文章编号: 1000_0887(2005) 12_1401_08

乘积拓扑空间内的重合点组定理及应用(Ⅰ)*

丁协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 丁协平来稿)

摘要: 首先引入了无凸性结构的有限连续拓扑空间(简称 FC_空间)新概念• 其次在 FC_空间内建立了一个新的连续选择定理• 应用此定理, 在很弱的假设下, 对定义在非紧 FC_空间的乘积空间上的两个集值映射簇证明了某些新的重合点定理• 这些结果推广了最近文献中的许多已知结果• 某些应用将在后继文章中给出•

关 键 词: 重合点组定理; 连续选择; 转移紧开值; FC_空间
中图分类号: O177.92 文献标识码: A

1 引言和预备

1937 年, von Neumann[1] 建立了熟知的重合定理• 自此以后, 在不同基础空间内, 对一对集值映射已存在许多重合点定理的推广和应用(见文献[2~ 8])• Deguire 和 Lassonde[9], Deguire 等人[10] 和 Ding[11] 分别在拓扑矢量空间和 G_凸空间内, 研究了重合点组定理并给出了某些应用• 但是他们在两个集值映射簇中仅建立了一对集值映射的存在性定理• 最近 Ansari 等人[12], Yu 和 Lin[13], Lin[14] 和 Ding[15] 对在拓扑矢量空间和局部 G_凸一致空间内的两个集值映射簇研究了重合点定理, 并给出了对极小极大问题组和平衡问题组的应用• 在上述所有结果的证明中, 凸性假设起着决定性作用• 因此这些结果在很多应用领域中受到严格限制•

本文首先引入了一类新的无任何凸性结构的有限连续拓扑空间(简称 FC_空间)• 其次在 FC_空间内证明了一连续选择定理• 应用此定理, 在很弱的假设下, 对定义在 FC_空间的乘积空间上的两簇集值映射, 在很弱的假设下建立了新的重合点定理, 这些定理统一、改进和推广了文献中很多已知结果•

对非空集 Y, $\langle Y\rangle$ 和 2^Y 分别表 Y 的一切非空有限子集的族和 Y 的一切子集的族• Δ_n 是具有顶点 $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ 的标准 n_ 维单型• 如果 J 是 $\{0, 1, \cdots, n\}$ 的非空子集, Δ_J 表顶点集 $\{e_j : j \in J\}$ 的凸包•

对拓扑空间 X 和 Y, 称 X 的子集 A 是紧开的(紧闭的), 如果对 X 的每一非空紧子集 K, $A\cap$

* 收稿日期: 2004_10_10; 修订日期: 2005_08_17
基金项目: 四川省教育厅重点研究基金资助项目(2003A081); 四川省重点学科建设基金资助项目(0406)
作者简介: 丁协平(1938—), 男, 自贡人, 教授(Tel: + 86_28_84780952; E_mail: dingxip@ sicnu.edu.cn)•

K 在K 内是开的(闭的)• A 紧闭包和紧内部(见文献[16, 4])定义如下:

$$\mathrm{ccl}A = \bigcap\left\{B \subset X : A \subset B \text{ 和 } B \text{ 在 } X \text{ 内是紧闭的}\right\},$$

$$\mathrm{cint}A = \bigcup\left\{B \subset X : B \subset A \text{ 和 } B \text{ 在 } X \text{ 内是紧开的}\right\}•$$

易知 $\mathrm{ccl}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{cint}A$•

称集值映射 $T: X \to 2^Y$ 在X 上是转移紧闭值的(转移闭值的)(见文献[16, 4]), 如果对每一 $x \in X$ 和$y \notin T(x)$, 存在 $x' \in X$ 使得$y \notin \mathrm{ccl}T(x')$ ($y \notin \mathrm{cl}T(x')$); 称 T 在X 上是转移紧开的(转移开的), 如果对每一 $x \in X$ 和$y \in T(x)$, 存在$x' \in X$ 使得$y \in \mathrm{cint}T(x')$ ($y \in \mathrm{int}T(x')$)• 对转移紧开值映射的几个等价条件, 读者可参见文献[4]•

定义 1.1 称 (Y, φ_N) 是有限连续空间(FC_空间), 如果 Y 是一拓扑空间和对每一$N = \left\{y_0, \dots, y_n\right\} \in \langle Y\rangle$, 存在连续映射 $\varphi_N: \Delta_n \to Y$• 如果$A$ 和B 是Y 的两个子集, 称 B 是Y 的关于A 的 FC_ 子空间, 如果对每一 $N = \left\{y_0, \dots, y_n\right\} \in \langle Y\rangle$ 和对任何$\left\{y_{i_0}, \dots, y_{i_k}\right\} \subset A \cap \left\{y_0, \dots, y_n\right\}$, $\varphi_N(\Delta_k) \subset B$, 其中 $\Delta_k = \mathrm{co}(\left\{e_{i_0}, \dots, e_{i_k}\right\})$• 如果$A = B$, 则称$B$ 是Y 的FC_子空间•

