

文章编号: 1000_0887(2005) 10_1247_06

弹道式火箭制导两点边值问题的一种有效数值解法*

刘新建, 袁天保

(国防科学技术大学 航天工程学院, 长沙 410073)

(马兴瑞推荐)

摘要: 结合航天飞机和飞马火箭的制导律, 进行了制导技术的开发, 提出了一种新的基于该控制律的火箭真空段运动的多变量边值问题的有效数值迭代解法。数值仿真结果表明, 所开发的数值迭代解法在稳定性、鲁棒性、制导精度方面具有相对优良的品质, 实时计算方面均为精度很高的代数公式。借助现代 DSP 高速芯片技术, 在一个制导周期内可以实现该算法, 以解决较大初始偏差的火箭制导问题。

关键词: 火箭制导与控制; 边值问题; 数值迭代解

中图分类号: V448.13;TB115 文献标识码: A

引 言

弹道式火箭质心的运动控制问题, 在数学意义上属于典型的多变量非线性两点边值问题, 即已知火箭的初始状态(初始位置 x_0, y_0, z_0 和初始速度 $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$), 为满足给定终端状态约束(终端位置 x_K, y_K, z_K 和终端速度 $\dot{x}_K, \dot{y}_K, \dot{z}_K$), 求动力学方程中推力 P 在惯性坐标系的方向角变化规律(包括俯仰角 $\varphi(t)$ 和偏航角 $\psi(t)$)。

在稠密大气层中由于复杂的气动力, 火箭往往按某一给定的俯仰角程序 $\varphi(t)$ 飞行。而在大气层外的真空段, 为消除各种干扰的影响当前主要采用针对标准弹道的摄动法, 摄动法具有计算时间短、稳定性好的优点, 但只适用于小偏差干扰情况。相反, 为克服大偏差干扰的影响, 提高控制精度和鲁棒性, 至今国内外学者^[1~5] 一直仍在探索弹道式火箭在真空运动段边值问题的解法。

火箭的空间运动方程, 其边值问题较复杂, 通常不可能有解析解, 只能有数值解。在数学上属于末端状态固定, 而初始状态和时间可变动的多变量泛函边值问题(空间问题为 5 维, 因为推力通常为常值)。本文是在美国航天飞机和飞马火箭的制导律基础上进行的制导技术开发, 提出了一种新的基于该控制律的边值问题的数值迭代解法。

* 收稿日期: 2003_11_11; 修订日期: 2005_03_15

基金项目: 国家八六三基金资助项目(86370202011)

作者简介: 刘新建(1966—), 男, 副教授, 博士, 从事飞行器设计与控制研究(联系人, Tel: + 86_731_4573139; Fax: + 86_731_4573140; E_mail: liu_xinjian_6638@hotmail.com);

袁天保(1976—), 男, 博士研究生, 从事飞行器制导与仿真研究。

1 航天飞机与飞马火箭的制导律

火箭在真空段内受推力和地球引力作用, 相对地心发射惯性坐标系的运动方程如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = V_x, \dot{y} = V_y, \dot{z} = V_z, \\ V_x = \frac{P}{m_0 - \dot{m}t} \cos \varphi \cos \phi - \frac{\mu x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ V_y = \frac{P}{m_0 - \dot{m}t} \sin \varphi \cos \phi - \frac{\mu y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ V_z = -\frac{P}{m_0 - \dot{m}t} \sin \phi - \frac{\mu z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \end{cases} \quad (1)$$

式中, x, y, z 为发射惯性坐标系中火箭位置的 3 个分量, 令 $\mathbf{R} = [x, y, z]^T$; V_x, V_y, V_z 为发射惯性坐标系中火箭速度的 3 个分量, 令 $\mathbf{V} = [V_x, V_y, V_z]^T$, φ, ϕ 为推力方向角, P 为火箭的常值推力大小, m_0, \dot{m} 为火箭的初始质量和质量秒流量. 将运动方程写成向量形式

$$\dot{\mathbf{V}} = a\mathbf{V} + \mathbf{G}, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}, \quad (3)$$

$$\dot{m} = P/U_e, \quad (4)$$

其中, \mathbf{V}, \mathbf{R} 是火箭在地心发射惯性坐标系中的速度向量和位置向量, \mathbf{G} 是重力矢量, $\mathbf{G} = -\omega^2 \mathbf{R} = -\mu \mathbf{R}/R^3$; $\mu = 3.986 \times 10^5 \text{ km}^3/\text{s}^2$ 为地球引力常数, $a = P/m$ 是加速度的模, U_e 是火箭推力的比冲, \dot{m} 是秒流量; $\mathbf{u} = [\cos \varphi \cos \phi \quad \sin \varphi \cos \phi \quad -\sin \phi]$ 表示推力方向的单位向量, φ, ϕ 分别是俯仰和偏航姿态角.

