应用数学和力学, 第 26 卷 第 12 期(2005 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2005) 12_1409_08

乘积拓扑空间内的重合点组定理及应用( )

协平

(四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(我刊编委 协平来稿)

摘要: 应用( ) 中得到的定义在非紧 FC_空间的乘积空间上的两簇集值映射的重合点定理, 在 FC_空间内对矢量平衡问题组、不等式组和极小极大定理组建立了一些新的存在性定理 这些结果推广了最近文献中某些已知结果

关 键 词: 矢量平衡问题组; 极小极大不等式组; 转移紧上(下) 半连续; FC_空间; FC_拟凸

中图分类号: O177.92 文献标识码: A

1 引言和预备

对非空集 Y, 用 Y 和 2^Y 分别表 Y 的一切非空有限子集的簇和 Y 的一切子集的簇 $_n$ 是具有顶点 $\{e_0, e_1, , e_n\}$ 的标准 n_维单型 如果 J 是 $\{0, 1, , n\}$ 的非空子集, $_J$ 表顶点集 $\{e_j : j J\}$ 的凸包

对拓扑空间 X 和 Y, 称 X 的子集 A 是紧开的(紧闭的), 如果对 X 的每一非空紧子集 K, A K 在 K 内是开的(闭的) A 的紧闭包和紧内部(见文献[1,2]) 定义如下:

$$\mathrm{ccl}A = \{B X : A B \text{ 和 } B \text{ 在 } X \text{ 内是紧闭的}\},$$
$$\mathrm{cint}A = \{B X : B A \text{ 和 } B \text{ 在 } X \text{ 内是紧开的}\}$$

易知 $\mathrm{ccl}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{cint}A$

称集值映射 $T : X \quad 2^Y$ 在 X 上是转移紧闭值的(转移闭值的)(见文献[1,2]), 如果对每一 $x \quad X$ 和 $y \,/\, T(x)$, 存在 $x \quad X$ 使得 $y \,/\, \mathrm{ccl}T(x\ )$ $(y \,/\, \mathrm{cl}T(x\ ))$; 称 T 在 X 上是转移紧开值的(转移开值的), 如果对每一 $x \quad X$ 和 $y \quad T(x)$, 存在 $x \quad X$ 使得 $y \quad \mathrm{cint}T(x\ )$ $(y \quad \mathrm{int}T(x\ ))$ 对转移紧开值映射的几个等价条件, 读者可参见文献[2]

定义 1.1[3] 称 $(Y, \ _N)$ 是一有限连续空间(简称 FC_空间), 如果 Y 是一拓扑空间和对每一 $N = \{y_0, \quad , y_n\} \quad Y$, 存在连续映射 $_N : \ _n \quad Y$ 如果 A 和 B 是 Y 的两个子集, 称 B 是 Y 的关于 A 的 FC_子空间, 如果对每一 $N = \{y_0, \quad , y_n\} \quad Y$ 和对任何 $\{y_{i_0}, \quad , y_{i_k}\} \quad A$

收稿日期: 2004_10_10; 修订日期: 2005_08_17
基金项目: 四川省教育厅重点研究基金资助项目(2003A081); 四川省重点学科建设基金资助项目(0406)
作者简介: 丁协平(1938), 男, 自贡人, 教授(Tel: + 86_28_84780952; E_mail: dingxip@ sicnu.edu.cn)

$\{y_0, \quad , y_n\}$, $_N(\quad _k) \quad B$, 其中 $_k = \mathrm{co}(\{e_{i_0}, \quad , e_{i_k}\})$ 如果$A = B$, 则称 B 是Y 的 FC_子空间

定义 1. 2[4] 称$(Y, \quad)$ 是一广义凸(简称G_凸) 空间, 如果 Y 是一拓扑空间和 $: Y \quad 2^Y \setminus \{\quad\}$, 使得每一 $N = \{y_0, \quad , y_n\} \quad Y$, 存在连续映射 $_N: \quad _n \quad (N)$, 使得任何 $B = \{y_{i_0}, \quad , y_{i_k}\} \quad N$, $_N(\quad _k) \quad (B)$, 其中 $_k = \mathrm{co}(\{e_{i_j}, j = 0, 1, \quad , k\})$ 称 Y 的子集D 是G_凸的, 如果对任何 $N \quad D$, $(N) \quad D$

