\frac{6EI_{zq}}{L_q^2}(v_{y,2q-1} - v_{y,2q}) + \frac{4EI_{zq}}{L_q}\left(\theta_{z,2q-1} + \frac{1}{2}\theta_{z,2q}\right)\right]\right\},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

式中, $\sigma_y$ 为元件屈服应力; $\mathrm{sg}(\cdot)$ 为表示$(\cdot)$ 的符号; $A_q$ 为等直梁 $q$ 的截面积; $A_{yq}$、$A_{zq}$ 为元件 $q$ 沿 $y$、$z$ 方向抗剪面积; $w_{xq}$ 为元件 $q$ 绕 $x$ 轴塑性扭转系数; $w_{zq}$、$w_{yq}$ 为元件 $q$ 绕 $z$、$y$ 轴塑性剖面模数; $I_{xq}$、$I_{yq}$ 及 $I_{zq}$ 为元件 $q$ 相对 $x$、$y$ 和 $z$ 的转动惯量; $E$、$L_q$ 及 $G$ 为元件 $q$ 弹性模量、长度及剪切模量; $N_{x,2q-1}$、$N_{y,2q-1}$ 及 $N_{z,2q-1}$, $M_{x,2q-1}$、$M_{y,2q-1}$ 及 $M_{z,2q-1}$ 为元件 $q$ 左端面 $x$、$y$ 和 $z$ 方向的力(前 3 个) 及矩(后 3 个); $u_{x,2q-1}$、$u_{x,2q}$、$v_{y,2q-1}$、$v_{y,2q}$、$v_{z,2q-1}$、$v_{z,2q}$、$\theta_{x,2q-1}$、$\theta_{x,2q}$、$\theta_{y,2q-1}$、$\theta_{y,2q}$、$\theta_{z,2q-1}$、$\theta_{z,2q}$ 为左右端面点对应 $x$、$y$、$z$ 的位移(前 6 个) 和转角(后 6 个)•

同样也可以给出梁端面右端及两端面对 $z$ 轴失效的极限状态方程, 以及梁端面对 $y$ 轴失效极限状态方程, 这里不再赘述• 由(3) 式可知梁元安全余量 $Z_{2q-1}$ 是梁元位移和梁元参数(如截面积、抗剪面积、转动惯量、塑性扭转系数及塑性截面模数等) 的函数, 而这些参数都与截面积 $A_q$ 有关, 为方便求解, 假设

$$
k_1 = \frac{A_{yq}}{A_q},\quad k_2 = \frac{A_{zq}}{A_q},\quad k_3 = \frac{I_{xq}}{A_q^2},\quad k_4 = \frac{I_{yq}}{A_q^2},
$$

$$
k_5 = \frac{I_{zq}}{A_q^2},\quad k_6 = \frac{W_{xq}}{A_q^{3/2}},\quad k_7 = \frac{W_{yq}}{A_q^{3/2}},\quad k_8 = \frac{W_{zq}}{A_q^{3/2}},
$$

这样, 这些参数都可用 $A_q$ 表示, 便于安全余量敏度分析•

### 1.3 安全余量的敏度表达式

从上面分析知, 板或梁的任一安全余量 $Z_k$ 都可写成

$$
Z_k = g(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}),
\tag{4}
$$

式中, $\boldsymbol{X}$ 为 $\sigma_y$、$E$、$A_q$、$L_q$ 等随机变量的向量; $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}})$ 为取决于 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 的位移函数列阵, 其位移元素为随机变量; $\boldsymbol{P}$ 为载荷列阵•

由于在改进一次二阶矩法[3]和后面优化中, 要用到安全余量的敏度表达式, 即

$$
\frac{\partial Z_k}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial Z_k}{\partial D_j}\frac{\partial D_j}{\partial x_i},
\tag{5}
$$

式中, $x_i$、$D_j$ 为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 任一元素• 而 $\partial D_j/\partial x_i$ 由随机有限元分析求得, 由文献[1]有

$$
\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial x_i} = \boldsymbol{K}^{-1}\big|_{\boldsymbol{x}^*}\left[-\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial x_i}\boldsymbol{D} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial x_i}\right]\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*},
\tag{6}
$$