定义 1.2[17] 称(Y, Γ) 是一广义凸(G_凸)空间, 如果 Y 是一拓扑空间和 $\Gamma: \langle Y\rangle \to 2^Y \setminus \left\{\varnothing\right\}$, 使得对每一$N = \left\{y_0, \dots, y_n\right\} \in \langle Y\rangle$, 存在连续映射 $\varphi_N: \Delta_n \to \Gamma(N)$ 使得对任何 $B = \left\{y_{i_0}, \dots, y_{i_k}\right\} \subset N$, $\varphi_N(\Delta_k) \subset \Gamma(B)$, 其中 $\Delta_k = \mathrm{co}\left\{e_{i_j}, j = 0, \dots, k\right\}$• 称 Y的子集D 是G_凸的, 如果对任何 $N \in \langle D\rangle$, $\Gamma(N) \subset D$•

显然, 很多具有抽象凸结构的拓扑空间都是 FC_空间• 特别地拓扑矢量空间的任何凸子集, 由Horvath[18, 19]引入的 H_空间, 由 Park 和 Kim[20, 21]引入的G_凸空间都是 FC_空间• 因此在FC_空间内研究各种非线性问题是十分合理和有价值的•

引理 1.1 设I 是任何指标集, $(X_i, \varphi_{N_i})_{i\in I}$ 是一簇FC_空间和$X = \prod_{i\in I} X_i$• 则(X, φ_N) 也是 FC_空间•

证明 设X 被赋予乘积拓扑和对每一$i \in I$, 令 $\pi_i: X \to X_i$ 是X 到X_i 上的投影• 假设给定$N = (a_0, a_1, \dots a_n) \in \langle X\rangle$, 其中$a_k = \prod_{i\in I} x_{k,i}$, $k = 0, 1, \dots, n$• 对每一 $i \in I$, 令 $N_i = \pi_i(N) = (x_{p_0,i}, \dots, x_{p_{q(i)},i})$, 其中$0 \leqslant p_0 < \dots < p_{q(i)} \leqslant n$ 和$x_{p_0,i}, \dots, x_{p_{q(i)},i}$ 全部都是相异的• 因$N_i \in \langle X_i\rangle$ 和(X_i, φ_{N_i}) 是FC_空间, 存在连续映射 $\varphi_{N_i}: \Delta_{q(i)} \to X_i$, 其中 $\Delta_{q(i)}$ 是标准 $q(i)$_维单型• 对每一$s \in \left\{0, 1, \dots, q(i)\right\}$, 令$J_i(p_s) = \left\{k \in \left\{0, 1, \dots, n\right\}: x_{k,i} = x_{p_s,i}\right\}$• 定义 $\psi_i: \Delta_n \to \Delta_{q(i)}$ 如下:

$$\psi_i(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \left(\sum_{k\in J_i(p_0)} \alpha_k, \sum_{k\in J_i(p_1)} \alpha_k, \dots, \sum_{k\in J_i(p_{q(i)})} \alpha_k\right)$$

对一切$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n$ 成立• 显然, ψ_i 是连续的• 现在定义 $\varphi_N: \Delta_n \to X$ 如下:

$$\varphi_N(\alpha) = (\varphi_{N_i} \circ \psi_i(\alpha))_{i\in I}, \qquad \forall\, \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n•$$

显然, φ_N 是连续的, 因此(X, φ_N) 是一FC_空间•

注 1.1 1) 对每一 $i \in I$, 令 $X^i = \prod_{j\in I, j\neq i} X_j$, 由引理 1.1 的证明, (X^i, φ_{N^i}) 也是一FC_空间• 对每一$x \in X = \prod_{i\in I} X_i$, 记 $x = (x_i)_{i\in I} = (x^i, x_i)$•

2) 引理 1.1 推广了 Tan 和 Zhang[22]的定理 4.1, 即下面结果•

引理 1.2 设I 是任何指标集, $(Y_i, \Gamma_i)_{i\in I}$ 是一簇G_凸空间和$Y = \prod_{i\in I} Y_i$• 则(Y, Γ)

也是一G_凸空间, 其中 $\Gamma(N) = \prod_{i\in I}\Gamma_i(\pi_i(N))$, $N \in \langle Y\rangle$ 和 π_i 是 Y 到 Y_i 上的投影•

