应用数学和力学,第 6 卷 第 11 期(005 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(005) 11_1 71_07

离散扰动 NLS 方程组的 Smale 马蹄与混沌 (Ⅱ) ——Smale 马蹄*

高 平[1], 郭柏灵

(1. 广州大学 应用数学系, 广州 510405;
. 应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(我刊编委郭柏 灵来稿)

摘要: 利用 n 维 Conley_Moser 条件证明了一类离散扰动非线性 Schrödinger 方程(NLS) 的 Smale 马蹄的存在性。由以上结果, 我们得到离散扰动 NLS 方程组存在不变集 Λ, 其动力系统与四符号变换拓扑共轭。

关 键 词: 同宿轨道; Poincaré 映射; Smale 马蹄; Conley_Moser 条件
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

续文献[1], 这节我们应用推广的 Conley_Moser 条件[ ] 证明下面离散 NLS 方程组 Smale 马蹄的存在性。

考虑如下 n 粒子(任意 $< n < \infty$) 有限差分动力系统:

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\dot{q}_n = {} & (1/h)[q_{n+1} - q_n + q_{n-1}] + |q_n|(q_{n+1} + q_{n-1}) - \omega q_n + \\ & \mathrm{i}\varepsilon[-\alpha q_n + (\beta/h)(q_{n+1} - q_n + q_{n-1}) - \Gamma - \\ & \xi|q_n| q_n - \delta|q_n|^4 q_n], \end{aligned} \tag{1}$$

其中

$$q_{n+N} = q_n,\quad q_{N-n} = q_n,\quad h = 1/N,$$

$$N\tan\frac{\pi}{N} < \omega < N\tan\frac{\pi}{N},\qquad 当 N > 3,$$

$$3\tan\frac{\pi}{3} < \omega < \infty,\qquad 当 N = 3,$$

$$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0),\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \Gamma > 0,\ \xi > 0,\ \delta > 0 \text{ 为常数}.$$

显然, 这是 $(M + 1)$_维系统, 当 $M = N/$ 时偶, $M = (N - 1)/$ 时奇。

系统(1) 是以下扰动 NLS 方程组的有限差分离散化:

$$\mathrm{i}q_t = q_{xx} + (q\bar{q} - \omega)q + \mathrm{i}\varepsilon[-\alpha q + \beta q_{xx} - \Gamma - \xi|q| q - \delta|q|^4 q], \tag{ }$$

---

* 收稿日期: 004_08_08; 修订日期: 005_08_ 3
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471046) ; 广东省自然科学基金资助项目(04300099)
作者简介: 高平(196 —) , 女, 云南曲靖人, 教授, 博士(联系人. + 86_ 0_86551803; E_mail: pinggaow@ sohu. com) 。

其中 $q(x+1)=q(x)$, $q(-x)=q(x)$, $\pi<\omega<\pi$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\Gamma>0$, $\xi>0$, $\delta>0$ 是常数•

1 有关定义

首先我们定义“板”(slab)•

Σ_0 上板“$S_l^{(i)}$”$(i=1,\ ,\ l\geqslant l_0)$ 按如下定义

$$
\begin{aligned}
S_l^{(i)}\equiv\Big\{q\in\Sigma_0\mid\ &\mu\exp\Big\{-\gamma_1(T_{(l+1)}-\pi/\ )\Big\}\leqslant z_1^0(q)\leqslant\\
&\mu\exp\Big\{-\gamma_1(T_l-\pi/\ )\Big\},\\
&|x_1^0(q)-x_1^{(+,i)}|\leqslant\mu\exp\Big\{-0.5\alpha_1T_l\Big\},\\
&|z^1(P_0^1(q))-z^{(-,i)}|\leqslant\mu\exp\Big\{-0.5\alpha_1T_l\Big\}\Big\},
\end{aligned}\tag{3}
$$

其中 $T_l=(1/\beta_1)(l\pi-\varphi)+o(1)$, $x_1^{(+,1)}=x_1^{(+,\ )}$, $z^{(-,1)}=-z^{(-,\ )}$•

另一个板 $\mathcal{S}_l$ 具有如下形式:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_l\equiv\Big\{q\in\Sigma_0\mid\ &\mu\exp\Big\{-\gamma_1(T_{(l+1)}-\pi/\ )\Big\}\leqslant z_1^0(q)\leqslant\mu\exp\Big\{-\gamma_1(T_l-\pi/\ )\Big\},\\
&|x_1^0(q)-x_1^{(+,1)}|\leqslant\mu\exp\Big\{-0.5\alpha_1T_l\Big\},\\
&|z^1(P_0^1(q))|\leqslant|z^{(-,1)}|+\mu\exp\Big\{-0.5\alpha_1T_l\Big\}\Big\}•
\end{aligned}
$$

