

文章编号: 1000-0887(2005) 11-1287-06

# 非局部摩擦在几种塑性成形工艺中的应用

闫小青, 罗海宝, 扶名福, 江五贵

(南昌大学 机电学院, 南昌 330029)

(本刊编委扶名福来稿)

**摘要:** 为了考虑金属材料表面微凸结构对模具与工件接触区域上的非局部摩擦效应, 在几种金属塑性成形加工问题中, 首次采用 Oden 等提出的非局部摩擦定律代替经典的库仑摩擦定律, 利用主应力法或工程法建立了相应问题的积微分形式的力平衡方程。在简化的情况下, 采用摄动法求得接触面上接触压力在非局部摩擦下的近似解析解, 并分析了影响接触压力非局部效应的相关因素。

**关键词:** 非局部摩擦; 塑性成形; 近似解

**中图分类号:** TG3; O34      **文献标识码:** A

## 引 言

金属塑性成形加工中, 在模具与材料之间存有摩擦。摩擦力在接触面上的分布形式对成形过程金属塑性流动规律等力能参数问题的求解起着重要作用。对摩擦现象虽已进行过很多研究, 但了解的尚属极少<sup>[1]</sup>。摩擦模型是求解金属塑性成形力学问题的边界条件之一。目前, 只能用简化的摩擦模型代替真实的摩擦分布。常用的简化摩擦模型有: 常摩擦模型和库仑摩擦模型。从连续介质力学观点考虑, 接触界面被视为具有剪切强度的连续膜。库仑摩擦定律是局部性质的, 即接触面上摩擦域内质点的摩擦效应只与该点的状态有关。然而, 实际上金属表面往往是粗糙的, 接触界面是粗糙面之间的接触, 质点的摩擦效应不仅与该点的状态直接相关, 而且与该点领域内的其它点的状态也有关, 这是一种非局部效应。

因此, Oden 等<sup>[2]</sup>认为在细观尺度上有必要用非局部摩擦模型替代库仑摩擦模型来考虑接触界面上微凸结构引起的非局部摩擦效应。本文将 Oden 等提出的非局部摩擦定律首次用于几类金属塑性成形加工的力学分析中, 如拔长、轧制、翻边。在这些成形工艺中, 利用主应力法或工程法, 并在非局部摩擦模型的假设下, 对这 3 类金属塑性成形加工工艺进行力学分析, 得到接触界面的压应力分布同非局部摩擦效应之间的关系。

## 1 几类金属塑性加工问题的力平衡方程

### 1.1 平辊轧制

收稿日期: 2003\_11\_03; 修订日期: 2005\_07\_05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19762002); 教育部高等学校骨干教师资助计划项目(1964)

作者简介: 闫小青(1964), 女, 江西宜春人, 副教授, 硕士(联系人, Tel: + 86\_791\_8305899; Fax: + 86\_791\_8305826; E\_mail: fmfu@ncu.edu.cn)

对平辊轧制过程作如下简化: 1) 将轧制过程近似看作平砧间压缩矩形件; 2) 忽略宽展, 将轧制看作平面变形; 3)  $\sigma(x)$  沿轧件高向、宽向均匀分布  $\sigma(x)$  为水平方向  $x$  上工件所受的压应力,  $\tau(x)$  为摩擦应力,  $p(x)$  为接触面上的法向压应力,  $K$  为材料的抗剪强度  $h, l$  分别为工件的变形区内平均厚度和变形区长度

如图 1 示, 得到其在工程法下的单元体的力平衡方程为<sup>[3]</sup>:

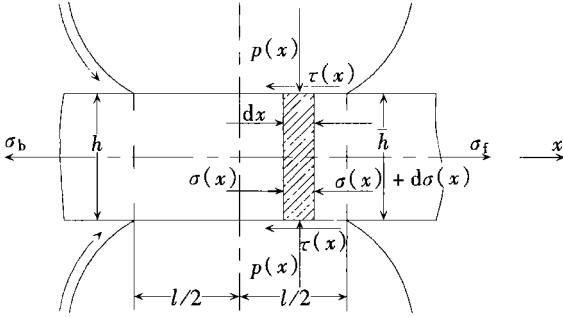


图 1 单元体受力图示

在前滑区

$$\frac{d \sigma(x)}{dx} + \frac{2 \tau(x)}{h} = 0, \quad 0 \leq x \leq l/2 \quad (1)$$

在后滑区

$$\frac{d \sigma(x)}{dx} - \frac{2 \tau(x)}{h} = 0, \quad -l/2 \leq x \leq 0 \quad (2)$$

近似屈服准则为

$$p(x) - \sigma(x) = K \quad (3)$$

轧制边界条件为

$$x = l/2, p(x) = K(1 - \tau/K), \quad (4a)$$

$$x = -l/2, p(x) = (1 - \tau/K)K \quad (4b)$$

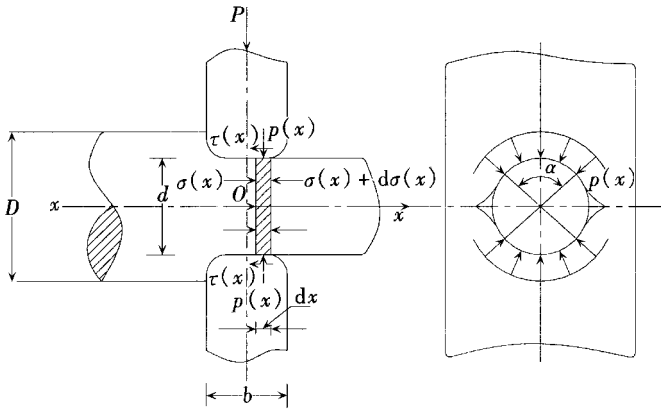


图 2 单元体受力图示

### 1.2 半圆形砧拔长

采用半圆形砧将直径为  $D$  的棒材拔长成直径为  $d$  的圆棒, 如图 2,  $\sigma(x)$  为轴向压应力,  $p(x)$  为径向压应力,  $\tau(x)$  同上,  $d$  为拔长的最后直径,  $\alpha$  为半圆形砧与坯料的接触面对应的中心角,  $\sigma_s$  为材料的屈服强度 利用主应力法得到其单元体的力平衡方程为<sup>[4]</sup>:

$$\frac{d \sigma(x)}{dx} + \frac{4 \tau(x)}{d} = 0 \quad (5)$$

近似屈服准则为

$$\sigma(x) - p(x) = \sigma_s \quad (6)$$

拔长边界条件为

$$x = b/2, \sigma(x) = 0, p(x) = -\sigma_s \quad (7)$$

### 1.3 变薄翻边

利用主应力法得到变薄翻边时单元体的力平衡方程为<sup>[5]</sup>:

$$\frac{dp(y)}{dy} + A(y) + Bp(y) = -C_s, \quad (8)$$

其中

$$A = \frac{m/\cos\alpha - 1}{(d_0/4)(1 - m^2)}, \quad B = \frac{m \tan\alpha (1/\cos\alpha - 1)}{(d_0/4)(1 - m^2)},$$

$$C = \frac{m \tan\alpha}{(d_0/4)(1 - m^2)}, \quad m = 1 - \frac{t_0 + t_1}{d_0},$$