式中, $\boldsymbol{x}^*$ 为改进一次二阶矩 $\beta$(可靠性指标) 迭代中的设计验算点• 有 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots,$

$x_i^*, x_n^*)^{\mathrm{T}}$, $n$ 为随机变量数•

随机结构系统的安全余量表达式是比较复杂的, 在求 β 时, 为保证计算精度, 本文采用改进的一次二阶矩法和随机有限元相结合的算法•

# 2 结构系统可靠性指标 $\beta_s$ 的敏度表达式

首先对随机结构系统进行可靠性分析[4], 求出失效模式的可靠性指标• 最后按 PNET[5] 法计算系统失效概率 $P_{fs}$, 有

$$P_{fs} = 1 - \prod_{i=1}^{G} \Phi(\beta_i), \tag{7}$$

式中, $G$ 为代表模式数; $(\bullet)$ 为标准正态分布函数; $\beta_i$ 为第 $i$ 个代表模式的可靠性指标•

由于

$$P_{fs} = \Phi(-\beta_s) = 1 - \prod_{i=1}^{G} \Phi(\beta_i), \tag{8}$$

对(8)式左端求导, 有

$$\frac{\partial \Phi(-\beta_s)}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\partial \Phi(-\beta_s)}{\partial(-\beta_s)} \bullet \frac{\partial(-\beta_s)}{\partial \mu_{x_i}}, \tag{9}$$

式中, $\mu_{x_i}$ 为结构可靠性优化设计中, 某随机变量 $x_i$(如杆元的面积或板元的厚度等) 的均值$(i = 1, \cdots, n)$, 在此作为优化设计变量• 故

$$\frac{\partial \Phi(-\beta_s)}{\partial \mu_{x_i}} = -\phi(-\beta_s) \frac{\partial \beta_s}{\partial \mu_{x_i}}, \tag{10}$$

式中, $\phi(\bullet)$ 为标准正态密度函数• 对(8)式右端求导, 有

$$\frac{\partial\left[1 - \prod_{i=1}^{G} \Phi(\beta_i)\right]}{\partial \mu_{x_i}} = -\sum_{k=1}^{G} \phi(\beta_k) \frac{\partial \beta_k}{\partial \mu_{x_i}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{G} \Phi(\beta_j) \bullet \tag{11}$$

由(10)式和(11)式有

$$\frac{\partial \beta_s}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\prod_{j=i}^{G} \Phi(\beta_j)}{\phi(-\beta_s)} \sum_{k=1}^{G} \frac{\phi(\beta_k)}{\Phi(\beta_k)} \bullet \frac{\partial \beta_k}{\partial \mu_{x_i}}, \tag{12}$$

上式中, $\partial \beta_k / \partial \mu_{x_i}$ 由下面分析求得• 由于

$$\beta_k = \frac{\mu_{Z_k}}{\sigma_{Z_k}}, \tag{13}$$

式中, $\mu_{Z_k}$、$\sigma_{Z_k}$ 为改进的一次二阶矩法中, 安全余量 $Z_k$ 的均值和标准差, 由文献[3]有

$$\mu_{Z_k} = \sum_{i=1}^{n} (M_{x_i} - x_i^*) \left.\frac{\partial Z_k}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}^*}, \tag{14}$$

$$\sigma_{Z_k} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial Z_k}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}^*} \left.\frac{\partial Z_k}{\partial x_j}\right|_{\boldsymbol{x}^*} \rho_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}\right]^{1/2}, \tag{15}$$

式中, $\rho_{ij}$ 为随机变量 $x_i$ 和 $x_j$ 的相关系数; $\sigma_{x_i}$、$\sigma_{x_j}$ 为为 $x_i$ 和 $x_j$ 的标准差• 而

