文章编号: 1000_0887(2005) 11_1293_08

利普希茨伪紧缩映射下的利普希茨摄动迭代的 Bruck 公式*

K• 库玛,　B• K• 沙玛

(皮特• 莱维桑卡苏克拉大学 数学研究院, 赖普_492010, 印度)

(周哲玮推荐)

摘要: 在非线性分析中, 处理伪紧缩算子及其变形的解(不动点)存在性和近似性, 从而使演化方程的求解已经发展成为一个独立的理论• 使用近似不动点技术, 采用摄动迭代方法, 目的是证明利普希茨伪紧缩映射序列的收敛性• 该迭代方法适用于比利普希茨伪紧缩算子更一般的非线性算子以及 Bruck 迭代法无法证明其收敛性的情况• 推广了 Chidume 和 Zegeye 的结果•

关 键 词: 伪紧缩映射; 利普希茨摄动迭代; 不动点; 一致 Gateaux 微分范数
中图分类号: O177.91　　文献标识码: A

引　言

在参考文献[1]中, Browder 在 Banach 空间里定义了伪紧缩映射, 并且提出了该类映射与一类重要的所谓增生算子(在 Hilbert 空间中单调)间的关系• 映射 A 是增生的, 当且仅当 I_A 是伪紧缩的• 增生算子的映射理论与伪紧缩算子的不动点理论密切相关• Browder 提出, 初值演化系统

$$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+Au(t)=0,\quad u(0)=u_0 \tag{1}$$

可解, 则当 T 是局部利普希茨和增生的• 演化方程的例子常出现在包括热、波或薛定谔方程的模型中(参见 Zeidler[2])• 伪紧缩映射的重要性引起的非线性分析, 归结为与非扩展映射的紧密关系, 以及算子的单调性[2]• 诸多学者研究了不动点的存在性和迭代序列的结构, 这些非线性算子在各种条件下是单调的• 因此, 许多结果出现在那些使用伪紧缩算子和(或)它们的变形, 研究其迭代序列的存在性和收敛性的文献中(参见文献[3]~文献[8]及其文后的参考文献)•

在 Banach 空间中一个凸子集 K 具有近似(几乎)不动点属性(简称 afpp), 当每个非扩展映射 $T:K\mapsto K$ 满足 $\inf\{\|x-T(x)\|:x\in X\}=0$• 闭凸有界集往往具有上述性质• Goebel[9] 和Kuczumow[10] 首先提出在 Hilbert 空间中一些非有界集也具有几乎不动点属性• 随后, Ray[11, 12], Reich[13] 以及其他作者都研究了该问题• 一个序列若满足 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n\|\to 0$, 就

---

* 收稿日期: 2004_09_12
作者简介: B• K• 沙玛, 教授(联系人. E_mail: sharmabk_nib@sancharnet.in)•
本文原文为英文, 由潘春枝 译, 张禄坤 校•

称为 T 的近似不动点序列• 近似不动点序列(afps)的概念来自非扩展映射 T 的几乎不动点集的结构,不动点收敛性的可靠性条件是建立在 T 上或如下区域上的:

(a) T 的范围包含在 K 的紧子集中;

(b) T 从 K 映射到 K 并且在零点是半紧的(参见文献[14]);

(c) $(I-T)$ 从 E 的闭有界子集映射到 E 的闭有界子集(参见文献[15])•

在文献[16]中,Chidume 和 Mutangadura 提出 Mann 迭代格式无法收敛到利普希茨伪紧缩映射序列• 当然,这样的非线性映射的 Ishikawa 迭代序列是收敛的,但收敛率相对来说很慢[17]• 因此,Bruck[18]给定的递归公式就更具优势• 近年来,Chidume 和 Zegeye[19]用 Bruck[18]的递归公式和实 Banach 空间中的近似不动点序列技术,证明了利普希茨伪紧缩映射的收敛性•

本文的目的在于提出一种新的迭代格式,证明利普希茨伪紧缩映射的近似不动点序列的收敛性• 迭代格式是基于 Bruck[18]的结构并继承 Halpern 格式[20]• 我们的格式改善并推广了 Chidume 和 Zegeye[19]的迭代格式,理由如下• 首先,在我们的格式中考虑了利普希茨映射 f 在迭代序列行为中的摄动;其次,利普希茨映射包含恒等映射,因此,Chidume 和 Zegeye[19]的迭代公式能很容易地从新迭代格式中得到;再次,我们的迭代格式能处理那些比利普希茨伪紧缩算子更一般的非线性算子,而 Bruck 或其它迭代格式却无法证明它们是收敛性的• 理由是,在我们的迭代格式中采用非扩张映射• 我们采用不同的方法证明了序列 $\{x_n\}$ 的有界局限性,实际上简化了 Chidume 和 Zegeye[19]的证明•

