 应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 12_1394_07

三维横观各向同性介质界面裂纹的边界积分方程方法

赵明[1], 李冬霞[2], 沈亚鹏[3]

(1. 郑州大学 工程力学系, 郑州 450002;
2. 中原工学院 基础部, 郑州 450007;
3. 西安交通大学 工程力学系, 西安 710049)

(我刊编委沈亚鹏来稿)

摘要: 基于两相三维横观各向同性介质的基本解和 Somigliana 恒等式, 对三维横观各向同性介质中的任意形状的平片界面裂纹, 以裂纹面上的不连续位移为待求参量建立了超奇异积分_微分方程, 界面平行于横观各向同性面 根据发散积分的有限部积分理论, 应用积分方程方法研究得到裂纹前沿的位移和应力场的表达式、奇性指数以及应力强度因子的不连续位移表达式 在非震荡情形下, 超奇异积分_微分方程退化为超奇异积分方程, 与均匀介质的超奇异积分方程形式完全相同

关 键 词: 三维两相介质; 横观各向同性; 界面裂纹; 应力强度因子; 积分_微分方程
中图分类号: O346.11 文献标识码: A

引 言

随着复合材料及其结构在工程中的广泛应用, 界面裂纹问题得到了广泛、深入的研究, 1992 年, 文献[1] 对这一领域的研究作了系统的综述 近十多年来, 这一领域的研究又取得了很多新的成果, 例如专著[2] 和文献[3] 的各向异性介质界面裂纹问题与各向同性介质界面裂纹问题的等价性研究等等 三维界面断裂方面的研究, 早期主要是圆盘型界面裂纹问题[4] 近几年, 文献[5] 利用边界积分方程方法对两相各向同性介质中的界面裂纹问题进行过深入的研究, 文献[6] 求解了半无限界面裂纹的权函数, 并给出了一些应用 文献[7] 给出外圆环界面裂纹的格林函数, 文献[8] 求得各向异性介质中圆盘型裂纹问题非振荡情形的解

本文则研究三维横观各向同性介质中任意形状的平片界面裂纹

1 平片界面裂纹的边界积分_微分方程

三维横观各向同性介质中的界面平行于两相材料的各向同性面, 建立直角坐标系 $Oxyz$ 使 Oxy 平面与界面重合 上、下两种介质的 5 个独立的弹性常数分别为 c_{11}、c_{12}、c_{13}、c_{33}、c_{44} 和

收稿日期: 2004_05_17; 修订日期: 2005_08_17
基金项目: 河南省高校新世纪优秀人才支持计划资助项目
作者简介: 赵明 (1963), 男, 河南巩义人, 教授, 博士, 博导(联系人. Tel/Fax: + 86_371_63887481; E_mail: memhzhao@zzu.edu.cn)

c_{11}、c_{12}、c_{13}、c_{33}、c_{44}, 上标 表示下半空间相应的量 考虑位于 $z = H > 0$ 的任意形状的平片裂纹 S, 上、下表面分别记为 S^+ 和 S^-, 外法线向量分别为

$$\{n_i^+\} = \{0, 0, -1\}, \quad \{n_i^-\} = \{0, 0, 1\} \tag{1}$$

假设裂纹上、下表面所受载荷大小相等、方向相反,

$$p_i(x, y) \quad p_i(x, y, H^+) = - p_i(x, y, H^-) \qquad (i = x, y, z) \tag{2}$$