令 $p_l^{(+,i)}\equiv q^i{}_l$ 和 $p_l^{(-,i)}\equiv q^i{}_{l+1}$, $i=1,\ $, 表示 Poincar 映射 P 的不动点, 其中 $p_l^{(+,i)}$ 和 $p_l^{(-,i)}$ 分别对应(3) 中的 T_l 和 $T_{l+1}(l\geqslant l_0)$• 我们有

$$
p_l^{(\pm,i)}\subset P(S_l^{(i)})\cap S_l^{(i)},\qquad i=1,\ •\tag{4}
$$

令 $\bar S_l^{(i)}(i=1,\ )$ 和 $\bar{\mathcal{S}}_l$ 分别表示 $S_l^{(i)}(i=1,\ )$ 和 $\mathcal{S}_l$ 在 Σ_0 上的闭包• 我们分别定义 $S_l^{(i)}(i=1,\ )$ 和 $\mathcal{S}_l$ 的稳定边界如下:

$$
\begin{aligned}
&\partial_sS_l^{+,(i)}\equiv\Big\{q\in\bar S_l^{(i)}\mid x_1^0(q)-x_1^{(+,i)}=\mu\exp\Big\{-0.5\alpha_1T_l\Big\}\Big\},\\
&\partial_sS_l^{-,(i)}\equiv\Big\{q\in\bar S_l^{(i)}\mid x_1^0(q)-x_1^{(+,i)}=-\mu\exp\Big\{-0.5\alpha_1T_l\Big\}\Big\},\\
&\partial_sS_l^{\sigma,(i)}\equiv\Big\{q\in\bar S_l^{(i)}\,\|\sigma(q)|=\mu,\ \sigma=\sqrt{(x_j^0(q))+(y_j^0(q))},\\
&\qquad\qquad\leqslant j\leqslant M-1;\ \text{或}\ \sigma=|z_k^0|,\ k=3,4\Big\},\\
&\partial_s\mathcal{S}_l^{+}\equiv\Big\{q\in\bar{\mathcal{S}}_l\mid x_1^0(q)-x_1^{(+,i)}=\mu\exp\Big\{-0.5\alpha_1T_l\Big\}\Big\},\\
&\partial_s\mathcal{S}_l^{-}\equiv\Big\{q\in\bar{\mathcal{S}}_l\mid x_1^0(q)-x_1^{(+,i)}=-\mu\exp\Big\{-0.5\alpha_1T_l\Big\}\Big\},\\
&\partial_s\mathcal{S}_l^{\sigma}\equiv\Big\{q\in\bar{\mathcal{S}}_l\,\|\sigma(q)|=\mu,\ \sigma=\sqrt{(x_j^0(q))+(y_j^0(q))},\\
&\qquad\qquad\leqslant j\leqslant M-1;\ \text{或}\ \sigma=|z_k^0|,\ k=3,4\Big\},
\end{aligned}
$$

我们分别用 $\partial_uS_l^{(i)}(i=1,\ )$ 和 $\partial_u\mathcal{S}_l$ 表示不稳定边界:

$$
\begin{aligned}
&\partial_uS_l^{+,(i)}\equiv\Big\{q\in\bar S_l^{(i)}\mid z_1^0(q)=\mu\exp\Big\{-\gamma_1(T_l-\pi/\ )\Big\}\Big\},\\
&\partial_uS_l^{-,(i)}\equiv\Big\{q\in\bar S_l^{(i)}\mid z_1^0(q)=-\mu\exp\Big\{-\gamma_1(T_{(l+1)}-\pi/\ )\Big\}\Big\},\\
&\partial_uS_l^{\sigma,(i)}\equiv\Big\{q\in S_l\,\|\sigma(q)|=\mu\exp\Big\{-0.5\alpha_1T_l\Big\},\ \sigma=z^1(P_0^1(q))-z^{(-,i)}\Big\},\\
&\partial_u\mathcal{S}_l^{+}\equiv\Big\{q\in\bar{\mathcal{S}}_l\mid z_1^0(q)=\mu\exp\Big\{-\gamma_1(T_l-\pi/\ )\Big\}\Big\},\\
&\partial_u\mathcal{S}_l^{-}\equiv\Big\{q\in\bar{\mathcal{S}}_l\mid z_1^0(q)=-\mu\exp\Big\{-\gamma_1(T_{(l+1)}-\pi/\ )\Big\}\Big\},\\
&\partial_u\mathcal{S}_l^{\sigma}\equiv\Big\{q\in\bar{\mathcal{S}}_l\,\|\sigma(q)|=\mu\exp\Big\{-0.5\alpha_1T_l\Big\},\ \sigma=z^1(P_0^1(q))-z^{(-,i)}\Big\}•
\end{aligned}
$$