1　预 备 知 识

我们来考虑实 Banach 空间 E 和它的对偶空间 E^*,设 J 表示从 E 到 2^{E^*} 的正规化对偶映射,并定义为:

$$Jx=\{f^*\in E^*:\langle x,f^*\rangle=\|x\|^2=\|f^*\|^2\},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示广义对偶对• 我们知道,如果 E^* 是严格凸的,那么 J 是单值的• 假如单值正规化对偶映射由 j 表示,那末,作为 Hahn_Banach 定理的一个直接结果,对于 X 中的每个 u,$J(u)$ 是非空的• 我们知道,当且仅当 X 是光滑时,$J(u)$ 是单值• 这就意味着在 X 的单位球体 U 上,对每个 x 和 h 存在

$$\lim_{t\to 0}\frac{\|x+th\|-\|x\|}{t},\tag{2}$$

在这种情况下,我们称 X 的范数是 Gateaux 微分• 也就是说,对 U 中的每个 h,由公式(2)定义的极限在 U 中对 x 一致收敛,则 X 的范数称为一致 Gateaux 微分• 众所周知,如果 X 的范数是一致 Gateaux 微分,那么映射 J 在从 X 上的范数拓扑到 X^* 的弱拓扑有界集上是一致连续的•

定义 1.1[21]　假如 K 是 E 的一个非空子集,如果不等式

$$\|x-y\|\leqslant\|x-y+t[(I-T)x-(I-T)y]\|\tag{3}$$

或它的等价形式

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\leqslant\|x-y\|^2,$$

对所有的 $x,y\in D(T)$ 和所有 $t>0$ 成立,则称映射 $T:K\to K$ 为伪紧缩• 如果存在 $L>0$,且使 $\|Tx-Ty\|\leqslant L\|x-y\|$, $\forall x,y\in D(T)$,则称算子 T 是利普希茨的• 如果 $L=1$,那么称 T 为非扩张的• 显然,每个非扩张映射都是伪紧缩的•

定义 1.2[21,22]　如果

$$\|x-y\| \leqslant \|x-y+s(Ax-Ay)\| \tag{4}$$

或它的等价形式

$$\langle Ax-Ay, j(x-y)\rangle \geqslant 0,$$

对所有的 $x, y \in D(A)$ 和所有的 $s > 0$ 成立, 则称映射 $A: K \to K$ 为增生的.

定义 1.3[23] 假如 K 是 Banach 空间 E 上的一个非空子集, 则 $x \in K$ 的内集如下定义

$$I_K(x) = \left\{x + \lambda(u-x): \lambda \geqslant 1\right\},$$

如果 $Tx \in \mathrm{cl}[I_K(x)]$ 对所有的 $x \in K$ 成立, 其中 $\mathrm{cl}[I_K(x)]$ 表示内集的闭集, 则映射 $T: K \mapsto E$ 称为弱内的. 每个自映射都是平凡弱内映射.

现在, 我们来介绍迭代过程.

假如 K 是实 Banach 空间 E 的非空凸子集, 那么对任意的 $x_1 \in K$, 得到序列$\left\{x_n\right\}$ 称为利普希茨摄动迭代:

$$x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n - \lambda_n\theta_n f(x_n - x_1), \qquad \forall n \in K,$$

其中$f: K \mapsto K$ 是利普希茨映射, $\left\{\lambda_n\right\}$ 和$\left\{\theta_n\right\}$ 是[0, 1]之间满足下列条件的实序列:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n = 0$;

(ii) $\lambda_n(1+\theta_n) \leqslant 1$, $\sum\limits_{1}^{\infty}\lambda_n\theta_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n}{\theta_n} = 0$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\theta_{n-1}/\theta_n - 1)}{\lambda_n\theta_n} = 0$.

满足这些条件的实序列的例子有 $\lambda_n = 1/(n+1)^a$ 和$\theta_n = 1/(n+1)^b$, 其中$0 < b < a$ 和$a + b < 1$.