在点 $(0, 0, h)$ 上作用单位集中载荷时, 两相材料的基本解在附录中给出, 其中所用的符号和材料常数如下

$$\begin{cases} z_i = s_i z, \quad h_i = s_i h, \quad z_i = s z, \\ z_{ij} = z_i + h_j, \quad R_{ij} = \sqrt{x^2 + y^2 + z_{ij}^2}, \\ z_{ij} = z_i - h_j, \quad R_{ij} = \sqrt{x^2 + y^2 + z_{ij}^2}, \qquad (i, j = 0, 1, 2); \\ z_{ij} = z_i - h_j, \quad R_{ij} = \sqrt{x^2 + y^2 + z_{ij}^2}, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} {}_i = \dfrac{c_{11} - c_{44} s_i^2}{(c_{13} + c_{44}) s_i}, \quad {}_i = c_{13} \; {}_i - c_{12}, \quad {}_0 = c_{44} s_0, \\ {}_i = c_{44}(s_i + {}_i), \quad {}_i = c_{33} \; {}_i s_i - c_{13}; \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$s_0^2 = \frac{c_{11} - c_{12}}{2 c_{44}}, \tag{5}$$

s_1 和 s_2 为材料特征方程

$$c_{33} c_{44} s^4 - [c_{11} c_{33} + c_{44}^2 - (c_{13} + c_{44})^2] s^2 + c_{11} c_{44} = 0 \tag{6}$$

两个具有正实部的特征根(本文假设 $s_1 \quad s_2$)

利用这些基本解和 Somigliana 恒等式, 得到位移场的积分表达式,

$$u(x, y, z) = \int_{S^+} \{ \; u \; {}_{xz}^{(x)} + \; v \; {}_{yz}^{(x)} + \; w \; {}_{z}^{(x)} \} \mathrm{d}S, \tag{7}$$

$$v(x, y, z) = \int_{S^+} \{ \; u \; {}_{xz}^{(y)} + \; v \; {}_{yz}^{(y)} + \; w \; {}_{z}^{(y)} \} \mathrm{d}S, \tag{8}$$

$$w(x, y, z) = \int_{S^+} \{ \; u \; {}_{xz}^{(z)} + \; v \; {}_{yz}^{(z)} + \; w \; {}_{z}^{(z)} \} \mathrm{d}S, \tag{9}$$

其中, ${}_{ij}^{(k)}$ 和 ${}_{z}^{(k)}$ 为在第 k 坐标轴方向作用单位集中力时的应力基本解, u 、 v 和 w 为裂纹面上的不连续位移(或位移间断)

$$\begin{cases} u(\;,\;) = u(\;,\;, H^+) - u(\;,\;, H^-), \\ v(\;,\;) = v(\;,\;, H^+) - v(\;,\;, H^-), \qquad (\;,\;) \quad S \\ w(\;,\;) = w(\;,\;, H^+) - w(\;,\;, H^-) \end{cases} \tag{10}$$

将位移场(7) ~ (9) 式代入本构关系[9, 10]可以得到任意点的应力场 当 H 0 时, 裂纹变为界面裂纹 令 z 0, 利用裂纹面上的边界条件(2) 式和超奇异积分理论, 经过冗长推导得到以裂纹面上的不连续位移为待求参量的超奇异边界积分_微分方程

$$\int_{S^+} [K_{zz} \; w \;] \frac{1}{r^3} \mathrm{d}S(\;,\;) + 2 \; K_z \left(\frac{u}{x} + \frac{v}{y} \right) = p_z(x, y), \tag{11}$$

$$\int_{S^+} \{ [K_{zr} \cos^2 + K_z \sin^2] \; u + [(K_{zr} - K_z) \sin \cos] \; v \} \frac{\mathrm{d}S(\;,\;)}{r^3} +$$

$$2 \; K_r \frac{w}{x} = p_x(x, y), \tag{12}$$

$$_{S^+}\left\{[K_{zr}\sin^2 + K_z\cos^2]\ v + [(K_{zr} - K_z)\sin\ \cos]\ u\right\}\frac{\mathrm{d}S(\ ,\ )}{r^3} +$$

$$2\ K_r\frac{w}{y} = p_y(x, y), \tag{13}$$

上述方程中的参数

$$r^2 = (\ - x)^2 + (\ - y)^2,\ \cos\ = (\ - x)/r,\ \sin\ = (\ - y)/r, \tag{14}$$