式中  $p(y)$  为接触面上的法向压应力,  $\tau(y)$  为摩擦应力,  $s$  为材料的屈服强度

近似屈服准则为

$$p(y) + \tau(y) = s \quad (9)$$

翻边边界条件为

$$y = 0, \quad \tau(y) = 0, \quad p(y) = s,$$

为中间主应力影响系数

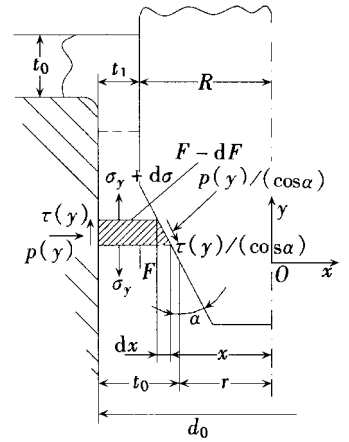


图 3 单元体受力图示

## 2 非局部摩擦模型

Oden 等提出的非局部摩擦模型为<sup>[2]</sup>

$$\tau(x) = S(p(x)), \quad (11)$$

$$S(p(x)) = \int_{\Omega} (|x - z|) p(z) dz, \quad (12)$$

式中  $\mu$  为摩擦系数,  $(|x - z|)$  为核函数, 一般取为  $\frac{1}{|x - z|}$  函数 一种典型的形式为

$$\mu(s) = \begin{cases} C_0 \exp[-\mu^2 / (s^2 - s_0^2)], & |s| < s_0, \\ 0, & |s| > s_0, \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $C_0$  为常数, 由  $\int_{\Omega} (|x - z|) dz = 1$  确定,  $\Omega$  为整个接触面  $\mu$  反映了影响质点  $x$  处摩擦力的有限邻域尺寸, 确定方法一般视接触情况而定

## 3 积微分形式的力平衡方程及近似解

在以往求解上述几类金属塑性成形工艺的方程时, 我们都是采用局部摩擦模型, 结合近似屈服准则, 得到皆为一阶常微分方程的单元体力平衡方程, 并且都能直接求得解析解 现在, 我们采用 Oden 等提出的非局部摩擦模型来求其近似解

将非局部摩擦模型代入上述力平衡方程, 并结合相应的近似屈服准则, 我们得到非局部摩擦模型下上述 3 类金属塑性成形加工工艺的单元体的积微分形式的力平衡方程: 平辊轧制:

前滑区

$$\frac{dp(x)}{dx} + \frac{2}{h} \int_{\Omega} (|x - z|) p(z) dz = 0 \quad (14)$$

后滑区

$$\frac{dp(x)}{dx} - \frac{2}{h} \int_{\Omega} (|x - z|) p(z) dz = 0 \quad (15)$$

半圆形砧拔长:

$$\frac{dp(x)}{dx} + \frac{4}{d} \int_c (|x-z|)p(z)dz = 0 \tag{16}$$

变薄翻边:

$$\frac{dp(y)}{dy} + A \int_c (|x-z|)p(z)dz + Bp(y) = -C_s \tag{17}$$

当  $\lambda = 0$  时,  $S(p(x)) = p(x)$ , 有  $p(x) = p(x)$ , 即库仑摩擦模型, 非局部摩擦模型退化为库仑摩擦模型, 说明库仑摩擦模型是非局部摩擦模型的一个特例 上述方程又重新成为传统的常微分方程

直接求解方程(14)~(17)比较困难, 我们考虑求其近似解, 即当  $\lambda$  值远小于接触面长度时, 在接触面为二维情况下, 将积分项里的压应力  $p(z)$  用在点  $x$  处的泰勒级数展开式的前3项近似代替 假定  $p^{(n)}(x)$  存在, 则

$$p(z) = p(x) + \frac{p'(x)}{1!}(z-x) + \frac{p''(x)}{2!}(z-x)^2, \tag{18}$$

将式(18)、(13)代入(12)得

$$S(p(x)) = \frac{p'(x)}{2} \int_{x-}^{x+} (|x-z|)(z-x)^2 dx + p(x) = 0.079 \frac{p''(x)}{2} p(x) + p(x), \tag{19}$$

将式(19)代入方程(14), (15)得

平辊轧制:

前滑区

$$0.158 \left[ \frac{p''(x)}{h} \right]^2 p(x) + p(x) + \frac{2}{h} p(x) = 0 \tag{20}$$