在本文中, 应用作者在前一篇论文( )[3] 中得到的定义在非紧 FC_空间的乘积空间上的两簇集值映射的重合点定理, 对矢量平衡问题组、不等式组和极小极大定理组在 FC_空间内建立了某些新的存在性定理 这些结果推广了最近文献中的某些已知结果

下面结果是作者在( ) 中的定理 3. 1[3]

引理 1. 1 设 I 是任何指标集, $(X_i, \quad _{N_i})_{i \quad I}$ 是一簇 FC_空间和对每一 $i \quad I$, $(X^i, \quad _{N^i})$ 是在文献[3] 的引理1. 1 内定义的FC_空间 对每一 $i \quad I$, 令 $F_i, G_i: X^i \quad 2^{X_i}$ 和$S_i, T_i: X_i \quad 2^{X^i}$ 是集值映射, 使得

( ) 对每一 $x^i \quad X^i$, $G_i(x^i)$ 是 X_i 关于$F_i(x^i)$ 的 FC_子空间;

( ) $X^i = \quad _{y_i \quad X_i} \mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)$;

( ) 存在 X_i 的非空子集E_i, 使得对每一 $M_i \quad X_i$, 存在 X_i 的包含$E_i \quad M_i$ 的紧 FC_子空间 L_{M_i} 和集 $C(i) = \quad _{y_i \quad E_i} (\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$ 是空的或紧的, 其中$(\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i))^c$ 表 $\mathrm{cint} F_i^{-1}(y_i)$ 的补集;

( ) 对每一 $x_i \quad X_i$, $T_i(x_i)$ 是 X^i 的关于$S_i(x_i)$ 的 FC_子空间;

( ) $X_i = \quad _{y^i \quad X^i} \mathrm{cint} S_i^{-1}(y^i)$;

( ) 存在 X^i 的非空子集D^i, 使得对每一 $N^i \quad X^i$, 存在 X^i 的包含$D^i \quad N^i$ 的紧 FC_子空间 L_{N^i} 和集$B(i) = \quad _{y^i \quad D^i} (\mathrm{cint} S_i^{-1}(y_i))^c$ 是空的或紧的;

则存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i \quad I} \quad X$ 和 $\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i \quad I} \quad X$ 使得对每一 $i \quad I$, $\hat{y}^i \quad T_i(\hat{x}_i)$ 和 $\hat{x}_i \quad G_i(\hat{y}^i)$

2 矢量平衡问题组

本节将在 FC_空间内对矢量平衡问题组建立某些新的平衡存在定理

定义 2. 1[5] 设 Y 和Z 是非空集和X 是一拓扑空间 令 $F: X \quad Y \quad 2^Z$ 和$C: X \quad 2^Z$ 是集值映射 称 $F(x, y)$ 在x 关于 C 是转移紧上半连续的, 如果对 X 的任何非空紧子集K 和任何 $x \quad K$, $\{y \quad Y: F(x, y) \quad C(x)\}$ 蕴含存在x 在K 内的相对开邻域$N(x)$ 和一点 $y \quad Y$, 使得对一切 $z \quad N(x)$, $F(z, y \ ) \quad C(z)$

下面结果是 Ding 和 Park[5] 的引理 2. 2

引理 2. 1 设 Y 和Z 是非空集和X 是一拓扑空间 设 $F: X \quad Y \quad 2^Z$ 和 $C: X \quad 2^Z$ 是集值映射 则 $F(x, y)$ 在x 关于C 是转移紧上半连续的, 当且仅当由 $T(y) = \{x \quad X: F(x, y) \quad C(x)\}$ 定义的映射 $T: Y \quad 2^X$ 在Y 上是转移紧闭值的