材料常数

$$\begin{cases} K_{zz} = \sum_{i=1}^{2}\ _i[-\ c_{13}G_{2i} +\ c_{33}M_{4i}], \\ K_z = \sum_{i=1}^{2}\ _i[-\ c_{13}G_{1i} +\ c_{33}M_{3i}], \\ K_{zr} = -\ c_{44}\ _0G_{10}s_0 - 2\sum_{i=1}^{2}\ _i[c_{44}G_{3i} +\ c_{44}M_{1i}], \\ K_z\ = 2c_{44}\ _0G_{10}s_0 + 2\sum_{i=1}^{2}\ _i[c_{44}G_{3i} +\ c_{44}M_{1i}], \\ K_r = \sum_{i=1}^{2}\ _i[c_{44}G_{4i} +\ c_{44}M_{2i}], \end{cases} \tag{15}$$

其中

$$\begin{cases} M_{1i} = A_i - \sum_{j=1}^{2} A_{ij},\ M_{2i} = A_i + \sum_{j=1}^{2} A_{ij}, \\ M_{3i} = A_i s_i - \sum_{j=1}^{2} A_{ij}s_j, M_{4i} = A_i s_i + \sum_{j=1}^{2} A_{ij}s_j, \\ G_{1i} = D_i - \sum_{j=1}^{2} D_{ij},\ G_{2i} = D_i + \sum_{j=1}^{2} D_{ij}, \\ G_{3i} = D_i s_i - \sum_{j=1}^{2} D_{ij}s_j, G_{4i} = D_i s_i + \sum_{j=1}^{2} D_{ij}s_j, \\ G_{10} = D_0 - D_{00} \end{cases} \tag{16}$$

容易看出, 当两相材料变为均匀介质时, $K_r = K_z = 0$, 那么方程(11)~(13)中的微分项不存在, 则方程退化为文献[9]中的超奇异边界积分方程

2 裂纹前沿的位移、应力奇性分析

仿效文献[5]的主部分析法, 研究裂纹前沿的奇性行为 设 O 为裂纹 S 前沿 上的任一点, 在该点光滑 不失一般性, 建立坐标系 $Oxyz$, 使 x 轴和 y 轴分别沿在 O 点的法线方向和切线方向, z 轴垂直于裂纹面 对于有界的外载荷 $p_x(x, y)$、$p_y(x, y)$ 和 $p_z(x, y)$, 在以 O 点为圆心, 以无穷小量 为半径的裂纹面上的邻域 内, 方程(11)~(13)的右端是有界的 在该邻域内, 不连续位移的一阶近似为

$$u = \mathrm{Re}(A_x x^{\ _x}),\quad v = \mathrm{Re}(A_y x^{\ _y}),\quad w = \mathrm{Re}(A_z x^{\ _z}), \tag{17}$$

上式中的 A_x、A_y、A_z 是与点 O 位置有关的系数, $_x$、$_y$、$_z$ 是待定的奇性指数, 满足条件

$$0 < \mathrm{Re}\left\{\ _x,\ _y,\ _z\right\} < 1, \tag{18}$$

通过本构关系, 很容易看出, $_x$、$_y$、$_z$ 也决定了裂纹前沿应力的奇性行为 应当指出, A_x、A_y、

A_z 与外载荷有关, 而 $_x$、$_y$、$_z$ 与外载荷无关

把式(17) 代入式(11) ~ (13), 根据超奇异积分理论计算得到

$$\begin{cases}\lim\limits_{x \quad 0} \mathrm{Re}[K_{zz}\cot(\quad _z)x^{\mathrm{Re}(\quad _z - \quad) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\quad _z)}A_z - K_{zx}x^{\mathrm{Re}(\quad _x - \quad) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\quad _x)}A_x] = 0, \\ \lim\limits_{x \quad 0} \mathrm{Re}[3K_r x^{\mathrm{Re}(\quad _z - \quad) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\quad _z)}A_z - (2K_{zr} + K_z \quad)\cot(\quad _x)x^{\mathrm{Re}(\quad _x - \quad) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\quad _x)}A_x] = 0;\end{cases} \tag{19}$$

$$\lim\limits_{x \quad 0} \mathrm{Re}[(K_{zr} + 2K_z \quad)\cot(\quad _y)x^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\quad _y)}A_y] = 0; \tag{20}$$