则我们有以下结论:

结论 2　$S_l^{(i)}(i=1,\ )$ 是 $\mathbb{S}_l$ 的不稳定"薄片"•

由式(4)及以上定义, $P(S_l^{(i)})(i=1,\ )$ 将 $\mathbb{S}_l$ 分割为 4 个区域 $V_l^{\pm,i}(i=1,\ )$, 其中

$$p_l^{(\pm,i)}\in V_l^{(\pm,i)},\quad i=1,\ •$$

令 $H_l^{(\pm,i)}\equiv P^{-1}(V_l^{(\pm,i)}), i=1,\ $, 则有 $H_l^{(\pm,i)}\in S_l^{(i)}(i=1,\ ), H_l^{(\pm,i)}$ 的不稳定边界

$$\partial_u H_l^{(+,i)}=P^{-1}(\partial_u V_l^{(+,i)}),$$

$$\partial_u H_l^{(-,i)}=P^{-1}(\partial_u V_l^{(-,i)})•$$

为得到使得 $V_l^{(\pm,i)}$ 和 $H_l^{(\pm,i)}$, $i=1,\ $ 满足Conley_Moser条件的充分条件, 我们首先在 Σ_0 和 Σ_1 上分别引入如下新的坐标系

$$(x_1^0, z_1^0, \xi_s^0, \xi_u^0)$$

和

$$(x_1^1, z_1^1, \xi_s^1, \xi_u^1),$$

其中 $\xi_s^\tau(\tau=0,1)$ 是$(\ (M-\ 1))$ 维向量,

$$\mathrm{entry}(\xi_s^\tau)=\sigma_k^\tau,\begin{cases}\sigma=x,y, & \leqslant k\leqslant M-1,\\ \sigma=z, & <k\leqslant 4,\end{cases}$$

$\xi_u^\tau(\tau=0,1)$ 是(1) 维向量, $\mathrm{entry}(\xi_u^\tau)=\sigma_k^\tau,\ \sigma=z, k=\ $•

通过 P_1^0 的线性逼近, Σ_1 上坐标系$(x_1^1, y_1^1, \xi_s^1, \xi_u^1)$ 映射为 Σ_0 上的$(x_1^1, y_1^1, \bar{\xi}_s^1, \bar{\xi}_u^1)$• 由于 P_1^0 是可微分变换, 文献[1]中式(15)的表达式可改写为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^0\\ \boldsymbol{y}^0\\ \boldsymbol{z}^0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{A}+\Gamma_1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\ \boldsymbol{y}^1\\ \boldsymbol{z}^1\end{pmatrix},\tag{5}$$

$$\begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{x}^0\\ \delta\boldsymbol{y}^0\\ \delta\boldsymbol{z}^0\end{pmatrix}=(\boldsymbol{A}+\Gamma)\begin{pmatrix}\delta\boldsymbol{x}^1\\ \delta\boldsymbol{y}^1\\ \delta\boldsymbol{z}^1\end{pmatrix},\tag{6}$$

其中

$$\Gamma_1\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\ \boldsymbol{y}^1\\ \boldsymbol{z}^1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

$x_1^1\_y_1^1$ 平面上的环面(由 $P_1^0(S_l)$ 到 $x_1^1\_y_1^1$ 平面的映射构成), 具有 $\mathscr{O}(\exp\{-1.5\alpha_1 T_l\})$ 阶宽度, $\mathscr{O}(\exp\{-\alpha_1 T_l\})$ 阶半径, $l\to+\infty$•