为了证明主要的结果, 我们需要下面的引理.

引理 1.4[23] 假如 E 是一个实赋范线性空间, 且J 是E 上的一个正规对偶映射, 那么对任意给定的 $x, y \in E$, 下面的不等式都成立:

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x+y)\rangle, \qquad \forall j(x-y) \in J(x-y). \tag{5}$$

引理 1.5[24] 假如$\left\{\lambda_n\right\}$, $\left\{\alpha_n\right\}$ 和$\left\{\gamma_n\right\}$ 是非负的数值数列, 当 $n \to \infty$, 满足条件 $\lim\alpha_n = 0$, $\sum\limits_{1}^{\infty}\alpha_n = \infty$ 和 $\gamma_n/\alpha_n \to 0$. 假如给定递归不等式:

$$\lambda_{n+1}^2 \leqslant \lambda_n^2 - \alpha_n\phi(\lambda_{n+1}) + \gamma_n, \qquad \forall n \in N, \tag{6}$$

其中, $\phi: [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ 是一个严格递增函数, 在$(0, \infty)$ 上为正的, 且 $\phi(0) = 0$. 那么, 当 $n \to 0$ 时 $\lambda_n \to 0$.

引理 1.6(文献[23]中的命题 1) 假如 E 是一个 Banach 空间, K 是E 的一个非空闭凸子集, 并且 $T: K \mapsto E$ 是一个满足弱内条件的连续伪紧缩映射, 那么对 $z \in K$, 存在一个唯一路径 $t \to y_t \in K$, $t \in [0, 1)$, 满足下列条件:

$$y_t = tTy_t + (1-t)z. \tag{7}$$

另外, 我们注意到引理 1.6 中, 如果 $F(T) \neq \phi$, 那么$\left\{y_t\right\}$是有界的. 因此, 如果 E 有 Gateaux 微分范数, K 的每个闭凸且有界子集都具有非扩张自映射的不动点属性, 那么, 当 $t \to 1$, 路径强收敛到 T 的不动点. 上面的叙述可以确保$\left\{y_n\right\}$ 表示如下定义的序列:

$$y_n = y_{t_n} = t_nTy_{t_n} + (1-t_n)x_1, \ t_n = 1/(1+\theta_n), \qquad \forall n \geqslant 1.$$

2 主要结论

现在来证明我们的主要结论•

定理2.1 假如K是实Banach空间E的一个非空闭凸子集, $T: K \mapsto K$是具有利普希茨常数$L \geqslant 0$和$F(T) \neq \phi$的利普希茨紧缩映射• 对任意$x_1 \in K$, 序列$\{x_n\}$由下式得到:

$$x_{n+1} = (1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n - \lambda_n\theta_n f(x_n - x_1), \tag{8}$$

对所有的正整数n, 其中$f: K \mapsto K$是一个利普希茨映射, 且当$n \to \infty$有$\|x_n - Tx_n\| \to 0$•

证明 我们将证明分为3部分•

(i) 证明$\{x_n\}$是有界的•

由公式(5)和(8), 我们得到

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 = {} & \|(1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n - \lambda_n\theta_n f(x_n - x_1) - x^*\|^2 = \\
& \|x_n - x^* - \lambda_n((x_n - Tx_n) + \theta_n f(x_n - x_1))\|^2 \leqslant \\
& \|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_n\langle (x_n - Tx_n) + \theta_n f(x_n - x_1), j(x_{n+1} - x^*)\rangle = \\
& \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n\langle -(x_n - Tx_n) - \theta_n f(x_n - x_1), j(x_{n+1} - x^*)\rangle \leqslant \\
& \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n\langle (x_{n+1} - Tx_{n+1}) - (x_n - Tx_n) + \\
& \theta_n f(x_n - x_1), j(x_{n+1} - x^*)\rangle - 2\lambda_n\langle x_{n+1} - Tx_{n+1}, j(x_{n+1} - x^*)\rangle,
\end{aligned} \tag{9}$$

由于T是伪紧缩的, 我们就有$\langle x_{n+1} - Tx_{n+1}, j(x_{n+1} - x^*)\rangle \geqslant 0$• 故公式(9)就成为