文献[1]根据最优控制原理给出了泛函问题的显式解, 即制导律为

$$\mathbf{u}(t) = \lambda \cos \omega(t-k) + (\dot{\lambda}/\omega) \sin \omega(t-k). \quad (5)$$

如果采用地球平面假设, 因为 $\omega \approx 0$, 则

$$\mathbf{u} = \lambda + \dot{\lambda}(t-k), \quad (6)$$

这就是美国航天飞机与空射飞马火箭上著名的线性正切制导律. 具体详见参考文献[1].

如何确定表达式(5)中的共轭乘子向量函数 $\lambda(t), \dot{\lambda}(t)$, 就成为该问题求解与工程应用的关键. 文献[1]没有给出具体的解法, R. F. Jagers 在文献[2]中提供了一种间接解法, 求解过程非常复杂, 而且计算量大, 实时应用受到限制, 特别是末尾的收敛特性误差偏大, 还有待改善. 本文提出的新解法属直接法, 是通过引入 5 个迭代求解的制导变量表达 $\lambda(t), \dot{\lambda}(t)$, 然后利用牛顿迭代法进行 5 变量的快速数值求解, 收敛性较好.

注意, 在第 k 个制导或采样周期(通常为 0.1 s~0.2 s)内, λ_k 是定常单位向量, $\dot{\lambda}_k$ 是定常速率向量. 由于在制导的迭代过程中, 不断刷新 $k, \lambda_k, \dot{\lambda}_k$, 于是可写成

$$\mathbf{u}(t) = \lambda_k \cos \omega(t-k) + (\dot{\lambda}_k/\omega) \sin \omega(t-k). \quad (7)$$

弹道式火箭的显式解法属于复杂的多变量两点边值问题, 具有相当的难度. 还有一重要之处在于如何根据当前所选择的控制律, 准确预估出火箭熄火时刻的位置和速度. 预估公式的精度关系到数值迭代求解的精度、稳定性和鲁棒性, 而且应该是箭上容易实时实现的代数公式.

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_{go} + \mathbf{V} + \mathbf{V}_{grav}, \quad (8)$$

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_{go} + \mathbf{R} + \mathbf{V}T_{go} + \mathbf{R}_{grav}, \quad (9)$$

式中, $\mathbf{V}_p, \mathbf{R}_p$ 为火箭熄火点(末端)的速度与位置向量的预估值; \mathbf{V}, \mathbf{R} 为火箭当前时刻的速度与位置向量; T_{go} 为剩余段的飞行时间, 即当前时刻到熄火点的时间; $\mathbf{V}_{go}, \mathbf{R}_{go}$ 为剩余段的需要

速度增量和需要位移增量; V_{grav} , R_{grav} 为剩余段由重力引起的速度增量和位移增量。具体计算参见文献[2], 该文提供了较高精度的解析公式。下文仅详叙在数值求解方法上的创造性工作。

2 边值问题的数值迭代解法

对于火箭质心的空间运动, 由于推力大小不可调, 只能求解 5 维边值问题。在此提出引入 5 个迭代求解的制导变量 $\alpha, \gamma, \beta, \xi, T_{\text{go}}$, 则根据 u 是单位向量, 而且由文献[1] 的推导过程可知, $\lambda(t)$ 与 $\dot{\lambda}(t)$ 是正交的, 因此由这两点容易证明 $\lambda(t)$ 与 $\dot{\lambda}(t)$ 的具体形式可表达如下:

$$\lambda = [\cos \alpha \cos \gamma, \sin \alpha \cos \gamma, -\sin \gamma]^T, \quad (10)$$

$$\dot{\lambda} = \beta \left[-\tan \alpha, 1 + \frac{\xi \tan \gamma}{\sin \alpha}, \xi \right]^T, \quad (11)$$