2 连续选择

为证明主要结果,我们需要引入下面的连续选择定理•

定理 2.1 设 X 是一紧拓扑空间和 (Y, φ_N) 是一FC_空间• 令 $F, G: X \to 2^Y$ 是集值映射, 满足下面条件:

(ⅰ) 对每一 $x \in X$, $G(x)$ 是 Y 的关于 $F(x)$ 的FC_子空间;

(ⅱ) $X = \bigcup_{y\in Y}\mathrm{cint}F^{-1}(y)$;

则存在 G 的连续选择 $f: X \to Y$ 使得 $f = \varphi \circ \psi$, 其中 $\varphi: \Delta_n \to Y$ 和 $\psi: X \to \Delta_n$ 和 n 是某正整数•

证明 因 X 是紧的, 由(ⅱ), 存在 $N = \{y_0, \cdots, y_n\} \in \langle Y\rangle$, 使得 $X = \bigcup_{i=0}^{n}\mathrm{cint}F^{-1}(y_i)$• 令 $\{\psi_i\}_{i=0}^{n}$ 是从属于开覆盖 $\{\mathrm{cint}F^{-1}(y)\}_{i=0}^{n}$ 的连续单位分解, 则对每一 $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$ 和 $x \in X$, 有

$$\psi_i(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in \mathrm{cint}F^{-1}(y_i) \subset F^{-1}(y_i) \Rightarrow y_i \in F(x)• \tag{1}$$

定义映射 $\psi: X \to \Delta_n$ 为 $\psi(x) = \sum_{i=0}^{n}\psi_i(x)e_i$, 则 ψ 是连续的且对每一 $x \in X$, $\psi(x) = \sum_{j\in J(x)}\psi_j(x)e_j \in \Delta_{J(x)}$, 其中 $J(x) = \{j = \{0, 1, \cdots, n\}: \psi_j(x) \neq 0\}$•

由式(1)有 $\{y_j: j \in J(x)\} \in \langle F(x)\rangle \cap \{y_0, \cdots, y_n\}$• 由条件(ⅰ)得到对每一 $x \in X$, 有 $\varphi_N(\Delta_{J(x)}) \subset G(x)$• 由此推得 $f(x) = \varphi_N \circ \psi(x) \in \varphi_N(\Delta_{J(x)}) \subset G(x)$• 这就证明了 $f = \varphi_N \circ \psi$ 是 G 的连续选择•

注 2.1 定理 2.1 推广了 Park[17] 的定理 1(ⅰ), Tarafdar[23] 的定理 2.2 和 Browder[2] 的命题 1 到无任何凸性结构的 FC_空间•

3 重合点定理

本节将在很弱的假设下, 对定义在 FC_空间的乘积空间上的两簇集值映射, 证明某些新的重合点定理•

定理 3.1 设 I 是任何指标集, $(X_i, \varphi_{N_i})_{i\in I}$ 是一簇FC_空间和对每一 $i \in I$, (X^i, φ_{N^i}) 是如在引理1.1内定义的FC_空间• 对每一 $i \in I$, 令 $F_i, G_i: X^i \to 2^{X_i}$ 和 $S_i, T_i: X_i \to 2^{X^i}$ 是集值映射, 使得

(ⅰ) 对每一 $x^i \in X^i$, $G_i(x^i)$ 是 X_i 关于 $F_i(x^i)$ 的 FC_子空间;

(ⅱ) $X^i = \bigcup_{y_i\in X_i}\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i)$;

(ⅲ) 存在 X_i 的非空子集 E_i 使得对每一 $M_i \in \langle X_i\rangle$, 存在 X_i 的包含 $E_i \cup M_i$ 的紧FC_子空间 L_{M_i}, 和集 $C(i) = \bigcap_{y_i\in E_i}(\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i))^{\mathrm{c}}$ 是空的或紧的, 其中 $(\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i))^{\mathrm{c}}$ 表 $(\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i))$ 的补集;

(ⅳ) 对每一 $x_i \in X_i$, $T_i(x_i)$ 是 X^i 的关于 $S_i(x_i)$ 的 FC_子空间;

(ⅴ) $X_i = \bigcup_{y^i\in X^i}\mathrm{cint}S_i^{-1}(y^i)$;

(ⅵ) 存在 X^i 的非空集 D^i 使得对每一 $N^i \in \langle X^i\rangle$, 存在 X^i 的包含 $D^i \cup N^i$ 的紧FC_子空间 L_{N^i}, 和集 $B(i) = \bigcap_{y^i\in D^i}(\mathrm{cint}S_i^{-1}(y^i))^{\mathrm{c}}$ 是空的或紧的;