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leqslant {} & \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n\langle (x_{n+1} - x_n) + (Tx_n - Tx_{n+1}) - \\
& \theta_n f(x_n - x_1), j(x_{n+1} - x^*)\rangle \leqslant \\
& \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n[(1+L)\|x_{n+1} - x_n\| + \theta_n L\|x_n - x_1\|]\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \\
& \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n[(1+L)\|(1-\lambda_n)x_n + \lambda_n Tx_n - \lambda_n\theta_n f(x_n - x_1) - x_n\| + \\
& \theta_n L\|x_n - x_1\|]\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \\
& \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n[(1+L)\lambda_n\|(x_n - Tx_n) + \lambda_n\theta_n f(x_n - x_1)\| + \\
& \theta_n L\|x_n - x_1\|]\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \\
& \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n[(1+L)(\lambda_n\|(x_n - Tx_n\| + \lambda_n\theta_n L\|x_n - x_1\|) + \\
& \theta_n L\|x_n - x_1\|]\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \\
& \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n[(1+L)\lambda_n(\|x_n - x^*\| + \|Tx^* - Tx_n\|) + \\
& (1+L)\lambda_n\theta_n L(\|x_n - x^*\| + \|x_1 - x^*\|) + \\
& \theta_n L(\|x_n - x^*\| + \|x_1 - x^*\|)]\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \\
& \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n[(1+L)^2\lambda_n\|x_n - x^*\| + (1+L)\lambda_n\theta_n L\|x_n - x^*\| + \\
& (1+L)\lambda_n\theta_n L\|x_1 - x^*\| + \theta_n L\|x_n - x^*\| + \theta_n L\|x_1 - x^*\|]\|x_{n+1} - x^*\| = \\
& \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_n[\{(1+L)^2\lambda_n + (1+L)\lambda_n\theta_n L + \theta_n L\}\|x_n - x^*\| + \\
& \{(1+L)\lambda_n\theta_n L + \theta_n L\}\|x_1 - x^*\|]\|x_{n+1} - x^*\|,
\end{aligned} \tag{10}$$

现在, 我们取$\|x_{n+1} - x_n\| = a_{n+1}$, 因为$\lim_{n\to\infty}(\lambda_n/\theta_n) = 0$, 所以对所有的$1 > \epsilon > 0$, 存在$N$, 使得$0 \leqslant \lambda_n/\theta_n \leqslant \epsilon$, $\forall n \in N$, 此时$\lambda_n \leqslant \theta_n$• 又因为$\lim_{n\to\infty}\theta_n = 0$, 故$\lambda_n^2 \leqslant \theta_n^2 \leqslant \theta_n$• 且$\theta_n^3 \leqslant \theta_n^2$•

因此, (10)式变为:

$$a_{n+1}^2 \leqslant a_n^2 + 2\lambda_n[\{(1+L)^2\lambda_n + (1+L)\lambda_n\theta_n L + \theta_n L\}a_n +$$

$$\begin{aligned}
&\rho\{(1+L)\lambda_n\theta_n L+\theta_n L\}]a_{n+1}\leqslant\\
&a_n^2+[\{2(1+L)^2\theta_n^2+(1+L)L\theta_n^3+\theta_n^2\}a_n+\\
&\rho\{(1+L)L\theta_n^3+\theta_n^2 L\}]a_{n+1}\leqslant\\
&a_n^2+[\{(2(1+L)^2+(1+L)L+1)\theta_n^2\}a_n+\\
&\rho\{((1+L)L+L)\theta_n^2\}]a_{n+1}=\\
&a_n^2+[\{(3L^2+5L+3)\theta_n^2\}a_n+\rho\{(L^2+2L)\theta_n^2\}]a_{n+1}\leqslant\\
&a_n^2+[C_1\theta_n^2 a_n+C_2\theta_n^2]a_{n+1}\leqslant\\
&a_n^2+[C\theta_n^2 a_n+C\theta_n^2]a_{n+1}\leqslant\\
&a_n^2+\epsilon_n[1+a_n]a_{n+1},
\end{aligned}$$

其中 $C_1=3L^2+5L+3$, $C_2=L^2+2L$, $C=\max\{C_1,C_2\}$, $\epsilon_n=C\theta_n^2$• 从上述, 我们可以得到

$$a_{n+1}\leqslant\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)a_n+\epsilon(1+a_n)\leqslant(1+2\epsilon)a_n\leqslant\prod_{k=0}^{n}(1+2\epsilon_k)a_0<\infty,$$