后滑区

$$0.158 \left[ \frac{p''(x)}{h} \right]^2 p(x) - p(x) + \frac{2}{h} p(x) = 0 \tag{21}$$

对于半圆形砧拔长和变薄翻边, 由于接触面为三维曲面, 因此对非局部摩擦作用区域分别作近似处理, 如图4和图5所示, 采用类似在非局部摩擦模型下处理接触面为平面时的求解过程, 同样可以得到

半圆形砧拔长:

$$0.079 \left[ \frac{4}{d} \right]^2 p(x) + p(x) + \frac{4}{d} p(x) = 0 \tag{22}$$

变薄翻边:

$$0.079A \frac{p''(y)}{2} p(y) + p(y) + (A+B)p(y) = -C_s \tag{23}$$

以上由非局部摩擦引入的二阶导数项都含有同  $\lambda$  值相关的相当小参数作为其系数, 我们将其视为摄动问题<sup>[6]</sup>, 采用直接展开法, 求其前两项之和<sup>[7,8]</sup>, 即退化问题的解(库仑摩擦模型时的解)与一次修正项之和, 该修正项反映了摩擦的非局部效应对接触面上压应力的影响 我们可以求得如下结果:

平辊轧制:

前滑区

$$p(x) = K \left[ 1 - \frac{f}{K} \right] \left[ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{h} \right]^2 \left[ \frac{l}{2} - x \right] \right] \exp \left[ \frac{2}{h} \left[ \frac{l}{2} - x \right] \right] \tag{24}$$

后滑区

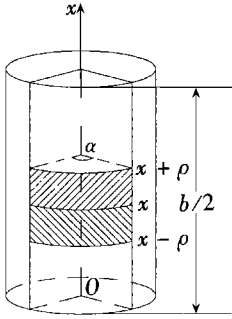


图4 非局部作用区域示意图

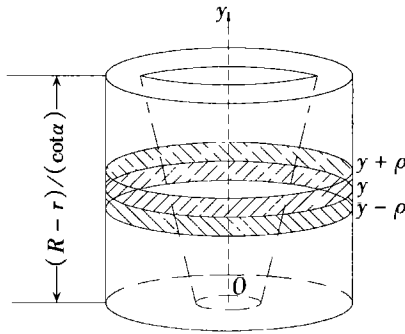


图5 非局部作用区域示意图

$$p(x) = \left[ 1 - \frac{b}{K} \right] K \left[ 1 + {}_1 \left( \frac{2}{h} \right)^2 \left( \frac{l}{2} + x \right) \right] \exp \left[ \frac{2}{h} \left( \frac{l}{2} + x \right) \right] \quad (25)$$

半圆形砧拔长:

$$p(x) = - {}_s \left[ 1 + {}_2 \left( \frac{4}{d} \right)^2 \left( \frac{b}{2} - x \right) \right] \exp \left[ \frac{4}{d} \left( \frac{b}{2} - x \right) \right] \quad (26)$$

变薄翻边:

$$p(y) = - \frac{{}_s C}{A + B} + (1 - {}_3 y) \frac{{}_s}{A + B} (A B + B + C) \exp[- y(A + B)], \quad (27)$$

其中

$${}_1 = 0.158 \left( \frac{b}{h} \right)^2, \quad {}_2 = 0.079 \left( \frac{4}{d} \right)^2, \quad {}_3 = 0.079 A^2 \quad (28)$$

从式(24)~式(28)可以得出,当  $\rho \rightarrow 0$  时,摩擦的非局部效应导致的修正项皆趋向于0,上述4式都退化为局部摩擦即库仑摩擦下的结果。可见,非局部摩擦包含了库仑摩擦这一特例。一次修正项既同有限领域尺寸  $\rho$  值相关,又同被加工工件及模具结构尺寸(如  $h, l, t, d$  等)相关。