其中 Re、Im 分别表示复数的实部、虚部, 虚数单位 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$,

$$A_x = \quad _x A_x, \ A_y = \quad _y A_y, \ A_z = \quad _z A_z, \tag{21}$$

$$\quad = \quad _x \text{ 或 } \quad _z, \text{ 且 } \mathrm{Re}(\quad) = \min\left\{\mathrm{Re}(\quad _x), \mathrm{Re}(\quad _z)\right\} \tag{22}$$

方程(20) 满足条件(18) 式的解为

$$_y = 1/2 \tag{23}$$

上式表明, 型问题的奇异性仍为经典的 $1/\sqrt{r}$ 奇性

可以证明, 奇性指数满足 $_x = \quad _z = \quad$, 令方程组(19) 的系数行列式为零得到

$$\cot^2(\quad) + c = 0, \tag{24}$$

其中

$$c = -\frac{3K_z K_r}{K_{zz}(2K_{zr} + K_z \quad)} \tag{25}$$

很多材料组合表明, $c > 0$, 所以

$$\quad = \frac{1}{2} \quad \mathrm{i}, \quad \quad = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \quad}{1 + \quad}\right), \quad \quad = \sqrt{c} \tag{26}$$

(26) 式表明, Oxz 平面内的变形具有振荡奇异性

接下来, 我们导出应力强度因子表达式 对于裂尖附近的任意点 $(- \quad , 0, 0)$, $\quad > 0$, 将 (7) ~ (9) 式代入本构关系式[9, 10], 给出应力的积分表达式

$$\begin{cases} _z = - \quad _{S^+}[K_{zz} \quad w \quad]\dfrac{1}{R^3}\mathrm{d}S, \\ _{xz} = - \quad _{S^+}\left\{\left[K_{zr}\dfrac{(\quad + \quad)^2}{R^2} + K_z \dfrac{\quad ^2}{R^2}\right] \quad u \quad + \left[(K_{zr} - K_z \quad)\dfrac{(\quad + \quad)}{R^2}\right] \quad v \quad \right\}\dfrac{\mathrm{d}S}{R^3}, \\ _{yz} = - \quad _{S^+}\left\{\left[K_{zr}\dfrac{\quad ^2}{R^2} + K_z \dfrac{(\quad + \quad)^2}{R^2}\right] \quad v \quad + \left[(K_{zr} - K_z \quad)\dfrac{(\quad + \quad)}{R^2}\right] \quad u \quad \right\}\dfrac{\mathrm{d}S}{R^3},\end{cases} \tag{27}$$

其中

$$R^2 = (\quad + \quad)^2 + \quad ^2 \tag{28}$$

由式(19) 和前面的关系, 得到

$$\mathrm{i} \quad K_{zz}A_z = \quad K_z A_x \tag{29}$$

将式(29) 代入式(17) 给出裂纹前沿附近的裂纹面上的不连续位移

$$w \quad - \mathrm{i}\frac{K_z}{K_{zz}} \quad u \quad = A_z x \tag{30}$$

对小量 , 把式(17) 式代入式(27) 给出裂尖附近的应力表达式

$$_z - \mathrm{i}\frac{3K_z}{(2K_{zr} + K_z \quad)} \quad _{xz} = -2 \quad K_{zz}\frac{A_z}{\sin(\quad)} \quad ^{-1}, \quad _{yz} = -\frac{\quad}{\sqrt{\quad}}\frac{1}{3}(K_{zr} + 2K_z \quad)A_y \tag{31}$$

根据应力强度因子的定义,

$$K \quad + \mathrm{i}K \quad = \lim_{\quad 0} \sqrt{2 \quad} \quad ^{1-} \left(\quad _{z} + \mathrm{i} \quad _{xz} \right), \tag{32}$$