因为 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\theta_n)=P$, 则

$$\lg p=\sum_{n=1}^{\infty}\lg(1+\theta_n^2),$$

$$\lg(1+\theta_n^2)\leqslant\frac{1}{n^q},\qquad q>1,$$

$$\theta_n^2\leqslant e^{1/n^q}-1,\ \ \theta_n=2/n^{q/2},$$

对无数的 n 和 $q>1$ 成立• 故数列 $\{x_n\}$ 是有界的•

(ii) 证明当 $n\to\infty$ 时, $\|x_n-y_n\|\to 0$•

由式(5)和(8), 得到

$$\begin{aligned}
&\|x_n-y_n\|^2=\|(1-\lambda_n)x_n+\lambda_n Tx_n-\lambda_n\theta_n f(x_n-x_1)-y_n\|^2=\\
&\quad\|x_n-y_n-\lambda_n((x_n-Tx_n)+\theta_n f(x_n-x_1))\|^2\leqslant\\
&\quad\|x_n-y_n\|^2-2\lambda_n\langle(x_n-Tx_n)+\theta_n f(x_n-x_1),j(x_{n+1}-y_n)\rangle=\\
&\quad\|x_n-y_n\|^2-2\lambda_n\theta_n\langle x_{n+1}-y_n,j(x_{n+1}-y_n)\rangle+\\
&\quad 2\lambda_n\langle(x_{n+1}-y_n)-(x_n-Tx_n)-\theta_n f(x_n-x_1),j(x_{n+1}-y_n)\rangle=\\
&\quad\|x_n-y_n\|^2-2\lambda_n\theta_n\|x_{n+1}-y_n\|^2+2\lambda_n\langle(x_{n+1}-Tx_{n+1})-\\
&\quad(x_n-Tx_n)-\theta_n f(x_n-x_1)-[(x_{n+1}-Tx_{n+1})-\\
&\quad(y_n-Ty_n)],j(x_{n+1}-y_n)\rangle=\\
&\quad\|x_n-y_n\|^2-2\lambda_n\theta_n\|x_{n+1}-y_n\|^2+\\
&\quad 2\lambda_n\langle(x_{n+1}-y_n)+(Ty_n-Tx_{n+1})-(x_n-Tx_n)-\\
&\quad\theta_n f(x_n-x_1),j(x_{n+1}-y_n)\rangle-\\
&\quad\langle(x_{n+1}-Tx_{n+1})-(y_n-Ty_n),j(x_{n+1}-y_n)\rangle,
\end{aligned}\tag{11}$$

由 T 的伪紧缩性, 有 $\langle(x_{n+1}-Tx_{n+1})-(y_n-Ty_n),j(x_{n+1}-y_n\rangle\geqslant 0$• 故(11) 式变为

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-y_n\|^2\leqslant\\
&\quad\|x_n-y_n\|^2-2\lambda_n\theta_n\|x_{n+1}-y_n\|^2+2\lambda_n[(1+L)\|x_{n+1}-y_n\|+\\
&\quad\|x_n-Tx_n\|+\theta_n L\|x_n-x_1\|]\|x_{n+1}-y_n\|,
\end{aligned}\tag{12}$$

然而, 因为 $F(T)\neq\phi$, 根据文献[23] 的命题 2, 我们得到 $\{y_n\}$ 是有界的• 因此, 存在 $M_1>0$, 使得 $\max\{\|x_{n+1}-y_n\|, \|x_n-Tx_n\|+\theta_n L\|x_n-x-1\|\}\leqslant M_1$• 那么由(12)式, 我们有

$$\|x_{n+1}-y_n\|^2\leqslant\|x_n-y_n\|^2-2\lambda_n\theta_n\|x_{n+1}-y_n\|^2+\lambda_n M_1^2, \tag{13}$$

现在, 由(3)式, 我们得到

$$\begin{aligned}&\|y_{n+1}-y_n\|\leqslant\\&\quad\|y_{n-1}-y_n+\frac{1}{\theta_n}((y_{n-1}-Ty_{n-1})-(y_n-Ty_n))\|\leqslant\\&\quad\frac{\theta_{n-1}-\theta_n}{\theta_n}(\|y_{n-1}\|+\|x_1\|)=\\&\quad\left(\frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}-1\right)(\|y_{n-1}\|+\|x_1\|),\end{aligned}\tag{14}$$