定理 2. 1 设 I 是任何指标集, $(X_i, \quad _{N_i})_{i \quad I}$ 是一簇 FC_空间, $(Z_i)_{i \quad I}$ 是一簇非空集和对每一$i \quad I$, $(X^i, \quad _{N^i})$ 是如在文献[3] 的引理1. 1 内定义的FC_空间 对每一$i \quad I$, 令 $B_i, A_i: X^i \quad X_i \quad 2^{Z_i}$, $Q_i, P_i: X^i \quad X_i \quad 2^{Z_i}$, $C_i: X^i \quad 2^{Z_i}$ 和 $D_i: X_i \quad 2^{Z_i}$ 是集值映射, 使得

(　) 对每一 $i\quad I$ 和 $x^i\quad X^i$, 集 $\left\{y_i\quad X_i: A_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)\right\}$ 是 X_i 的关于 $\left\{y_i\quad X_i: B_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)\right\}$ 的FC_子空间;

(　) $X^i = \ {}_{y_i\quad X_i}\mathrm{cint}\left\{x^i\quad X^i: B_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)\right\}$;

(　) 对每一 $i\quad I$, 存在 X_i 的非空子集 E_i, 使得对每一 $M_i\quad X_i$, 存在 X_i 的包含 $E_i\quad M_i$ 的紧 FC_子空间 L_{M_i}, 且集 $C(i) = \ {}_{y_i\quad E_i}\mathrm{ccl}\left\{x^i\quad X^i: B_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)\right\}$ 是空的或紧的;

(　) 对每一 $i\quad I$ 和 $x_i\quad X_i$, 集 $\left\{y^i\quad X^i: P_i(y^i, x_i)\quad D_i(x_i)\right\}$ 是 X^i 的关于 $\left\{y^i\quad X^i: Q_i(y^i, x_i)\quad D_i(x_i)\right\}$ 的FC_子空间;

(　) $X_i = \ {}_{y^i\quad X^i}\mathrm{cint}\left\{x_i\quad X_i: Q_i(y^i, x_i)\quad D_i(x_i)\right\}$;

(　) 存在 X^i 的非空子集 D^i 使得对每一 $N^i\quad X^i$, 存在 X^i 的包含 $D^i\quad N^i$ 的FC_子空间 L_{N^i}, 且集 $B(i) = \ {}_{y^i\quad D^i}\mathrm{ccl}\left\{x_i\quad X_i: Q_i(y^i, x_i)\quad D_i(x_i)\right\}$ 是空的或紧的;

则存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i\quad I}\quad X$ 和 $\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i\quad I}\quad X$, 使得对每一 $i\quad I$, $P_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i)\quad D_i(\hat{x}_i)$ 和 $A_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i)\quad C_i(\hat{y}^i)$

证明　对每一 $i\quad I$, 定义集值映射 $F_i, G_i: X^i\quad 2^{X_i}$ 和 $S_i, T_i: X_i\quad 2^{X^i}$ 如下:

$$F_i(x^i) = \left\{y_i\quad X_i: B_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)\right\},\qquad x^i\quad X^i;$$
$$G_i(x^i) = \left\{y_i\quad X_i: A_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)\right\},\qquad x^i\quad X^i;$$
$$S_i(x_i) = \left\{y^i\quad X^i: Q_i(y^i, x_i)\quad D_i(x_i)\right\},\qquad x_i\quad X_i;$$
$$T_i(x_i) = \left\{y^i\quad X^i: P_i(y^i, x_i)\quad D_i(x_i)\right\},\qquad x_i\quad X_i$$

则条件(　)、(　)、(　)和(　)蕴含引理1.1的条件(　)、(　)、(　)和(　)成立　由条件(　), 有

$$C(i) = \ {}_{y_i\quad E_i}(\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i))^{c} = \ {}_{y_i\quad E_i}\mathrm{ccl}(X^i \setminus F_i^{-1}(y_i)) = \ {}_{y_i\quad E_i}\mathrm{ccl}\left\{x^i\quad X^i: B_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)\right\}$$