这些迭代变量的初值可以依据标准弹道进行大致设置。

因为弹道导弹弹头的纵向射程 $L = L(r_K, V_K, \Theta_K)$, 横程 $H = H(z_K, \dot{z}_K)$, 所以为保证弹着点精度, 关键是控制火箭熄火点的参数精度, 即熄火点在射面内的地心矢径 r_K , 射面内的速度模 V_K , 射面内的当地速度倾角 Θ_K , 横向位置 z_K , 横向速度 \dot{z}_K , 火箭发射卫星的入轨精度也取决于这些参数。所以迭代制导时可选择这 5 个参数作为边界条件。由 (10)、(11) 式不难得出对应这 5 个边界条件的预估值。

根据牛顿迭代公式

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \xi \\ T_{\text{go}} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \xi \\ T_{\text{go}} \end{bmatrix}_n + \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial \alpha} & \frac{\partial V}{\partial \beta} & \frac{\partial V}{\partial \gamma} & \frac{\partial V}{\partial \xi} & \frac{\partial V}{\partial T_{\text{go}}} \\ \frac{\partial r}{\partial \beta} & \frac{\partial r}{\partial \beta} & \frac{\partial r}{\partial \beta} & \frac{\partial r}{\partial \beta} & \frac{\partial r}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} & \frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} & \frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} & \frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} & \frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial T_{\text{go}}} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial T_{\text{go}}} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial T_{\text{go}}} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial T_{\text{go}}} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial T_{\text{go}}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_K - V_P \\ r_K - r_P \\ \Theta_K - \Theta_P \\ z_K - z_P \\ \dot{z}_K - \dot{z}_P \end{bmatrix} \quad (12)$$

可以快速求出制导变量 T_{go} 、 α 、 β 、 γ 、 ξ 进而得到 $\lambda(t)$ 、 $\dot{\lambda}(t)$ 。于是推力方向的单位向量由下式确定。

$$u = \lambda \cos \lambda(t - k) + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \sin \lambda(t - k). \quad (13)$$

记 $u = [u(1), u(2), u(3)]^T$,

故火箭在真空段的两点边值问题的数值解, 即相应的偏航姿态角 ϕ 和俯仰姿态角 φ 应为

$$\phi = -\arcsin u(3), \quad (14)$$

$$\varphi = \arctan[u(2)/u(1)]. \quad (15)$$

以上均在地心发射惯性坐标系中进行牛顿数值迭代计算。计算过程见图 1。

3 数值仿真验证

为验证所提出方法的正确性, 进行数值仿真。这里以某火箭二级的参数为例, 考虑初始状态偏差的影响。

情况 1 标准初始状态+零偏差

$$x_0 = 83\,543.3\text{ m} + 0\text{ m}, \quad V_{x0} = 2\,218.0\text{ m/s} + 0\text{ m/s}, \quad y_0 = 6\,408\,419.0\text{ m} + 0\text{ m},$$

$$V_{y0} = 1\,020.4\text{ m/s} + 0\text{ m/s}, \quad z_0 = 14\,600\text{ m} + 0\text{ m}, \quad V_{z0} = -85.6\text{ m/s} + 0\text{ m/s}$$

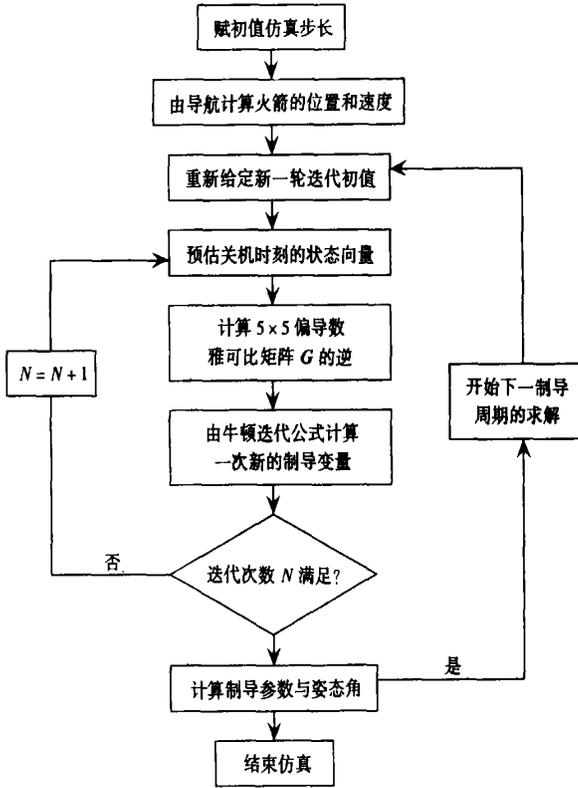


图 1 迭代制导仿真框图

情况 2 标准初始状态+ 如下偏差

$$x_0 = 83\,543.3\text{ m} + 2\,000\text{ m}, \quad V_{x0} = 2\,218.0\text{ m/s} + 50\text{ m/s},$$