由(13)和(14)式, 对某常数 $M>0$, 得到

$$\begin{aligned}&\|x_{n+1}-y_n\|^2\leqslant\|x_n-y_{n-1}\|^2-2\lambda_n\theta_n\|x_{n+1}-y_n\|^2+\lambda_n M_1^2+\\&\quad M\left(\frac{\theta_{n-1}}{\theta_n}-1\right)+2\lambda_n M,\end{aligned}\tag{15}$$

由引理 1.5 和 $\{\lambda_n\}$ 及 $\{\theta_n\}$ 上的条件, 得到 $x_{n+1}-y_n\to 0$• 故当 $n\to\infty$ 时, $\|x_n-y_n\|\to 0$•

(iii) 当 $n\to\infty$ 时, $\|x_n-Tx_n\|\to 0$ 的证明•

因为 $\{y_n\}$ (从而 $\{Ty_n\}$) 是有界的, 我们有

$$\|y_n-Ty_n\|\leqslant(1-t_n)\|Ty_n\|+(1-t_n)\|x_1\|\to 0,$$

因此

$$\begin{aligned}&\|x_n-Tx_n\|\leqslant\|x_n-y_n\|+\|y_n-Ty_n\|+\|Ty_n-Tx_n\|\leqslant\\&\quad(1+L)\|x_n-y_n\|+\|y_n-Ty_n\|\to 0,\qquad 当\ n\to\infty•\end{aligned}$$

至此, 完成了该定理的全部证明•

定理 2.2 假如 K 是定义了一致 Gateaux 微分范数的实 Banach 空间 E 的非空闭凸子集, $T: K\mapsto K$ 是利普希茨紧缩映射, 且其利普希茨常数 $L\geqslant 0$, 并且 $F(T)\neq\phi$• 设 K 的每个闭凸有界子集具有非扩张自映射不动点属性• 对任意的 $x_1\in K$, 序列 $\{x_n\}$ 由下式得到:

$$x_{n+1}=(1-\lambda_n)x_n+\lambda_n Tx_n-\lambda_n\theta_n f(x_n-x_1),$$

对所有的正整数 n, 这里 $f: K\mapsto K$ 是一个利普希茨映射• 那么 $\{x_n\}$ 强收敛到 T 的一个不动点•

证明 正如定理 2.1 所证, 当 $n\to\infty$ 时, $\|x_n-Tx_n\|\to 0$, 又由文献[23] 的定理 1, 我们有 $y_n\to x^*\in F(T)$• 由此, 我们可得如下结论•

注 1 取 $f=I: K\mapsto K$ 为定理 2.1 和 2.2 中的恒等映射, 我们可得到 Chidume 和 Zegeye[19] 中的定理 2.1 和 2.2• 我们的定理推广和改善了 Chidume 和 Zegeye[19] 的定理•

注 2 我们的定理 2.2 为利普希茨增生算子, 该算子的利普希茨常数 $L\geqslant 0$, 且 $N(A)\neq\phi$, 其中 $N(A)=\{x\in E: Ax=0\}$, 在一致 Gateaux 微分范数的实 Banach 空间中亦成立•

注 3 因为每个一致光滑的 Banach 空间有一致 Gateaux 微分范数, 且 K 的每个闭有界凸子集有非扩张自映射的不动点属性• 因此, 我们的定理在实一致光滑 Banach 空间中也是成立的•

注 4 在定理 2.1 中, 如果附加 K 是有界, 那么由文献[23] 的命题 2, 序列 $\{y_n\}$ 是有界的• 因此, 在证明中不需要条件 $F(T)\neq\phi$• 故, 我们得到的定理 2.2 的结论和注 3 无需假设 $F(T)\neq\phi$•

致谢 作者真诚地感谢 Prashanth K. Srinivasan 博士(TIFR, Bangalore, India) 在本文准备时

提供的宝贵意见•

[参 考 文 献]

[1] Browder F E. Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach space[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 875—882.

[2] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications[M]. Part_Ⅱ A; Linear Monotone Operater; Part Ⅱ B; Nonlinear Monotone Operators, (Berlin/ New York: Springer Verlag), 1985.

[3] Chidume C E, Moore C. The solution by iteration of nonlinear equation in uniformly smooth Banach space[J]. J Math Anal Appl, 1997, **215**: 132—146.

[4] Mann W R. Mean values methods in iteration[J]. Proc Amer Math Soc, 1953, **4**: 506—510.

[5] Osilike M O. Iterative solution of nonlinear equations of the ϕ_strongly accretive type[J]. J Math Anal Appl, 1996, **200**: 259—271.