是空的或紧的且因此引理1.1的条件(　)成立　类似地条件(　)蕴含引理1.1的条件(　)成立　由引理1.1存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i\quad I}\quad X$ 和 $\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i\quad I}\quad X$, 使得对每一 $i\quad I$, $\hat{y}^i\quad T_i(\hat{x}_i)$ 和 $\hat{x}_i\quad G_i(\hat{y}^i)$, 所以对每一 $i\quad I$, $P_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i)\quad D_i(\hat{x}_i)$ 和 $A_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i)\quad C_i(\hat{y}^i)$

定理2.2　设 I 是任何指标集, $(X_i, \ {}_{N_i})_{i\quad I}$ 是一簇FC_空间, $(Z_i)_{i\quad I}$ 是一簇非空集, 和对每一 $i\quad I$, $(X^i, \ {}_{N^i})$ 是如在文献[3]的引理1.1内定义的FC_空间　对每一 $i\quad I$, 令 $B_i, A_i, P_i, Q_i: X^i\quad X_i\quad 2^{Z_i}$ 和 $C_i: X^i\quad 2^{Z_i}$ 和 $D_i: X_i\quad 2^{Z_i}$ 是集值映射, 使得

(　) 对每一 $i\quad I$ 和 $x^i\quad X^i$, 集 $\left\{y_i\quad X_i: A_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)\right\}$ 是 X_i 的关于 $\left\{y_i\quad X_i: B_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)\right\}$ 的FC_子空间;

(　) $B_i(x^i, y_i)$ 在 x^i 关于 C_i 是转移紧上半连续的, 和对每一 $x^i\quad X^i$, 存在 $y_i\quad X_i$ 使得 $B_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)$;

(　) 对每一 $i\quad I$, 存在 X_i 的非空子集 E_i 使得对每一 $M_i\quad X_i$, 存在 X_i 的包含 $E_i\quad M_i$ 的紧 FC_空间 L_{M_i} 且集 $C(i) = \ {}_{y_i\quad E_i}\mathrm{ccl}\left\{x^i\quad X^i: B_i(x^i, y_i)\quad C_i(x^i)\right\}$ 是空的或紧的;

(　) 对每一 $i\quad I$ 和 $x_i\quad X_i$, 集 $\left\{y^i\quad X^i: P_i(y^i, x_i)\quad D_i(x_i)\right\}$ 是 X^i 的关于 $\left\{y^i\quad X^i: Q_i(y^i, x_i)\quad D_i(x_i)\right\}$ 的FC_子空间;

(　) $Q_i(y^i, x_i)$ 在 x_i 关于 D_i 是转移紧上半连续的且对每一 $x_i\quad X_i$, 存在 $y^i\quad X^i$, 使得

$Q_i(y^i, x_i) \quad D_i(x_i)$;

( ) 存在 X^i 的非空子集 D^i, 使得对每一 $N^i \quad X^i$, 存在 X^i 的包含 $D^i \quad N^i$ 的紧 FC_空间 L_{N^i}, 且集 $B(i) = {}_{y^i \quad D^i}\mathrm{ccl}\left\{x_i \quad X_i: Q_i(y^i, x_i) \quad D_i(x_i)\right\}$ 是空的或紧的;

则存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i \quad I} \quad X$ 和 $\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i \quad I} \quad X$, 使得对每一 $i \quad I$, $P_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i) \quad D_i(\hat{x}_i)$ 和 $A_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i) \quad C_i(\hat{y}^i)$

证明 对每一 $i \quad I$, 定义集值映射 $F_i: G_i: X^i \quad 2^{X_i}$ 和 $S_i, T_i: X_i \quad 2^{X^i}$ 如下:

$$F_i(x^i) = \left\{y_i \quad X_i: B_i(x^i, y_i) \quad C_i(x^i)\right\}, \qquad x^i \quad X^i;$$
$$G_i(x^i) = \left\{y_i \quad X_i: A_i(x^i, y_i) \quad C_i(x^i)\right\}, \qquad x^i \quad X^i;$$
$$S_i(x_i) = \left\{y^i \quad X^i: Q_i(y^i, x_i) \quad D_i(x_i)\right\}, \qquad x_i \quad X_i;$$
$$T_i(x_i) = \left\{y^i \quad X^i: P_i(y^i, x_i) \quad D_i(x_i)\right\}, \qquad x_i \quad X_i$$