然后, 我们将 $(x_1^1, y_1^1)_$平面上坐标系用极坐标(γ_1^1, θ_1^1) 表示, 则存在 l_1 使得对所有 $l\geqslant l_1$ 和正的小 θ_0,

$$S_+^i:\ \theta_1^1(P_0^1(p_{l_1}^{(+,i)}))-\theta_0\leqslant\theta_1^1(P_0^1(p_{l_1}^{(+,i)}))\leqslant\theta_1^1(P_0^1(p_{l_1}^{(+,i)}))+\theta_0,$$

$$S_-^i:\ \theta_1^1(P_0^1(p_{l_1}^{(-,i)}))-\theta_0\leqslant\theta_1^1(P_0^1(p_{l_1}^{(-,i)}))\leqslant\theta_1^1(P_0^1(p_{l_1}^{(-,i)}))+\theta_0•$$

我们将 $(x_1, y_1)_$平面上 S_+^i 和 S_-^i 关于 Poincar 映射 P_1^0 的象分别记为

$$S_+^i=P_1^0(S_+^i),\quad S_-^i=P_1^0(S_-^i),$$

在 $e(x_1^1, y_1^1)_$平面上引入线坐标(e_u, e_s), 并限制在 S_+^i 和 S_-^i 上, 记切向量 $\boldsymbol{E}_u^{(+,i)}$、$\boldsymbol{E}_s^{(+,i)}$, $i=$

1, 为

$$E_{\mathrm{u}}^{(+,i)} \equiv T_{p_{l_1}^{(+,i)}} e_{\mathrm{u}},\quad E_{\mathrm{s}}^{(+,i)} \equiv T_{p_{l_1}^{(+,i)}} e_{\mathrm{s}}\cdot$$

假设:

(V)

$$\mathrm{span}\left\{e_{x_1^0},\ E_{\mathrm{u}}^{(+,i)},\ e_{\xi_{\mathrm{s}}^0},\ e_{\tilde{\xi}_{\mathrm{u}}^1}\right\} = \Sigma_0,$$

$$\mathrm{span}\left\{e_{x_1^0},\ E_{\mathrm{s}}^{(+,i)},\ e_{\xi_{\mathrm{s}}^0},\ e_{\tilde{\xi}_{\mathrm{u}}^1}\right\} = \Sigma_0,$$

其中 $e_{x_1^0}$、$e_{\xi_{\mathrm{s}}^0}$、$e_{\bar{\xi}_{\mathrm{u}}^1}$ 分别表示单位向量•

下面我们定义 $S_l^{(i)}$ 沿 ξ_{u}^0 方向的直径:

$$d^{\mathrm{u}}(S_l^{(i)}) \equiv \sup_D\left\{ \| \xi_{\mathrm{u}}^0(q_1) - \xi_{\mathrm{u}}^0(q) \| \right\},$$

其中

$$D \equiv \left\{ q_1,\ q \in S_l^{(i)},\ x_1^0(q_1) = x_1^0(q),\ z_1^0(q_1) = z_1^0(q),\ \xi_{\mathrm{s}}^0(q_1) = \xi_{\mathrm{s}}^0(q) \right\}\cdot$$

定义 $P_0^1(S_l^{(i)})$ 沿 ξ_{s}^1 方向的直径如下:

$$d^{\mathrm{s}}(P_0^1(S_l^{(i)})) \equiv \sup_D\left\{ \| \xi_{\mathrm{s}}^1(q_1) - \xi_{\mathrm{s}}^1(q) \| \right\},$$

其中

$$D \equiv \left\{ q_1,\ q \in P_0^1(S_l^{(i)}),\ x_1^1(q_1) = x_1^1(q),\ y_1^1(q_1) = y_1^1(q),\ \xi_{\mathrm{u}}^1(q_1) = \xi_{\mathrm{u}}^1(q) \right\}\cdot$$

对 $\tilde{S}_l$ 的直径定义如$S_l^{(i)}$•

我们有如下估计:

$$d^{\mathrm{u}}(\tilde{S}_l) \sim \mathscr{O}(\exp\left\{- \gamma_1 T_l\right\}),\qquad 当\ l \to +\infty;$$

$$d^{\mathrm{s}}(P(S_l^{(i)})) \sim \mathscr{O}(\exp\left\{- \alpha_1 T_l\right\}),\qquad 当\ l \to +\infty\cdot$$