则存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i\in I} \in X$, 和 $\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i\in I} \in X$ 使得对每一 $i \in I$, $\hat{y}^i \in T_i(\hat{x}_i)$ 和 $\hat{x}_i \in G_i(\hat{y}^i)$•

证明 对每一 $i\in I$, 如果 $C(i)=\bigcap_{y_i\in E_i}(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i))^{c}=\emptyset$, 则有

$$X^i=X^i\setminus C(i)=\bigcup_{y_i\in E_i}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)\cdot \tag{2}$$

如果 $C(i)$ 是非空紧的, 由条件(ii), 有

$$C(i)\subset\bigcup_{y_i\in X_i}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)\cdot$$

因 $C(i)$ 是紧的, 存在有限集 $M_i=\left\{x_{i,0},x_{i,1},\cdots,x_{i,m_i}\right\}\in\langle X_i\rangle$ 使得

$$C(i)=\bigcap_{y_i\in E_i}(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i))^{c}\subset\bigcup_{y_i\in M_i}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)\cdot$$

由此推得

$$X^i=\bigcup_{y_i\in E_i\cup M_i}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)\cdot \tag{3}$$

因此无论 $C(i)$ 是空的或是非空紧的, (3) 式总成立• 由(iii), 存在包含 $E_i\cup M_i$ 的 X_i 的紧 FC_空间 L_{M_i}• 由(3)式有

$$X^i=\bigcup_{y_i\in L_{M_i}}\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)\cdot \tag{4}$$

类似地, 由条件(v)和(vi), 存在 $N^i\in\left\{x_0^i,x_1^i,\cdots,x_{n_i}^i\right\}\in\langle X^i\rangle$ 和包含 $D^i\cup N^i$ 的 X^i 的紧 FC_子空间 L_{N^i} 使得

$$X_i=\bigcup_{y_i\in L_{N^i}}\operatorname{cint}S_i^{-1}(y^i)\cdot \tag{5}$$

由(4)和(5), 得到

$$L_{N^i}=\bigcup_{y_i\in L_{M_i}}(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)\cap L_{N^i}), \tag{6}$$

$$L_{M_i}=\bigcup_{y^i\in L_{N^i}}(\operatorname{cint}S_i^{-1}(y^i)\cap L_{M_i})\cdot \tag{7}$$

因为 L_{N^i} 和 L_{M_i} 是紧空间, 存在 $A_i=\left\{a_{i,0},a_{i,1},\cdots,a_{i,m_i}\right\}\in\langle L_{M_i}\rangle$ 和 $B^i=\left\{b_0^i,b_1^i,\cdots,b_{n_i}^i\right\}\in\langle L_{N^i}\rangle$ 使得

$$L_{N^i}=\bigcup_{j=0}^{m_i}(\operatorname{cint}F_i^{-1}(a_{i,j})\cap L_{N^i}), \tag{8}$$

$$L_{M_i}=\bigcup_{k=0}^{n_i}(\operatorname{cint}S_i^{-1}(b_k^i)\cap L_{M_i})\cdot \tag{9}$$

定义集值映射 $F_i^*,G_i^*:L_{N^i}\to 2^{L_{M_i}}$ 和 $S_i^*,T_i^*:L_{M_i}\to 2^{L_{N^i}}$ 如下:

$$F_i^*(x^i)=F_i(x^i)\cap L_{M_i},\quad G_i^*(x^i)=G_i(x^i)\cap L_{M_i},\qquad \forall x^i\in L_{N^i}, \tag{10}$$

$$S_i^*(x_i)=S_i(x_i)\cap L_{N^i},\quad T_i^*(x_i)=T_i(x_i)\cap L_{N^i},\qquad \forall x_i\in L_{M_i}\cdot \tag{11}$$

注意到 L_{M_i} 和 L_{N^i} 分别是 X_i 和 X^i 的紧 FC_空间, 由条件(i)和(iv)易知, 对每一 $x^i\in L_{N^i}$, $G_i^*(x^i)$ 是 L_{M_i} 的关于 $F_i^*(x^i)$ 的 FC_子空间和对每一 $x_i\in L_{M_i}$, $T_i^*(x_i)$ 是 L_{N^i} 的关于 $S_i^*(x_i)$ 的 FC_子空间• 对每一 $y_i\in L_{M_i}$, 由式(10), 有

$$\begin{aligned}(F_i^*)^{-1}(y_i)&=\left\{x^i\in L_{N^i}:y_i\in F_i(x^i)\cap L_{M_i}\right\}=\\ &L_{N^i}\cap\left\{x^i\in X^i:y_i\in F_i(x^i)\right\}=L_{N^i}\cap F_i^{-1}(y_i)\cdot\end{aligned} \tag{12}$$