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial \mu_{x_i}} = \left(\frac{\partial \mu_{Z_k}}{\partial \mu_{x_i}} \bullet \sigma_{Z_k} - \mu_{Z_k} \bullet \frac{\partial \sigma_{Z_k}}{\partial \mu_{x_i}}\right) \bigg\backslash \sigma_{Z_k}^2, \tag{16}$$

其中
$$\frac{\partial \mu_{Z_k}}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left( \sum_{i=1}^{n} (\mu_{x_i} - x_i^*) \frac{\partial Z_k}{\partial x_i} \right)\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*} = \frac{\partial Z_k}{\partial x_i}\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*}. \tag{17}$$

由于
$$\sigma_{x_i} = \nu_i \mu_{x_i}, \quad \sigma_{x_j} = \nu_j \mu_{x_j}, \tag{18}$$

式中, $\nu_i$ 和 $\nu_j$ 为 $x_i$、$x_j$ 的变异系数. 则

$$\frac{\partial \sigma_{Z_k}}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\partial}{\partial \mu_{x_i}}\left[ \left( \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Z_k}{\partial x_i}\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*} \frac{\partial Z_k}{\partial x_j}\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*} \rho_{ij}\, \nu_i \mu_{x_i} \nu_j \mu_{x_j} \right)^{1/2} \right] =$$
$$\frac{\nu_i \dfrac{\partial Z_k}{\partial x_i}\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Z_k}{\partial x_j}\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*} \rho_{ij}\, \mu_{x_j} \nu_j}{\sigma_{Z_k}}. \tag{19}$$

将(17)式和(19)式代入(16)式, 有

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\dfrac{\partial Z_k}{\partial x_i}\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*} \sigma_{Z_k}^2 - \mu_{Z_k} \nu_i \dfrac{\partial Z_k}{\partial x_i}\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Z_k}{\partial x_j}\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*} \rho_{ij}\, \mu_{x_j} \nu_j}{\sigma_{Z_k}^3}. \tag{20}$$

当有 $\rho_{ij} = 1 (i = j)$ 和 $\rho_{ij} = 0 (i \neq j)$ 时, 有

$$\frac{\partial \beta_k}{\partial \mu_{x_i}} = \frac{\dfrac{\partial Z_k}{\partial x_i}\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*} \sigma_{Z_k}^2 - \mu_{Z_k} \nu_i^2 \left( \dfrac{\partial Z_k}{\partial x_i}\Bigg|_{\boldsymbol{x}^*} \right)^2 \mu_{x_i}}{\sigma_{Z_k}^3}. \tag{21}$$

# 3 随机结构系统基于可靠性的优化设计

## 3.1 优化设计的数学模型

假定设计变量取梁元的截面积均值向量 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}} = (A_{L_1}, A_{L_2}, \cdots, A_{L_{n_{\mathrm{L}}}})^{\mathrm{T}}$ 和板元的厚度均值向量 $\boldsymbol{t}_{\mathrm{B}} = (t_{B_1}, t_{B_2}, \cdots, t_{B_{n_{\mathrm{B}}}})^{\mathrm{T}}$, 则优化设计问题可表示为

$$\left.\begin{aligned}
&\text{求 } \boldsymbol{A}_{\mathrm{L}} = (A_{L_1}, A_{L_2}, \cdots, A_{L_{n_{\mathrm{L}}}})^{\mathrm{T}} \text{ 和 } \boldsymbol{t}_{\mathrm{B}} = (t_{B_1}, t_{B_2}, \cdots, t_{B_{n_{\mathrm{B}}}})^{\mathrm{T}},\\
&\text{结构重量 } W(\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{t}_{\mathrm{B}}) = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{L}}} \rho_{L_i} l_{L_i} A_{L_i} + \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{B}}} S_{B_i} \rho_{B_i} = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{L}}} C_{L_i} A_{L_i} + \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{B}}} C_{B_i} t_{B_i} t_{B_i} \text{ 最小},\\
&\text{约束条件 } g(\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{t}_{\mathrm{B}}) = \beta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{a}} - \beta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{t}_{\mathrm{B}}) \leqslant 0,\\
&\qquad A_{L_i}^{\mathrm{L}} \leqslant A_{L_i} \leqslant A_{L_i}^{\mathrm{U}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n_{\mathrm{L}}),\\
&\qquad t_{B_i}^{\mathrm{L}} \leqslant t_{B_i} \leqslant t_{B_i}^{\mathrm{U}} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n_{\mathrm{B}}),
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