从条件( )和引理 2.1 推得 F_i 有非空值和 F_i^{-1} 在 X^i 上是转移紧开值的 由 Lin[6] 的引理 2.2 有 $X^i = {}_{y_i \quad X_i}\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i)$, 故定理 2.1 的条件( )被满足 类似地从条件( )和引理 2.1 推得定理 2.1 的条件( ) 被满足 由定理 2.1, 定理 2.2 的结论成立

由使用 Ding[3] 的定理 3.2 和系 3.2 和使用定理 2.1 和 2.2 证明中类似的论证, 我们容易证明下面的结果:

定理 2.3 设 I 是任何指标集, $(X_i, \quad _i)_{i \quad I}$ 是一簇 G_凸空间, $(Z_i)_{i \quad I}$ 是一簇非空集, 和对每一 $i \quad I$, $(X^i, \quad ^i)$ 是乘积 G_凸空间 对每一 $i \quad I$, 令 $B_i, A_i: X^i \quad X_i \quad 2^{Z_i}$, $Q_i, P_i: X^i \quad X_i \quad 2^{Z_i}$, $C_i: X^i \quad 2^{Z_i}$ 和 $D_i: X_i \quad 2^{Z_i}$ 是集值映射, 使得

( ) 对每一 $i \quad I$ 和 $x^i \quad X^i$, $M_i \quad \left\{y_i \quad X_i: B_i(x^i, y_i) \quad C_i(x^i)\right\}$ 蕴含 $(M_i) \quad \left\{y_i \quad X_i: A_i(x^i, y_i) \quad C_i(x^i)\right\}$;

( ) $B_i(x^i, y_i)$ 在 x^i 关于 C_i 是转移紧上半连续的且对每一 $x^i \quad X^i$, 存在 $y_i \quad X_i$, 使得 $B_i(x^i, y_i) \quad C_i(x^i)$;

( ) 对每一 $i \quad I$, 存在 X_i 的非空子集 E_i 使得对每一 $M_i \quad X_i$, 存在 X_i 的包含 $E_i \quad M_i$ 的紧 G_凸子集 L_{M_i}, 且集 $C(i) = {}_{y_i \quad E_i}\mathrm{ccl}\left\{x^i \quad X^i: B_i(x^i, y_i) \quad C_i(x^i)\right\}$ 是空的或紧的;

( ) 对每一 $i \quad I$ 和 $x_i \quad X_i$, $N^i \quad \left\{y^i \quad X^i: Q_i(y^i, x_i) \quad D_i(x_i)\right\}4$ 蕴含 $\#^i(N^i) < \left\{y^i\ I\ X^i: P_i(y^i, x_i) < D_i(x_i)\right\}$;

( ) $Q_i(y^i, x_i)$ 在 x_i 关于 D_i 是转移紧上半连续的且对每一 $x_i\ I\ X_i$, 存在 $y^i\ I\ X^i$ 使得 $Q_i(y^i, x_i) < D_i(x_i)$;

( ) 存在 X^i 的非空子集 D^i 使得对每一 $N^i\ I\ 3X^i4$, 存在 X^i 的包含 $D^i\ G\ N^i$ 的紧 G_凸子集 L_{N^i} 和集 $B(i) = H_{y^i I D^i}\mathrm{ccl}\left\{x_i\ I\ X_i: Q_i(y^i, x_i) \quad D_i(x_i)\right\}$ 是空的或紧的;

则存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{iIII} X$ 和 $\hat{y} = (\hat{y}_i)_{iIII} X$, 使得对每一 $i\ I\ I$, $P_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i) < D_i(\hat{x}_i)$ 和 $A_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i) < C_i(\hat{y}^i)\#$