由式(8)和(12)推得

$$L_{N^i}=\bigcup_{j=0}^{m_i}\operatorname{cint}F_i^{-1}(a_{i,j})\cap L_{N^i}\subset\bigcup_{j=0}^{m_i}\operatorname{cint}(F_i^*)^{-1}(a_{i,j})\subset L_{N^i}\cdot$$

类似地, 由式(11)和(9)推得

$$L_{M_i} = \bigcup_{k=0}^{n_i} \mathrm{cint} S_i^{-1}(b_i^k) \cap L_{M_i} = \bigcup_{k=0}^{n_i} \mathrm{cint}(S_i^*)^{-1}(b_k^i)\cdot$$

由定理2.1,对每一$i \in I$,存在连续映射$\varphi_{A_i}: \Delta_{m_i} \to L_{M_i}$和$\psi_i: L_{N^i} \to \Delta_{m_i}$使$f_i = \varphi_{A_i} \circ \psi_i: L_{N^i} \to L_{M_i}$是$G_i^*$的连续选择和存在连续映射$\varphi_{B^i}: \Delta_{n_i} \to L_{N^i}$和$\xi_i: L_{M_i} \to \Delta_{n_i}$,使得$g_i = \varphi_{B^i} \circ \xi_i: L_{M_i} \to L_{N^i}$是$T_i^*$的连续选择· 因此我们有对每一$i \in I$,映射$\psi_i \circ \varphi_{B^i} \circ \xi_i \circ \varphi_{A_i}: \Delta_{m_i} \to \Delta_{m_i}$是连续的· 由Brouwer不动点定理,对每一$i \in I$,存在$t_i \in \Delta_{m_i}$使得$t_i = \psi_i \circ \varphi_{B^i} \circ \xi_i \circ \varphi_{A_i}(t_i)$· 令$\hat{x}_i = \varphi_{A_i}(t_i) \in L_{M_i}$和$\hat{y}^i = \varphi_{B^i} \circ \xi_i \circ \varphi_{A_i}(t_i) \in L_{N^i}$,则对每一$i \in I$,我们有,

$$\hat{x}_i = \varphi_{A_i} \circ \psi_i(\hat{y}^i) = f_i(\hat{y}^i) \in G_i^*(\hat{y}^i) \subset G_i(\hat{y}^i)$$

和
$$\hat{y}^i = \varphi_{B^i} \circ \xi_i(\hat{x}_i) = T_i^*(\hat{x}_i) \subset T_i(\hat{x}_i)\cdot$$

所以存在$\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i\in I} \in X$和$\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i\in I} \in X$使得对每一$i \in I$,$\hat{y}^i \in T_i(\hat{x}_i)$和$\hat{x}_i \in G_i(\hat{y}^i)$· 证毕·

定理3.2 令I是任何指标集,$(X_i, \Gamma_i)_{i\in I}$是一簇G_凸空间和(X^i, Γ^i)是如引理1.2中所定义的G_凸空间· 对每一$i \in I$,令$F_i, G_i: X^i \to 2^{X_i}$和$S_i, T_i: X_i \to 2^{X^i}$是集值映射,使得

(i) 对每一$x^i \in X^i$,$M_i \in \langle F_i(x^i)\rangle$蕴含$\Gamma_i(M_i) \subset G_i(x^i)$;

(ii) $X^i = \bigcup_{y_i\in X_i} \mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)$;

(iii) 存在X_i的非空子集E_i使得对每一$M_i \in \langle X_i\rangle$,存在$X_i$的包含$E_i \cup M_i$的紧G_凸子集$L_{M_i}$,和集$C(i) = \bigcap_{y_i\in E_i}(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$是空的或紧的;

(iv) 对每一$x_i \in X_i$,$N^i \in \langle S_i(x_i)\rangle$蕴含$\Gamma^i(N^i) \subset T_i(x_i)$;

(v) $X_i = \bigcup_{y^i\in X^i} \mathrm{cint} S_i^{-1}(y^i)$;

(vi) 存在X^i的非空子集D^i使得对每一$N^i \in \langle X^i\rangle$,存在$X^i$的包含$D^i \cup N^i$的紧G_凸子集$L_{N^i}$,和集$B(i) = \bigcup_{y^i\in D^i}(\mathrm{cint} S_i^{-1}(y^i))^c$是空的或紧的;