式中, $n_{\mathrm{L}}$ 和 $n_{\mathrm{B}}$ 为梁元和板元数量; $\rho_{L_i}$、$l_{L_i}$ 和 $A_{L_i}$ 为梁元 $i$ 的密度、长度和截面积的均值并且 $\rho_{L_i} \cdot l_{L_i} = C_{L_i}$; $S_{B_i}$、$\rho_{B_i}$ 和 $t_{B_i}$ 为板元 $i$ 的平面面积、密度和厚度的均值并且 $S_{B_i} \rho_{B_i} = C_{B_i}$; $\beta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{a}}$ 和 $\beta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{t}_{\mathrm{B}})$ 为结构系统的容许可靠性指标和可靠性指标; $A_{L_i}^{\mathrm{L}}$ 和 $A_{L_i}^{\mathrm{U}}$ 为梁元面积 $A_{L_i}$ 的下限和上限; $t_{B_i}^{\mathrm{L}}$ 和 $t_{B_i}^{\mathrm{U}}$ 为板元厚度 $t_{B_i}$ 的下限和上限.

对于大型随机结构系统, 为了减少独立的设计变量数, 可通过变量连接的方法[6], 将设计变量划分若干类, 以缩小优化问题的规模.

## 3.2 最佳矢量型算法求解

对(22)式, 采用最佳矢量型算法求解, 迭代过程中, 梯度步和最佳矢量步相结合, 如图1所示; 设现行设计点位于 $A^0$ 点.

首先,沿着目标函数负梯度方向将设计点移动到约束边界 $A^1$ 点• 然后,沿如图 1 的 $\boldsymbol{E}$ 方向(最佳矢量方向) 移动设计点到 $A^2$,使既离开边界而提高结构系统的可靠度,又减少结构重量• 再从 $A^2$ 沿负梯度方向移动到边界……,如此迭代,直到满足如下的收敛准则:

$$\frac{W^K - W^{K-1}}{W^K} \leqslant \varepsilon_W, \tag{23}$$

式中, $K$ 为迭代次数; $\varepsilon_W$ 为一个小正数,本文取 $\varepsilon_W = 10^{-4}$•

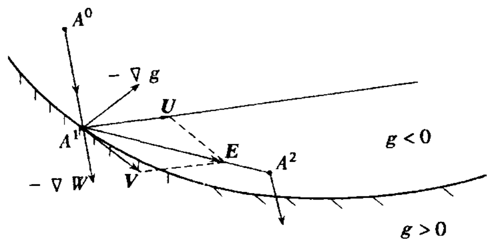



图 1 最佳矢量方向

由图 1 可看出

$$\boldsymbol{U} = - r_1 \therefore g - \therefore W, \tag{24}$$

式中, $\therefore g$ 和 $\therefore W$ 为约束和目标函数梯度的单位向量• 由(22) 式有

$$\therefore g = \frac{\left[-\frac{\partial \beta_s}{\partial A_{L_1}}, \cdots, -\frac{\partial \beta_s}{\partial A_{L_{n_L}}}; -\frac{\partial \beta_s}{\partial t_{B_1}}, \cdots, -\frac{\partial \beta_s}{\partial t_{B_{n_B}}}\right]^{\mathrm{T}}}{\sqrt{\left(-\frac{\partial \beta_s}{\partial A_{L_1}}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{\partial \beta_s}{\partial A_{L_{n_L}}}\right)^2 + \left(-\frac{\partial \beta_s}{\partial t_{B_1}}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{\partial \beta_s}{\partial t_{B_{n_B}}}\right)^2}}, \tag{25}$$

$$\therefore W = \frac{[C_{L_1}, \cdots, C_{L_{n_L}}; C_{B_1}, \cdots, C_{B_{n_B}}]^{\mathrm{T}}}{\sqrt{C_{L_1}^2 + \cdots + C_{L_{n_L}}^2 + C_{B_1}^2 + \cdots + C_{B_{n_B}}^2}}• \tag{26}$$