利用以上定义和估计我们得到以下结论•

结论 3 假设(V)成立, 存在充分大 l_0 使得对所有 $l \geqslant l_0$, $P(S_l^{(i)})$ $(i = 1,\ )$ 和 $\tilde{S}_l$ 相交于两个不相连的部分, $V_l^{(\pm,i)}$ $(i = 1,\ )$, 而且 $V_l^{(\pm,i)}$ $\tilde{S}_l$ 上的稳定薄片满足$\partial_{\mathrm{s}} V_l^{(\pm,i)} \subset \partial_{\mathrm{s}} P(\tilde{S}_l)$• 进而, $H_l^{(\pm,i)} \equiv P^{-1}(V_l^{(\pm,i)})$ $(i = 1,\ )$ 是不稳定薄片, $H_l^{(\pm,i)} \subset S_l^{(i)}$, $i = 1,\ $ •

最后我们定义稳定薄片 V 的直径如下

$$d(V) = \sup_G\left\{ \sup_k\left\{ \sup_{q_1, q \in G_k}\left\{ x_1^0(q_1) - x_1^0(q) + \| \xi_{\mathrm{s}}^0(q_1) - \xi_{\mathrm{s}}^0(q) \| \right\}\right\}\right\},$$

其中 G 是$S_l^{(i)}$ 上满足

$$\left\{ z_1^0 = \mathrm{const},\ \xi_{\mathrm{u}}^0 = \mathrm{const} \right\},$$

$$G \cap V = \bigcup_{k=1}^{K} G_k\cdot$$

不稳定薄片 H 的直径的定义类似可得•

Conley_Moser 条件

$$H_l^{(+,1)},\ H_l^{(-,1)},\ H_l^{(+,\ )},\ H_l^{(-,\ )},$$

分别记为

$$H_1,\ H\ ,\ H_{-1},\ H_{-}\ ;$$

$$V_l^{(+,1)},\ V_l^{(-,1)},\ V_l^{(+,\ )},\ V_l^{(-,\ )},$$

分别记为

V_1, V, V_{-1}, V_- ;

则我们有:

Conley_Moser 条件 1

$$\begin{cases} V_j = P(H_j), \\ \partial_s V_j = P(\partial_s H_j), \\ \partial_u V_j = P(\partial_u H_j), \qquad j = 1, \ , -1, - \end{cases}$$

Conley_Moser 条件 2 存在常数 $0 < v < 1$, 使得对任意稳定薄片 $V \subset V_j$, $j = 1, \ , -1, -$,

$$d(V) \leqslant v d(V),$$

其中 $V = P(V \cap H_j)$, $j = 1, \ , -1, -$; 对任意不稳定薄片 $H \subset H_j$, $j = 1, \ , -1, -$,

$$d(H) \leqslant v d(H),$$

其中 $H = P^{-1}(H \cap V_j)$, $j = 1, \ , -1, -$ •

Conley_Moser 条件 1 在 1 节中已证•

下面我们讨论 Conley_Moser 条件 • 由 P_0^1 与 P_1^0 的表达式, 即(5)、(6) 和文献[1] 中式(14), 我们有

$$d(V) \leqslant v_1 d(V),$$

其中 $v_1 \sim \mathscr{O}(\exp\{-\alpha_1 T_l\})$, $l \to +\infty$;

$$d(H) \leqslant v\ d(H),$$

其中 $v \sim \mathscr{O}(\exp\{-\gamma_1 T_l\})$, $l \to +\infty$•

因此 $V_l^{(\pm, i)}$ 和 $H_l^{(\pm, i)}$ 满足 n_维 Conley_Moser 条件•

3 拓扑共轭

Σ_4 表示具有如下形式的双无穷序列的集合

$$a = (\cdots a_- \ a_{-1} a_0 a_1 a \ \cdots),$$

其中 $a_k = 1, \ , -1$, 或 $-$, $k \in Z$•

我们在 Σ_4 上引入拓扑, 取

$$a^* = (\cdots a_-^* \ a_{-1}^* a_0^* \ a_1^* \ a^* \ \cdots)$$

的邻域基是

$$N_j = \left\{ a \in \Sigma_4 \mid a_k = a_k^* (|\ k < j\ |) \right\},$$

$j = 1, \ , \cdots$•

动力系统 σ 在 Σ_4 上按如下定义

$$b = \sigma(a), \quad b_k = a_{k+1}•$$

众所周知, 作用在 Σ_4 上的映射 σ 有可数无穷任意周期轨道, 不可数无穷非周期轨道和稠密轨道•

定义稳定“薄片”

$$V_{a_0 a_{-1}} = P(H_{a_{-1}}) \cap H_{a_0},$$

$$V_{a_0 a_{-1} \cdots a_{-k}} = P(H_{a_{-1} \cdots a_{-k}}) \cap H_{a_0}•$$

由 Conley_Moser 条件 ,

$$d(V_{a_0 a_{-1} \cdots a_{-k}}) \leqslant v_1 d(V_{a_0 a_{-1} \cdots a_{-(k-1)}}) \leqslant \cdots \leqslant v_1^{k-1} d(V_{a_0 a_{-1}}),$$