则存在$\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i\in I} \in X$和$\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i\in I} \in X$,使得对每一$i \in I$,$\hat{y}^i \in T_i(\hat{x}_i)$和$\hat{x}_i \in G_i(\hat{y}^i)$·

证明 注意到每一G_凸空间是FC_空间和G_凸空间的乘积空间也是FC_空间,由(i),对每一$i \in I$,$x^i \in X^i$和$M_i = \{x_{i,0}, \cdots, x_{i,m_i}\} \in \langle F_i(x^i)\rangle$,我们有$\Gamma_i(M_i) \subset G_i(x^i)$· 因$M_i \in \langle F_i(x^i)\rangle \subset \langle X_i\rangle$和$X_i$是G_凸空间,存在连续映射$\varphi_{M_i}: \Delta_{m_i} \to \Gamma_i(M_i) \subset G_i(x^i)$· 由定义1.1,$G_i(x^i)$是$X_i$关于$F_i(x^i)$的FC_子空间且因此定理3.1的条件(i)被满足· 类似地由条件(iv)推得定理3.1的条件(iv)被满足· 容易看出条件(iii)和(vi)蕴含定理3.1的条件(iii)和(iv)成立· 所以定理3.2的结论由定理3.1推得·

定理3.3 设I是任何指标集,$(E_i)_{i\in I}$是一簇拓扑矢量空间和对每一$i \in I$,X_i是E_i的非空凸子集· 对每一$i \in I$,令$F_i, G_i: X^i \to 2^{X_i}$和$S_i, T_i: X_i \to 2^{X^i}$是集值映射,使得

(i) 对每一$x^i \in X^i$,$M_i \in \langle F_i(x^i)\rangle$蕴含$\mathrm{co}(M_i) \subset G_i(x^i)$;

(ii) $X^i = \bigcup_{y_i\in X_i} \mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)$;

(iii) 存在X_i的非空子集E_i和包含E_i的紧凸子集P_i,使得$C(i) = \bigcap_{y_i\in E_i}(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$是空的或紧的;

(iv) 对每一$x_i \in X_i$和$N^i \in \langle S_i(x_i)\rangle$,$\mathrm{co}(N^i) \subset T_i(x_i)$;

(v) $X_i = \bigcup_{y^i\in X^i} \mathrm{cint} S_i^{-1}(y^i)$;

(vi) 存在X^i的非空子集D^i和包含D^i的紧凸子集Q^i使得$B(i) = \bigcap_{y^i\in D^i}(\mathrm{cint} S_i^{-1}(y^i))^c$是

空的或紧的;

则存在$\hat{x}=(\hat{x}_i)_{i\in I}\in X$和$\hat{y}=(\hat{y}_i)_{i\in I}\in X$使得对每一$i\in I$, $\hat{y}^i\in T_i(\hat{x}_i)$和$\hat{x}_i\in G_i(\hat{y}^i)$•

证明 对每一$i\in I$, $N_i\in\langle X_i\rangle$, 令$\Gamma_i(N_i)=\mathrm{co}(N_i)$, 则$(X_i,\Gamma_i)$变成G_凸空间• 由引理1.2, (X^i,Γ^i)也是G_凸空间• 由条件(i)~(vi), 容易检验定理3.2的条件(i)~(iv)被满足• 由定理3.2知结论成立•

注3.1 1) 如果对每一$i\in I$, F_i有非空值和F_i^{-1}在X_i上是转移紧开值的, 则定理3.1~定理3.3的条件(ii)被满足;如果S_i在X_i的每一点上有非空值和S_i^{-1}在X^i上是转移紧开值的, 则定理3.1~定理3.3的条件(v)成立(见文献[14]中的引理2.2)•

2) 如果对每一$i\in I$, X_i是紧的, 则定理3.1~定理3.3中条件(iii)和(vi)自动满足•

系3.1 令I是任何指标集, $(E_i)_{i\in I}$是一簇拓扑矢量空间和对每一$i\in I$, X_i是E_i的非空凸子集• 对$i\in I$, 令$F_i, G_i: X^i\to 2^{X_i}$和$S_i, T_i: X_i\to 2^{X^i}$是集值映射, 使得

(i) 对每一$x^i\in X^i$和$M_i\in\langle F_i(x^i)\rangle$, $\mathrm{co}(M_i)\subset G_i(x^i)$;

(ii) $X^i=\bigcup_{y_i\in X_i}\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i)$;

(iii)′ 存在X_i的非空紧凸子集P_i, 使得$C'(i)=\bigcap_{y_i\in P_i}(\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i))^c$是空的或紧的;

(iv) 对每一$x_i\in X_i$和$N^i\in\langle S_i(x_i)\rangle$, $\mathrm{co}(N^i)\subset T_i(x_i)$;