由于 $\boldsymbol{U}$ 与 $\therefore W$ 正交,故有

$$(\therefore W)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U} = - r_1 (\therefore W)^{\mathrm{T}} \therefore g - (\therefore W)^{\mathrm{T}} \therefore W = 0, \tag{27}$$

得

$$r_1 = \frac{-(\therefore W)^{\mathrm{T}} \therefore W}{(\therefore W)^{\mathrm{T}} \therefore g} = -\frac{1}{(\therefore W)^{\mathrm{T}} \therefore g}• \tag{28}$$

将(28) 式代回到(24) 式,得

$$\boldsymbol{U} = \frac{\therefore g}{(\therefore W)^{\mathrm{T}} \therefore g} - \therefore W• \tag{29}$$

由图 1 还有

$$\boldsymbol{V} = - \therefore W - r_2 \therefore g• \tag{30}$$

由于 $\boldsymbol{V}$ 与 $\therefore g$ 正交,故有

$$(\therefore g)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{V} = -(\therefore g)^{\mathrm{T}} \therefore W - r_2 (\therefore g)^{\mathrm{T}} \therefore g = 0, \tag{31}$$

得

$$r_2 = -\frac{(\therefore g)^{\mathrm{T}} \therefore W}{(\therefore g)^{\mathrm{T}} \therefore g} = -(\therefore g)^{\mathrm{T}} \therefore W• \tag{32}$$

将(32) 式代回到(30) 式,有

$$\boldsymbol{V} = ((\therefore g)^{\mathrm{T}} \therefore W) \therefore g - \therefore W• \tag{33}$$

最后,得到最佳矢量方向 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{V}• \tag{34}$$

## 4 算 例

某型舰船# 165~ # 200 肋位之间舱段,结构的外轮廓图如图 2 所示• 舱段载荷的示意如图 3 所示• 载荷均值(kN/m): $g_1 = 4\,764$, $g_2 = 639.75$, $g_3 = 735.36$, $g_4 = 508.39$; 浮力(kN/m): $q_1 = 825.91$, $q_2 = 947.96$, $q_3 = 983.68$, $q_4 = 926.88$; 弯矩(kN•m): $M = 300\,069$; 剪力(kN): $V$

$=3\ 601$; 载荷变异系数 0.3• 该模型固定端选# 200 肋, 有限元共划分 767 个板元(板元上带加强筋) 和 697 个梁元, 节点数 621 个, 详细划分图表参见文献[1]• 板元按厚度分 9 类, 梁元按截面形状分 64 类, 详见文献[1]• 强度 $\sigma_s$ 均值为 440 MPa, 变异系数为 0.05; 梁元面积均值参见文献[1], 变异系数为 0.01; 假设上述变量均为服从正态分布的相互独立随机变量• 其余量 $E$、$G$、梁元长度、板元厚度均为常量, $E=2.1\times10^5$ MPa, $G=8.1\times10^4$ MPa, 板元值参见文献[1]; $\beta_s^a=3.70$, 试进行结构系统优化设计•