我们还有

$$V(a) = \bigcap_{k=1}^{\infty} V_{a_0 a_{-1} \cdots a_{-k}}, \qquad k \geqslant ,$$

是余维 $(m+1)$ 连通平面, 而且 $\partial V(a) \in \partial_u S_l^{(i)}$•

类似地, 定义不稳定薄片

$$H_{a_0 a_{-1}} = P^{-1}(H_{a_1}) \cap V_{a_0},$$

$$H_{a_0 a_1 \cdots a_k} = P^{-1}(H_{a_1 \cdots a_k}) \cap V_{a_0},$$

我们有

$$d(H_{a_0 a_1 \cdots a_k}) \leqslant v\, d(H_{a_0 a_1 \cdots a_k}) \leqslant \cdots \leqslant v^k d(H_{a_0}),$$

和

$$H(a) = \bigcap_{k=0}^{\infty} H_{a_0 a_1 \cdots a_k}$$

是 $(m+1)$_维连通平面, 而且 $\partial H(a) \in \partial_s S_l^{(i)}$•

下面我们定义映射

$$\phi: \Sigma \to S_l^{(1)} \cup S_l^{( )},$$

$$\phi(a) = p,$$

则有 $P(p) = \phi(\sigma(a))$• 即

$$P \circ \phi = \phi \circ \sigma•$$

令 $\Lambda^{(1,)} \equiv \phi(\Sigma_4)$• 则 $\Lambda^{(1,)}$ 是 $S_l^{(i)}$ 的紧不变 Cantor 子集, ϕ 是从 Σ_4 到 $\Lambda^{(1,)}$ 的同胚• 因此我们有与文献[3]中的类似的定理•

定理 存在紧不变 Cantor 子集 $\Lambda^{(1,)} \subset (S_l^1 \cup S_l) \subset S_l$, 使得 P 限制在 $\Lambda^{(1,)}$ 与四符号 $-\ ,\ -1, 1,$ 动力系统 σ 拓扑共轭• 即存在同胚

$$\phi: \Sigma_4 \to \Lambda^{(1,)}$$

使得以下图对换(commutes)成立

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_4 & \xrightarrow{\phi} & \Lambda^{(1,)} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow P \\ \Sigma_4 & \xrightarrow{\phi} & \Lambda^{(1,)} \end{array}•$$

4 Smale 马蹄

本文研究了离散扰动 NLS 方程组(1)的混沌• 通过应用文献[3]中的方法与文献[ ]和文献[3]中的 n_维 Conley_Moser 条件, 我们在同宿轨道附近构造 Poincar 映射, 与 n 维“板”(“slabs”) Conley_Moser 条件, 并在条件(Ⅰ)~(Ⅴ)下证明了系统(1)的 Smale 马蹄的存在性•

[参 考 文 献]

[1] 高平, 郭柏灵. 离散扰动 NLS 方程组的 Smale 马蹄与混沌(Ⅰ)—Poincar 映射[J]. 应用数学和力学, 005, **26**(11): 1 61—1 70.

[ ] Wiggins S. Global Bifurcations and Chaos, Analytic Methods[M]. New York: Springer_Verlag, 1988.

[3] Li Y, Wiggins S. Homoclinic orbits and chaos in discretized perturbed NLS systems: Part Ⅱ, Symbolic dynamics[J]. J Nonlinear Sci, 1997, **7**(4): 315—370.

Smale Horseshoes and Chaos in Discretized Perturbed NLS Systems(Ⅱ)—Smale Horseshoes

GAO Ping[1], GUO Bo_ling
(1. Department of Applied Mathematics, Guangzhou University,
Guangzhou 510405, P.R.China;
. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics,
P.O. Box 8009, Beijing 100088, P.R.China)

Abstract: The existence of Smale horseshoes for a certain discretized perturbed nonlinear Schroedinger(NLS) equations was established by using n_dimensional versions of the Conley_Moser conditions. As a result, the discretized perturbed NLS system is shown to possess an invariant set Lamda on which the dynamics is topologically conjugate to a shift on four symbols.

Key words: homodinic orbit; Poincar map; Smale horseshoes; Conley_Moser condition