由(31)式,最后得到以不连续位移表示的应力强度因子

$$K \quad - \mathrm{i}\frac{3K_{z}}{(2K_{zr} + K_{z} \quad)}K \quad = -\frac{(2 \quad)^{3/2} \quad K_{zz}}{\sin(\quad \quad)}\lim_{x \quad 0}\frac{1}{x}\left(\quad w \quad - \mathrm{i}\frac{K_{z}}{K_{zz}} \quad u \quad \right), \tag{33}$$

$$K \quad = -\frac{\quad}{3}(K_{zr} + 2K_{z} \quad)\lim_{x \quad 0}\sqrt{\frac{2}{x}} \quad v \tag{34}$$

3　非振荡情形

数值上可以证明

$$K_{z} = - K_{r}, \tag{35}$$

因而,式(25)变为

$$c = \frac{3K_{z}^{2}}{K_{zz}(2K_{zr} + K_{z} \quad)} \tag{36}$$

如果

$$K_{z} = - K_{r} = 0, \tag{37}$$

则参数 $c = 0$ 和 $\quad = 0$, 那么奇异振荡指数变为通常的1/2奇异指数, 积分_微分方程(11)~(13)变为超奇异积分方程,形式上与横观各向同性均质材料的完全相同, 有关解可以用类比方法求得, 详见文献[9]

4　小　　结

本文给出的三维横观各向同性介质中任意形状的平片界面裂纹的边界积分_微分方程方法, 同样适用于多裂纹问题　由于非振荡情形下的积分方程与横观各向同性均质介质的积分方程完全相同, 所以有关解可直接从相应的均质材料问题的解求得　然而对于一般情形, 需要借助于数值方法求解

附　　录

三维两相横观各向同性介质的位移基本解可参见文献[10], 为了本文的需要, 本附录重新表征基本解

A1　在 z 方向上作用单位集中力 P_3 时的基本解

上半空间的位移

$$\begin{cases} u = P_{3}\sum_{i=1}^{2}\left\{\dfrac{A_{i}x}{R_{ii}(R_{ii} - z_{ii})} + \sum_{j=1}^{2}\left[\dfrac{A_{ij}x}{R_{ij}(R_{ij} + z_{ij})}\right]\right\}, \\ v = P_{3}\sum_{i=1}^{2}\left\{\dfrac{A_{i}y}{R_{ii}(R_{ii} - z_{ii})} + \sum_{j=1}^{2}\left[\dfrac{A_{ij}y}{R_{ij}(R_{ij} + z_{ij})}\right]\right\}, \\ w = -P_{3}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{A}_{i}\left(\dfrac{A_{i}}{R_{ii}} - \sum_{j=1}^{2}\dfrac{A_{ij}}{R_{ij}}\right), \end{cases} \tag{A1}$$

下半空间的位移

$$\begin{cases} u^{c} = P_{3}\sum_{i=1}^{2}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\dfrac{A_{ij}^{c}x}{R_{ij}^{c}(R_{ij}^{c} - z_{ij}^{c})}\right]\right\}, \\ v^{c} = P_{3}\sum_{i=1}^{2}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\dfrac{A_{ij}^{c}y}{R_{ij}^{c}(R_{ij}^{c} - z_{ij}^{c})}\right]\right\}, \\ w^{c} = -P_{3}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{A}_{i}^{c}\sum_{j=1}^{2}\dfrac{A_{ij}^{c}}{R_{ij}^{c}}, \end{cases} \tag{A2}$$

其中材料常数为

$$A_1 = -\frac{c_{13}+c_{44}}{4\pi c_{44}c_{33}(s_2^2-s_1^2)},\quad A_2=-A_1, \tag{A3}$$