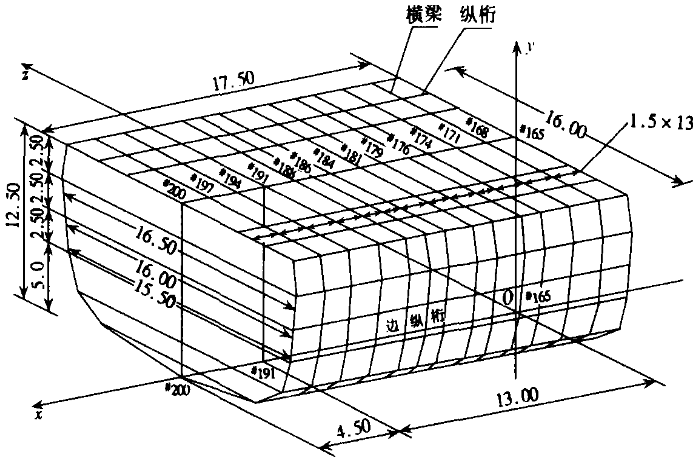



图 2 # 165~ # 200 结构示意图

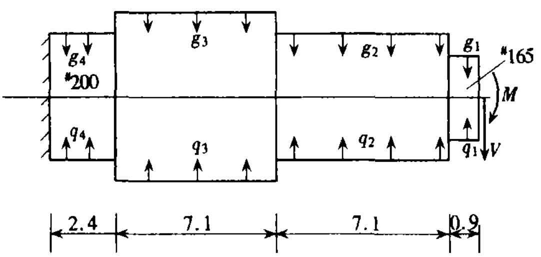
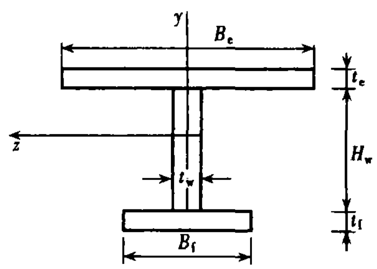



图 3 舱段载荷分布图




$B_e$ 为带板宽度, $t_e$ 为带板厚度

$H_w$ 为腹板高度, $t_w$ 为腹板宽度

$B_f$ 为面板宽度, $t_f$ 为面板厚度

图 4 梁系截面示意图

## 4.1 设计变量

为突出研究方法, 节省计算时间, 本优化只对梁系进行• 舱段结构梁系截面, 如图 4 所示• 取腹板面积 $A_{H_w}$ (均值) 与面板面积 $A_{B_f}$ (均值) 为设计变量• 有

$$A_{H_w}=H_w t_w=H_w t_w(H_w)H_w=t_w(H_w)H_w^2, \tag{35}$$

$$A_{B_f}=B_f t_f=B_f t_f(B_f)B_f=t_f(B_f)B_f^2, \tag{36}$$

式中, $t_w(H_w)$ 为腹板高度与厚度的连接系数; $t_f(B_f)$ 为面板宽度与厚度的连接系数•

## 4.2 目标函数

$$W=W_0+\sum_{b=1}^{B}A_bC_b=W_0+\sum_{b=1}^{B}(A_{H_{wb}}+A_{B_{fb}})C_b, \tag{37}$$

式中: $W_0$为板重量; $A_b$为第$b$类梁元面积; $A_{H_{wb}}$和$A_{B_{fb}}$为第$b$类梁元的腹板与面板面积; $B$为整个系统梁元类数, $B = 64$; 为第 $b$ 类梁元单位面积的重量, 且

$$C_b = \sum_{j \in b} \rho_j L_j \qquad (b \in B), \tag{38}$$

其中, $\rho_j$和$L_j$为分别属于$b$类梁元的$j$元件的密度和长度•

### 4.3 约束条件

可靠度约束为

$$\beta_s \geqslant \beta_s^a. \tag{39}$$

假设: $0 < H_w \leqslant 1$; $0 < B_f \leqslant 1$• 由稳定性分析知[7], 本例题梁系截面积的约束为

$$0 < A_{H_{wb}} \leqslant 0.028\,6\ \mathrm{m}^2,\quad 0 < A_{B_{fb}} \leqslant 0.076\,3\ \mathrm{m}^2. \tag{40}$$

### 4.4 优化计算过程的说明

经计算知, 本舱段, 板的重量为 161 462.00 kg, 梁系在优化前原始结构重量为 38 503.01 kg, $\beta_s = 4.335\,2$, 优化后梁系重量为 33 566.61 kg, $\beta_s = 3.706\,4$• 优化过程见表 1•