$$y_0 = 6\,408\,419.0\text{ m} + 2\,000\text{ m}, \quad V_{y0} = 1\,020.4\text{ m/s} + 30\text{ m/s},$$

$$z_0 = 14\,600\text{ m} + 100\text{ m}, \quad V_{z0} = -85.6\text{ m/s} + 0\text{ m/s}$$

另外假设飞行中俯仰角存在 0.5° 的常值控制误差, 质量秒流量是如下形式, 即推力有偏差

$$\begin{cases} 35.8 + 2.0 \sin(\pi t / 30), & \text{当 } t \leq 40\text{ s}, \\ 37.8, & \text{当 } t > 40\text{ s}, \end{cases} \text{标准秒流量是 } 37.8\text{ kg/s}$$

表 1 两点边值问题数值迭代仿真结果

标准终端边值	解算情况 1 的终端边值	解算情况 2 的终端边值
$V_K = 5\,236.9\text{ m/s}$	$V_K = 5\,235.3\text{ m/s}$	$V_K = 5\,239.0\text{ m/s}$
$R_K = 6\,493\,850\text{ m}$	$R_K = 6\,493\,845\text{ m}$	$R_K = 6\,493\,912\text{ m}$
$\Theta_K = 23.5194^\circ$	$\Theta_K = 23.5134^\circ$	$\Theta_K = 23.5280^\circ$
$z_K = 9\,450.1\text{ m}$	$z_K = 9\,451.5\text{ m}$	$z_K = 9\,447.4\text{ m}$
$\dot{z}_K = -86.7$	$\dot{z}_K = -86.7$	$\dot{z}_K = -86.725$

从表 1 的计算结果可以看出, 无论是对无偏差的情况 1 还是有较大偏差的情况 2, 所提出的边值问题的数值迭代解法均有较高的收敛精度。图 2~ 图 9 分别给出了标称情况与偏差情况 2 的数值迭代求解的仿真过程曲线(位置和速度在熄火点的值, 仿真弹道曲线和标准弹道曲线的端点几乎是等高的), 与相应的火箭俯仰角和偏航角随时间的变化规律(即边值问题的数