[6] Qihou L. The convergence theorems of the sequences of Ishikawa iterates for hemicontractive mappings[J]. J Math Anal Appl, 1990, **148**: 55—62.

[7] Riech S. Iterative methods for accretive sets[A]. In: Nonlinear Equation in Abstract Spacs[C]. New York: Academic Press, 1978, 317—326.

[8] 张石生. Φ_伪压缩型映象的具误差的 Ishikawa 和 Mann 迭代程序的收敛性问题[J]. 应用数学和力学, 2000, **21**(1): 1—10.

[9] Geobel K. On the structure of minimal invarient sets for non_expansive mappings[J]. Ann Univ Marie Curie_Sklodowska, 1975, **29**: 73—77.

[10] Karlovitz L A. On nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1976, **55**: 321—325.

[11] Ray W O. Nonexpansive mappings on unbounded convex domains[J]. Bull Acad Polon Sci Ser Math Astronorm Phys, 1978, **26**: 241—245.

[12] Ray W O. The fixed point property and unbounded sets in Hlbert space[J]. Trans Amer Math Soc, 1980, **258**: 531—537.

[13] Simeon Reich. The almost fixed point property for nonexpansive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1983, **88**: 44—46.

[14] Petryshyn W V. Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space[J]. J Math Anal Appl, 1966, **14**: 276—284.

[15] Chidume C E. On the approximation of fixed points of non_expansive mappings[J]. Houston J Math, 1981, **7**: 345—355.

[16] Chidume C E, Mutangadura S A. An example on the Mann iteration method for Lipschitz pseudocontractions[J]. Proc Amer Math Soc, 2001, **129**: 2359—2363.

[17] Rhoades B E. Comments on two fixed point iteration methods[J]. J Math Anal Appl, 1976, **56**: 741—750.

[18] Bruck R E Jr. A strongly convergent iterative method for the solution of $0 \in U(x)$ for a maximal monotone opeartor U in Hilbert space[J]. J Math Anal Appl, 1974, **48**: 114—126.

[19] Chidume C E, Zegeye H. Approximate fixed point sequences and convergence theorems for lipschitz pseudocontractive maps[J]. Proc Amer Math Soc, 2003, **132**(3): 831—840.

[20] Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**: 957—961.

[21] Kato T. Nonlinear semigroups and evolution eauations[J]. J Math Soc Japan, 1967, **19**: 508—520.

[22] Morales C H, Jung J S. Convergence of paths for pseudocontractive mappings in Banach spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 2000, **128**: 3411—3419.

[23] Moore C, Nnoli B V C. Iterative solution of nonlinear equations involving set_valued uniformly accre-

tive operators[J]. Comput Math Appl, 2001, **42**: 131—140
[24] Ishiukawa S. Fixed points by a new iteration method[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, **44**(1): 147—150.
[25] Ishiukawa S. Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space[J]. Proc Amer Math Soc, 1976, **59**(1): 65—71.
[26] Lim T C, Xu H K. Fixed point theorems for asmptotically nonexpansive mappings[J]. Nonlinear Anal TMA, 1994, **22**: 1345—1355.
[27] Qihou L. Iterative sequences for asymptotically quasinonexpansive mappings[J]. J Math Anal Appl, 2001, **259**: 1—7.
[28] Krasnoselskij M A. Two remarks on the method of successive approximations[J]. Uspchi Mat Nauk, 1955, **10**: 123—127.

Bruck Formula for a Perturbed Lipschitzian Iteration of Lipschitz Pseudocontractive Maps

Krishna Kumar, B. K. Sharma
(School of Studies in Mathematics, Pt. Ravishankar Shukla University,
Raipur, Chhattisgarh_492010, India)

Abstract: The solution to evolution equations has developed an independent theory within nonlinear analysis dealing with the existence and approximation of such solution(fixed point) of pseudocontractive operators and its variants. The object is to introduce a perturbed iteration method for proving the convergence of sequence of Lipschitzian pseudocontractive mapping using approximate fixed point technique. This iteration can be ued for nonlinear operators which are more general than Lipschitzian pseudocontractive operator and Bruck iteration fails for proving their convergence. Our results generalize the results of Chidume and Zegeye.

Key words: pseudocontractive map; perturbed Lipschitzian iteration; fixed point; uniformaly Gateaux differential norm