表 1 梁系迭代优化过程

| 迭代次数 | | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 梯度步 | $\beta_s$ | 3.708 6 | 3.707 8 | 3.706 4 |
| | $W$/kg | 38 058.22 | 33 571.38 | 33 566.61 |
| 最佳矢量步 | $\beta_s$ | 3.935 4 | 3.709 9 | |
| | $W$/kg | 37 563.64 | 33 567.27 | |
| 初始 $\beta_s$ | 4.335 2 | | | |
| 初始 $W$/kg | 38 503.01 | | | |

同样也可给出优化后 64 类梁的截面积、腹板和面板的几何尺寸, 这里不再赘述•

## 5 讨 论

1) 在大型随机结构系统中, 由于失效模式安全余量表达式比较复杂, 在求解 $\beta$ 时, 为保证计算精度, 采取改用一次二阶矩法和随机有限元法• 这样在求解系统可靠性指标时, 就是一个很复杂计算问题• 因此如果优化方法选择不当, 多数情况下, 不仅计算量大, 而且很难收敛• 本文给出了系统可靠性指标敏度表达式和最佳矢量表达式, 采用梯度步和最佳矢量法, 使优化解很快收敛( 本文例题大的迭代次数为 3 次) , 而且收敛过程平衡• 说明本文的敏度分析表达式及优化方法是合理有效的, 经得起大型结构考验•

2) 本优化的结构是 621 个节点, 767 个板元, 697 个梁元, 每个梁元有左右两端截面, 共有 1 394 个截面• 因此分析单元数为 2 161 个• 为简化计算, 本文只作了梁元的优化设计, 其目的是突出给出的方法, 当然也适合梁元和板元的同时优化•

3) 优化后, 梁系重量减少 4 936.40 kg, 约为原重量的 12.8%•

本研究为大型随机结构系统的基于可靠性的优化设计, 提供一个可操作的计算方法•

### [参 考 文 献]

[1] 安伟光, 洪国钧, 蔡荫林, 等. 基于随机有限元的舰船结构可靠性优化设计方法[R]. 中国国防科学技术报告, 2002, 78—79.

[2] Thoft_Christensen P, Murotsu Y. Application of Structural Systems Reliability Theory [M]. Berlin:

Springer_Verlag, 1986.

[3] 安伟光, 朱卫兵, 严心池. 随机有限元法在不确定性分析中的应用[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2002, **23**(1): 132—135.

[4] 安伟光. 结构系统可靠性和基于可靠性的优化设计[M]. 北京: 国防工业出版社, 1997.

[5] 王光远. 结构软设计理论初探[M]. 哈尔滨: 哈尔滨建筑工程学院出版社, 1987.

[6] 蔡荫林, 安伟光. 船舶结构可靠性分析与优化设计[R]. 中国船舶科技报告, 1977, 17—18.

[7] GJB4000—2000. 中国人民解放军总装备部. 舰船通用规范 1 组船体结构[S].

# Optimum Design Based on Reliability in Stochastic Structure Systems

AN Wei_guang, SUN Ke_lin, CHEN Wei_dong,
WANG Bin_sheng, CAI Yin_lin

(Department of Aerospace Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, P. R. China)

**Abstract:** The optimum design method based on the reliability is presented to the stochastic structure systems(i. e. the sectional area, length, elastic module and strength of the structural member are random variables) under the random loads. The sensitivity expression of system reliability index and the safety margins were presented in the stochastic structure systems. The optimum vector method was given. First, the expressions of the reliability index of the safety margins with the improved first_order second_moment and the stochastic finite element method were deduced, and then the expressions of the systemic failure probability by probabilistic network evaluation technique(PNET) method were obtained, after derivation calculus, the expressions of the sensitivity analysis for the system reliability were obtained. Moreover, the optimum design with the optimum vector algorithm was undertaken. In the optimum iterative procedure, the gradient step and the optimum vector step were adopted to calculate. At the last, a numerical example was provided to illustrate that the method is efficient in the calculation, stably converges and fits the application in engineering.

**Key words:** stochastic structure system; reliability; sensitivity analysis; optimum vector method; optimum design