A_{ij} 和 A_{ij}^C 由下列方程组确定

$$\begin{cases} A_i + \sum_{j=1}^{2} A_{ji} = \sum_{j=1}^{2} A_{ji}^C,\ -\mathrm{A}_i A_i + \sum_{j=1}^{2}\mathrm{A}_j A_{ji} = -\sum_{j=1}^{2}\mathrm{A}_j^c A_{ji}^C, \\ X_i A_i - \sum_{j=1}^{2} \mathrm{x}_j A_{ji} = \sum_{j=1}^{2}\mathrm{x}_j^c A_{ji}^C,\ ;_i A_i + \sum_{j=1}^{2} ;_j A_{ji} = \sum_{j=1}^{2} ;_j^c A_{ji}^C。 \end{cases} \tag{A4}$$

将位移代入本构关系[9,10]即可得到应力,由于篇幅所限,这里不再具体给出。

A2 在 x 方向上作用单位集中力 P_1 时的基本解

上半空间的位移

$$\begin{cases} u = -P_1 D_0\left[\frac{1}{R_{00}-z_{00}} - \frac{y^2}{R_{00}(R_{00}-z_{00})^2}\right] - P_1 D_{00}\left[\frac{1}{R_{00}+z_{00}} - \frac{y^2}{R_{00}(R_{00}+z_{00})^2}\right] + \\ \quad P_1\sum_{i=1}^{2}\left\{D_i\left[\frac{1}{R_{ii}-z_{ii}} - \frac{x^2}{R_{ii}(R_{ii}-z_{ii})^2}\right] + \sum_{j=1}^{2} D_{ij}\left[\frac{1}{R_{ij}+z_{ij}} - \frac{x^2}{R_{ij}(R_{ij}+z_{ij})^2}\right]\right\}, \\ v = -P_1\left[\frac{D_0 xy}{R_{00}(R_{00}-z_{00})^2} + \frac{D_{00}xy}{R_{00}(R_{00}+z_{00})^2}\right] - P_1 xy\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{D_i}{R_{ii}(R_{ii}-z_{ii})^2} + \sum_{j=1}^{2}\frac{D_{ij}}{R_{ij}(R_{ij}+z_{ij})^2}\right], \\ w = P_1 x\sum_{i=1}^{2}\mathrm{A}_i\left\{\frac{D_i}{R_{ii}(R_{ii}-z_{ii})} - \sum_{j=1}^{2} D_{ij}\left[\frac{1}{R_{ij}(R_{ij}+z_{ij})}\right]\right\}, \end{cases} \tag{A5}$$

其中材料常数为

$$D_0 = -\frac{1}{4\pi c_{44}s_4},\quad D_1 = \frac{c_{44}-c_{33}s_1^2}{4\pi c_{44}c_{33}s_1(s_2^2-s_1^2)},\quad D_2 = \frac{c_{44}-c_{33}s_2^2}{4\pi c_{44}c_{33}s_2(s_1^2-s_2^2)}。 \tag{A6}$$

下半空间的位移

$$\begin{cases} u^c = -P_1 D_{00}^C\left[\frac{1}{R_{00}^C - z_{00}^C} - \frac{y^2}{R_{00}^C(R_{00}^C-z_{00}^C)^2}\right] + P_1\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} D_{ij}^C\left[\frac{1}{R_{ij}^C - z_{ij}^C} - \frac{x^2}{R_{ij}^C(R_{ij}^C - z_{ij}^C)^2}\right], \\ v^c = -P_1\frac{D_{00}^C xy}{R_{00}^C(R_{00}^C-z_{00}^C)^2} - P_1 xy\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} D_{ij}^C\left[\frac{1}{R_{ij}^C(R_{ij}^C-z_{ij}^C)^2}\right], \\ w^c = -P_1 x\sum_{i=1}^{2}\mathrm{A}_i^c\sum_{j=1}^{2}\frac{D_{ij}^C}{R_{ij}^C(R_{ij}^C-z_{ij}^C)}, \end{cases} \tag{A7}$$