(v) $X_i=\bigcup_{y^i\in X^i}\mathrm{cint}S_i^{-1}(y^i)$;

(vi)′ 存在X^i的非空紧凸子集Q^i使得$B'(i)=\bigcap_{y^i\in Q^i}(\mathrm{cint}S_i^{-1}(y^i))^c$是空的或紧的;

则存在$\hat{x}=(\hat{x}_i)_{i\in I}\in X$和$\hat{y}=(\hat{y}_i)_{i\in I}\in X$, 使得对每一$i\in I$, $\hat{y}^i\in T_i(\hat{x}_i)$和$\hat{x}_i\in G_i(\hat{y}^i)$•

证明 仅需证明系3.1的条件(iii)′和(vi)′等价于定理3.3的条件(iii)和(vi)就足够了• 令$E_i=P_i$和$D^i=Q^i$, 则(iii)′和(vi)′蕴含条件(iii)和(vi)成立• 现在假设定理3.3的条件(iii)和(vi)成立• 任取$E_i\in\langle P_i\rangle$和$D^i\in\langle Q^i\rangle$, 则有

$$C'(i)=\bigcap_{y_i\in P_i}(\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i))^c\subset\bigcap_{y_i\in E_i}(\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i))^c=C(i),$$

$$B'(i)=\bigcap_{y^i\in Q^i}(\mathrm{cint}S_i^{-1}(y^i))^c\subset\bigcap_{y^i\in D^i}(\mathrm{cint}S_i^{-1}(y^i))^c=B(i)•$$

如果$C'(i)$和$B'(i)$不是空集, 则它们是紧集$C(i)$和$B(i)$非空闭子集且因此是紧的• 所以条件(iii)′和(vi)′成立•

系3.2 设I是任何指标集, $(E_i)_{i\in I}$是一簇拓扑矢量空间和对每一$i\in I$, X_i是E_i的非空凸子集, 对每一$i\in I$, 令$F_i, G_i: X^i\to 2^{X_i}$和$S_i, T_i: X_i\to 2^{X^i}$是集值映射, 使得

(i) 对每一$x^i\in X^i$和$M_i\in\langle F_i(x^i)\rangle$, $\mathrm{co}(M_i)\subset G_i(x^i)$;

(ii) $X^i=\bigcup_{y_i\in X_i}\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i)$;

(iii) 如果X^i不是紧的, 则存在X^i的非空紧子集$K(i)$和X_i的一紧凸子集P_i, 使得$X^i\setminus K(i)\subset\bigcup\left\{\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i): y_i\in P_i\right\}$;

(iv) 对每一$x_i\in X_i$和$N^i\in\langle S_i(x_i)\rangle$, $\mathrm{co}(N^i)\subset T_i(x_i)$;

(v) $X_i=\bigcup_{y^i\in X^i}\mathrm{cint}S_i^{-1}(y^i)$;

(vi) 如果X_i不是紧的, 则存在X_i的非空紧子集$M(i)$和X^i的紧凸子集Q^i, 使得$X_i\setminus M(i)\subset\bigcup\left\{\mathrm{cint}S_i^{-1}(y^i): y^i\in Q^i\right\}$;

则存在 $\hat{x}_i=(\hat{x}_i)_{i\in I}\in X$ 和 $\hat{y}=(\hat{y}_i)_{i\in I}\in X$,使得对每一 $i\in I$, $\hat{y}^i\in T_i(\hat{x}_i)$ 和 $\hat{x}_i\in G_i(\hat{y}^i)$•

证明　由条件(iii),对每一 $y^i\in X^i\setminus K(i)$,存在 $y_i\in P_i$,使得 $y^i\in \operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i)$ 且因此 $y^i\notin(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y_i))^c$• 且因此有 $C'(i)=\bigcap_{y_i\in P_i}(\operatorname{cint}F_i^{-1}(y^i))^c\subset K(i)$• 如果 $C'(i)$ 非空,则它是紧集 $K(i)$ 的闭子集且因此是紧的,系 3.1 的条件(iii)′成立• 类似可证,由(vi)推得系 3.1 的条件(vi)′成立,系 3.2 的结论由系 3.1 推得•

注 3.2　显然,系 3.2 的条件(iii)和(vi)比 Lin[14] 的定理 3.1 和 3.2 中的条件(iii)和(vi)更弱• 因此系 3.1 和 3.2 改进了 Lin[14] 的定理 3.1 和 3.2• 定理 3.2 将 Lin[14] 的定理 3.1 和 3.2 推广到 G_凸空间• 定理 3.1 进一步将 Lin[14] 的定理 3.1 和 3.2 推广到无任何凸性结构的一般 FC_空间•

[参　考　文　献]

[1] von Neumann J. Über ein ┕konomsiches Gleichungssystem und eine Verallgemeinering des Browerschen Fixpunktsatzes[J]. Ergeb Math Kolloq, 1937, **8**(1): 73—83.