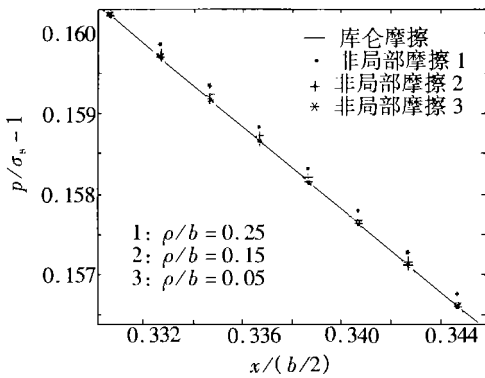


图6 半圆形砧拔长接触面上压应力分布

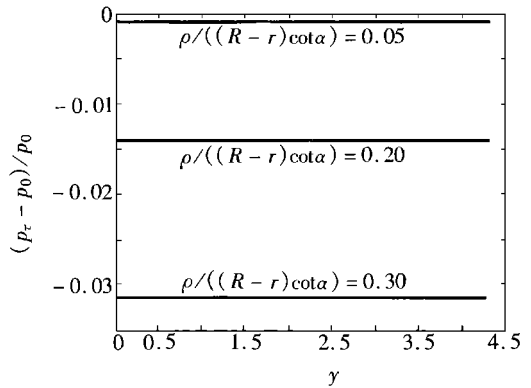


图7 变薄翻边接触面上非局部摩擦与局部摩擦下压应力的相对差距

图6、图7反映了半圆形砧拔长和变薄翻边接触面上非局部摩擦模型与局部摩擦模型下的压应力分布的关系。

## 4 结 论

- 1) 不同的金属塑性成形加工工艺,其接触面上的压应力分布形式不同,所导致的摩擦的非局部效应也就不相同
- 2) 摩擦系数对非局部摩擦效应有一定影响 一般情况下,摩擦系数越大,非局部效应就越显著
- 3) 接触面上压应力的分布同摩擦的非局部效应的作用区域的大小,即  $\lambda$  值的大小有很大关系

### [参 考 文 献]

- [1] B 艾维超[美]. 金属成形工艺与分析[M]. 王学文, 肖文斌, 张鸿光 译. 北京: 国防工业出版社, 1988.
- [2] Oden J T, Pires E B. Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity[J]. Journal of Application Mechanical of ASME, 1983, **50**(3): 67-76.
- [3] 赵志业 主编. 金属塑性加工力学[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1987.
- [4] 林治平 编著. 锻压变形力的工程计算[M]. 北京: 机械工业出版社, 1986.
- [5] 郭燕伶, 罗富美. 变薄翻边成形工序中摩擦的影响[J]. 锻压技术, 2002, **27**(3): 20-21.
- [6] A H 奈弗. 摄动方法[M]. 王辅俊, 徐钧涛, 谢寿鑫 译. 上海: 上海科技出版社, 1984.
- [7] 郭良, 扶名福. 楔形模宽条料拉拔非局部摩擦问题及近似求解[J]. 南昌大学学报(工科版), 2001, **23**(1): 1-4.
- [8] 郭良, 扶名福, 陈桂尧. 非局部摩擦问题在平面微粗中的应用及其近似解[J]. 塑性工程学报, 2001, **8**(1): 59-61.

## Application of Nonlocal Friction in Several Kinds of Plastic Forming Problems

YAN Xiao\_qing, LUO Hai\_bao, FU Ming\_fu, JIANG Wu\_gui

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Nanchang University, Nanchang 330029, P. R. China)

**Abstract:** The nonlocal friction law proposed by Oden et al was adopted in order consider the nonlocal friction effect of the asperities on the rough contact surface between the die and the workpiece in several kinds of metal plastic forming problems. The mechanical equilibrium equations with the integral-differential form were obtained by using the engineering method or slab method, and solved approximately by using the perturbation method. The normal stress distributions on the contact surfaces in metal forming problems with nonlocal friction were obtained, and the factors which affect the nonlocal friction effect were analyzed.

**Key words:** nonlocal friction; plastic working; approximate solution