定理 2.4 设 I 是任何指标集, $(E_i)_{iII}$ 是一簇拓扑矢量空间# 对每一 $i\ I\ I$, X_i 是 E_i 的非空凸子集和 Z_i 是一非空集# 对每一 $i\ I\ I$, 令 $B_i, A_i: X^i @ X_i\ y\ 2^{Z_i}$, $Q_i, P_i: X^i @ X_i\ y\ 2^{Z_i}$, $C_i: X^i\ y\ 2^{Z_i}$ 和 $D_i: X_i\ y\ 2^{Z_i}$ 是集值映射, 使得

( ) 对每一 $i\ I\ I$ 和 $x^i\ I\ X^i$, $M_i\ I\ 3\left\{y_i\ I\ X_i: B_i(x^i, y_i) < C_i(x^i)\right\}4$ 蕴含 $\mathrm{co}(M_i) < \left\{y_i\ I\ X_i: A_i(x^i, y_i) < C_i(x^i)\right\}$;

( ) $B_i(x^i, y_i)$ 在 x^i 关于 C_i 是转移紧上半连续的, 且对每一 $x^i \ I \ X^i$, 存在 $y_i \ I \ X_i$, 使得 $B_i(x^i, y_i) < C_i(x^i)$;

( ) 如果 X^i 不是紧的, 则存在 X^i 的非空子集 $K(i)$ 和 X_i 的紧凸子集 P_i, 使得 $X^i \setminus K(i) < G\ \mathrm{cint}\left\{x^i \ I \ X^i: B_i(x^i, y_i) < C_i(x^i)\right\}$;

( ) 对每一 $i \ I \ I$ 和 $x_i \ I \ X_i, N^i \ I \ 3\left\{y^i \ I \ X^i: Q_i(y^i, x_i) < D_i(x_i)\right\}4$ 蕴含 $\mathrm{co}(N^i) < \left\{y^i \ I \ X^i: P_i(y^i, x_i) < D_i(x_i)\right\}$;

( ) $Q_i(y^i, x_i)$ 在 x_i 关于 D_i 是转移紧上半连续的, 且对每一 $x_i \ I \ X_i$ 存在 $y^i \ I \ X^i$, 使得 $Q_i(y^i, x_i) < D_i(x_i)$;

( ) 如果 X_i 不是紧的, 则存在 X_i 的非空紧子集 $M(i)$ 和 X^i 的紧凸子集 Q_i 使得 $X_i \setminus M(i) < G\ \mathrm{cint}\left\{x_i \ I \ X_i: Q_i(y^i, x_i) < D_i(x_i)\right\}$;

则存在 $\hat{x} = (\hat{x}_i)_{i I I} \ I \ X$ 和 $\hat{y} = (\hat{y}_i)_{i I I} \ I \ X$, 使得对每一 $i \ I \ I$, $P_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i) < D_i(\hat{x}_i)$ 和 $A_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i) < C_i(\hat{y}^i)$#

注 2.1 定理 2.4 在以下几方面改进了 Lin[6] 的定理 4.1: 1) Z 可以是任何非空集; C_i 和 D_i 可以是集值映射; 2) 条件( ) 和( ) 比 Lin[6] 的定理 4.1 中的条件(1) 和(2) 更弱; 3) 条件( ) 和( ) 等价于 Lin[6] 的定理 4.1 中的条件(3)、(4) 和(6); 4) 强制性条件( ) 和( ) 比 Lin[6] 的定理 4.1 中的强制性条件(5) 和(7) 更弱# 因此定理 2.1 和 2.2 在很弱的假设下改进和推广了 Lin[6] 的定理 4.1 到 FC_空间# 定理 2.3 改进和推广了文献 [6] 中的定理 4.1 到 G_凸空间#

3 极小极大不等式组

本节将在 FC_空间内建立新的极小极大不等式组:

定义 3.1[1] 设 Y 是一非空集和 X 是一拓扑空间# 令 $f: X @ Y \ y \ \mathrm{R}$ 是函数# 称 $f(x, y)$ 在 x 是转移紧(或转移) 上半连续的, 如果对任何 $x \ I \ X$ 和任何 $K \ I \ \mathrm{R}$, $x \ I \ \left\{u \ I \ X: f(u, y) < K\right\}$ 蕴含存在一点 $yc \ I \ Y$, 使得 $x \ I \ \mathrm{cint}\left\{x \ I \ X: f(x, yc) < K\right\}$ (或 $x \ I \ \mathrm{int}\left\{x \ I \ X: f(x, yc) < K\right\}$); 称 $f(x, y)$ 在 x 是转移紧(或转移) 下半连续的, 如果 $-f(x, y)$ 在 x 是转移紧(或转移) 上半连续的#