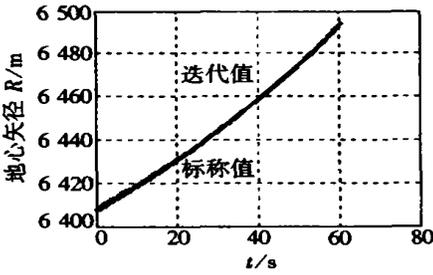


图2 仿真地心矢径随时间的变化曲线

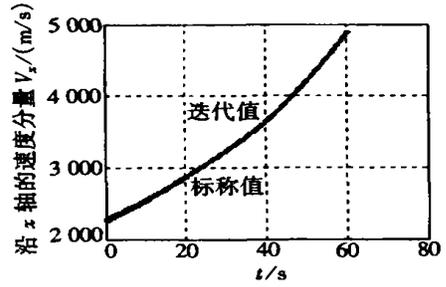


图3 仿真沿 x 轴速度分量随时间的变化曲线

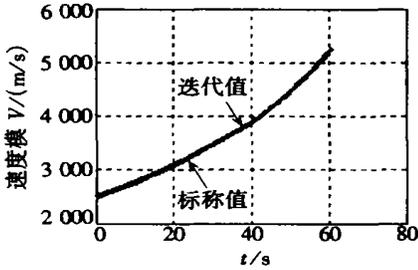


图4 仿真速度模随时间的变化曲线

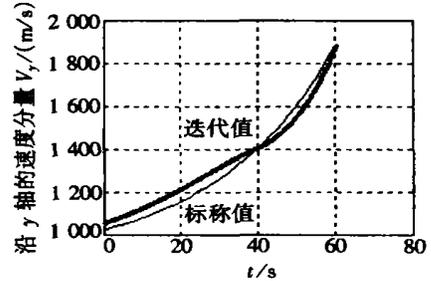


图5 仿真沿 y 轴速度分量随时间的变化曲线

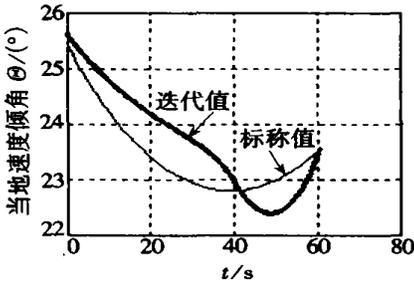


图6 仿真当地速度倾角随时间的变化曲线

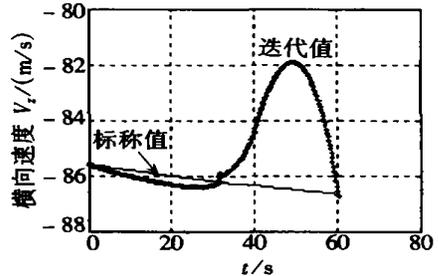


图7 仿真横向速度分量随时间的变化曲线

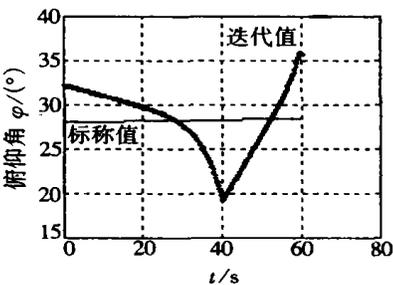


图8 制导所需的俯仰角变化曲线

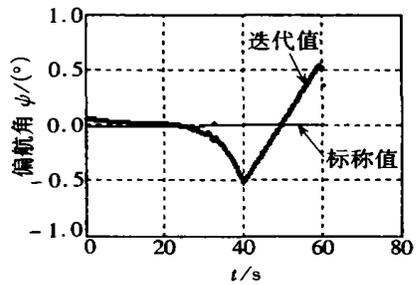


图9 制导所需的偏航角变化曲线

值解)。

4 结 论

经过多个仿真实例表明, 本文所开发的数值迭代解法在稳定性、鲁棒性、制导精度方面具有优良的品质; 采用了文献[2]中所提供的精度很高的端点预估解析公式, 主要耗时在于要解

5×5 的逆矩阵, 但目前的硬件技术水平如 DSP 芯片完全可以在 $0.1 \text{ s} \sim 0.2 \text{ s}$ 的制导周期内完成相应的牛顿快速迭代计算, 仿真表明每次迭代几步就达到了很高的收敛精度, 因此实时性不是问题。

仿真结果表明本算法可适应较大初始状态偏差 10% 以内和一定姿态控制偏差 5% 以内等的火箭鲁棒自适应制导需求, 但推力偏差应小于 2% 。而且推力偏差越小, 精度越高。

[参 考 文 献]

- [1] Mchenry R L. Space Shuttle ascent guidance, navigation, and control[J]. J Astronaut Sci, 1979, 27(1): 1—38.
- [2] Jagers R L. An explicit solution to the exoatmospheric powered flight guidance and trajectory optimization problem for rocket propelled vehicles[R]. AIAA 1051, 1977, 782—798.
- [3] Rovner Daniel. GN & C for pegasus air_launched space booster: design and first flight results[R]. NASA 911 105, 1991, 450—458.
- [4] Macpheson Duncan. An explicit solution to the powered flight dynamics of a rocket vehicle[R]. AD_293892, 1980, 358—367.
- [5] 韩祝斋. 用于大型运载火箭的迭代制导方法[J]. 宇航学报, 1983, 12(1): 12—18.
- [6] 程国采. 弹道导弹最优制导与控制[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1990.
- [7] 贾沛然. 远程火箭弹道学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1993.
- [8] 任萱. 人造地球卫星轨道力学[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 1988.

A New Efficient Method to the Boundary Value Problem for Ballistic Rocket Guidance

LIU Xin_jian, YUAN Tian_bao

(Institute of Aerospace Engineering, National University of Defense Technology,
Changsha 410073, P. R. China)

Abstract: The exploitation of rocket guidance technology on the basis of the guidance law of Space Shuttle and Pegasus rocket was performed. A new efficient method of numerical iteration solution to the boundary value problem was put forward. The numerical simulation results have shown that the method features good performance of stability, robustness, high precision, and algebraic formulas in real computation. By virtue of modern digital signal processor(DSP), high speed chip technology, the algorithm can be used in real time and can adapt to the requirements of the big primary bias of rocket guidance.

Key words: rocket guidance and control; boundary value problem; numerical iteration