与材料有关的系数 D_{00}^C、D_{ij} 和 D_{ij}^C 由以下方程组确定

$$\begin{cases} D_0 + D_{00} = D_{00}^C,\ D_i + \sum_{j=1}^{2} D_{ji} = \sum_{j=1}^{2} D_{ji}^C,\ \mathrm{A}_i D_i - \sum_{j=1}^{2}\mathrm{A}_j D_{ji} = \sum_{j=1}^{2}\mathrm{A}_j^c D_{ji}^C, \\ X_0(D_{00}-D_0) = -X_0^C D_{00}^C,\ X_i D_i - \sum_{j=1}^{2}\mathrm{x}_j D_{ji} = \sum_{j=1}^{2}\mathrm{x}_j^c D_{ji}^C,\ ;_j D_i + \sum_{j=1}^{2} ;_j D_{ji} = \sum_{j=1}^{2} ;_j^c D_{ji}^C。 \end{cases} \tag{A8}$$

通过简单的坐标变换,由以上基本解可以得到 y 方向单位集中力对应的基本解。

[参 考 文 献]

[1] Hutchinson J W, Suo Z. Mixed_mode cracking in layered materials[J]. Advances in Applied Mechanics, 1992, 29: 63) 191.

[2] Ting T C T. Anisotropic Elasticity: Theory and Applications[M]. New York: Oxford University Press, 1996.

[3] Choi S T, Shin H, Earmme Y Y. On the unified approach to anisotropic and isotropic elasticity for singularity, interface and crack in dissimilar media[J]. Internat J Solids Structure, 2003, 40(6):

1411) 1431.

[4] Keer L M, Chen S H, Comninou M. The interface penny_shaped crack reconsidered[J]. Internat J Eng Sci, 1978, 16(10): 765) 772.

[5] 汤任基,陈梦成,乐金朝.三维界面裂纹的理论分析[J].中国科学,1998,28(2): 177) 182.

[6] Lazarus V, Leblond J B. Three_dimensional crack_face weight functions for the semi_infinite interface crack) integrodifferential equations on the weight functions and resolution[J]. J Mech Phys Solids, 1998, 46(3): 513) 536.

[7] Pavlou D G. Green. s function for the bimaterial elastic solid containing interface annular crack[J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 2002, 26(10): 845) 853.

[8] QU Jian_min, XUE Yi_bin. Three_dimensional interface cracks in anisotropic bimaterials: the non_oscillatory case[J]. ASME J Appl Mech, 1998, 65(4): 1048) 1055.

[9] ZHAO Ming_hao, SHEN Ya_peng, LIU Yuan_jie, et al. Method of analysis of cracks in three_dimensional transversely isotropic media: boundary integral equation approach[J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 1998, 21(2): 169) 178.

[10] Pan Y C, Chou T W. Green. s functions for two_phase transversely isotropic materials[J]. ASME J Appl Mech, 1979, 46(3): 551) 556.

Interfacial Crack Analysis in Three_Dimensional Transversely Isotropic Bi_Materials by Boundary Integral Equation Method

ZHAO Ming_hao[1], LI Dong_xia[2], SHEN Ya_peng[3]

(1. Department of Engineering Mechanics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, P.R.China;

2. Basic Department, Zhongyuan Institute of Technology, Zhengzhou 450007, P.R.China;

3. Department of Engineering Mechanics, Xi. an Jiaotong University, Xi. an 710049, P.R.China)

Abstract: The integral_differential equations for three_dimensional planar interfacial cracks of arbitrary shape in transversely isotropic bimaterials were derived by virtue of the Somigliana identity and the fundamental solutions, in which the displacement discontinuities across the crack faces are the unknowns to be determined. The interface is parallel to both the planes of isotropy. The singular behaviors of displacement and stress near the crack border were analyzed and the stress singularity indexes were obtained by integral equation method. The stress intensity factors were expressed in terms of the displacement discontinuities. In the non_oscillatory case, the hyper_singular boundary integral_differential equations were reduced to hyper_singular boundary integral equations similar to those of homogeneously isotropic materials.

Key words: three_dimensional bi_material; transversely isotropic; interfacial crack; stress intensity factor; integral_differential equation