[2] Browder F E. Coincidence theorems, minimax theorems, and variational inequalities[J]. Contemp Math, 1984, **26**: 67—80.

[3] DING Xie_ping. Coincidence theorems involving composites of acyclic mappings in contractible spaces[J]. Appl Math Lett, 1998, **11**(2): 85—89.

[4] DING Xie_ping. Coincidence theorems in topological spaces and their applications[J]. Appl Math Lett, 1999, **12**(7): 99—105.

[5] DING Xie_ping. Coincidence theorems and generalized equilibrium in topological spaces[J]. Indian J Pure Appl Math, 1999, **30**(10): 1053—1062.

[6] DING Xie_ping. Coincidence theorems involving composites of acyclic mappings and applications[J]. Acta Math Sci, 1999, **19**(1): 53—61.

[7] DING Xie_ping. Coincidence theorems with applications to minimax inequalities, section theorem and best approximation in topological spaces[J]. Nonlinear Studies, 2000, **7**(2): 211—225.

[8] DING Xie_ping, Park J Y. Continuous selection theorem, coincidence theorem, and generalized equilibrium in L_convex spaces[J]. Comput Math Appl, 2002, **44**(1/2): 95—103.

[9] Deguire P, Lassonde M. Familles s lectantes[J]. Topol Methods Nonlinear Anal, 1995, **5**(2): 261—296.

[10] Deguire P, Tan K K, Yuan G X Z. The study of maximal elements, fixed point for L_S_majorijed mappings and their applications to minimax and variational inequalities in product topological spaces[J]. Nonlinear Anal, 1999, **37**(7): 933—951.

[11] 丁协平. 乘积 G_凸空间内的 G_B_优化映象的极大元及其应用(Ⅱ)[J]. 应用数学和力学, 2003, **24**(9): 899—905.

[12] Ansari Q H, Idzik A, YAO J C. Coincidence and fixed points with applications[J]. Topol Methods Nonlinear Anal, 2000, **15**(1): 191—202.

[13] Yu Z T, Lin L J. Continuous selection and fixed point theorems[J]. Nonlinear Anal, 2003, **52**(2): 445—455.

[14] Lin L J. System of coincidence theorems with applications[J]. J Math Anal Appl, 2003, **285**(2): 408—418.

[15] DING Xie_ping. Coincidence theorems for two families of set_valued mappings on product G_convex spaces[J]. J Sichuan Normal Univ, 2004, **27**(2): 111—114.

[16] DING Xie_ping. New H_KKM theorems and their applications to geometric property, coincidence the-

orems, minimax inequality and maximal elements[J]. Indian J Pure Appl Math, 1995, **26**(1): 1—19.

[17] Park S. Continuous selection theorems in generalized convex spaces[J]. Numer Funct Anal Optim, 1999, **20**(5/6): 567—583.

[18] Horvath C D. Some results on multivalued mappings and inequalities without convexity[A]. In: Lin B L, Simons S Eds. Nonlinear and Convex Analysis[C]. New York: Marcel Dekker, 1987, 99—106.

[19] Horvath C D. Contractibility and general convexity[J]. J Math Anal Appl, 1991, **156**(2): 341—357.

[20] Park S, Kim H. Coincidence theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1996, **197**(1): 173—187.

[21] Park S, Kim H. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, **209**(2): 551—571.

[22] Tan K K, Zhang X L. Fixed point theorems on G_convex spaces and applications[J]. Nonlinear Funct Anal Appl, 1996, **1**(1): 1—19.

[23] Tarafdar E. Fixed point theorems in H_spaces and equilibrium points of abstract economies[J]. J Austral Math Soc, Ser A, 1992, **53**(1): 252—260.

System of Coincidence Theorems in Product Topological Spaces and Applications(Ⅰ)

DING Xie_ping

(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R.China)

Abstract: A new notion of finite continuous topological space(in short, FC_space) without convexity structure was introduced. A new continuous selection theorem was established in FC_spaces. By applying the continuous selection theorem, some new coincidence theorems for two families of set_valued mappings defined on product space of noncompact FC_spaces are proved under much weak assumptions. These results generalize many known results in recent literature. Some applications will be given in a follow_up paper.

Key words: system of coincidence theorems; continuous selection; transfer compact open value; FC_space