定义 3.2 设 (X, U_N) 是 FC_空间# 称函数 $f: X \ y \ \mathrm{R}$ 是 FC_拟凹(FC_拟凸) 的, 如果对每一 $K \ I \ \mathrm{R}$, 集 $\left\{x \ I \ X: f(x) > K\right\}$ ($\left\{x \ I \ X: f(x) < K\right\}$) 是 X 的 FC_子空间#

定义 3.3 设 $(X, \#)$ 是 G_凸空间# 称函数 $f: X \ y \ \mathrm{R}$ 是 G_凹(G_凸) 的, 如果对每一 $K \ I \ \mathrm{R}$, 集 $\left\{x \ I \ X: f(x) > K\right\}$ ($\left\{x \ I \ X: f(x) < K\right\}$) 是 X 的 G_凸子集#

定理 3.1 设 I 是任何指标集, $(X_i, U_{N_i})_{i I I}$ 是一簇 FC_空间# 对每一 $i \ I \ I$, (X^i, U_{N^i}) 是如在文献[3] 的引理 1.1 内定义的 FC_空间# 对每一 $i \ I \ I$, 令 $f_i, g_i: X^i @ X_i \ y \ \mathrm{R}$, $p_i, g_i: X^i @ X_i \ y \ \mathrm{R}$ 是函数和 $\left\{a_i\right\}_{i I I}$ 和 $\left\{b_i\right\}_{i I I}$ 是两簇实数# 假设下列条件成立:

( ) 对每一 $x^i \ I \ X^i$, 集 $\left\{y_i \ I \ X_i, f_i(x^i, y_i) > a_i\right\}$ 是 X_i 的关于 $\left\{y_i \ I \ X_i, g_i(x^i, y_i) > a_i\right\}$ 的 FC_子空间;

( ) $g_i(x^i, y_i)$ 在 x^i 是转移紧下半连续的, 且对每一 $x^i \ I \ X^i$, 存在 $y_i \ I \ X_i$, 使得 $g_i(x^i, y_i) > a_i$;

( ) 对每一 $i \ I \ I$, 存在 X_i 的非空子集 E_i, 使得对每一 $M_i \ I \ 3X_i4$, 存在 X_i 的包含 $E_i \ G \ M_i$

的 FC_子空间 L_{M_i}, 且集 $C(i)=\bigcap_{y_i\in E_i}\mathrm{ccl}\{x^i\in X^i, g_i(x^i, y_i)\le a_i\}$ 是空的或紧的;

( ) 对每一 $x_i\in X_i$, 集 $\{y^i\in X^i: p_i(y^i, x_i)<b_i\}$ 是 X^i 的关于 $\{y^i\in X^i: q_i(y^i, x_i)<b_i\}$ 的 FC_子空间;

( ) $q_i(y^i, x_i)$ 在 x_i 是转移紧上半连续的, 且对每一 $x_i\in X_i$, 存在 $y^i\in X^i$, 使得 $q_i(y^i, x_i)<b_i$;

( ) 存在 X^i 的非空子集 D^i, 使得对每一 $N^i\in\langle X^i\rangle$, 存在 X^i 的包含 $D^i\cup N^i$ 的紧 FC_子空间 L_{N^i}, 且集 $B(i)=\bigcap_{y^i\in D^i}\mathrm{ccl}\{x_i\in X_i, q_i(y^i, x_i)\ge b_i\}$ 是空的或紧的;

则存在 $\hat{x}=(\hat{x}_i)_{i\in I}\in X$ 和 $\hat{y}=(\hat{y}_i)_{i\in I}\in X$, 使得对每一 $i\in I$, $p_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i)<b_i$ 和 $f_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i)>a_i$。

证明 对每一 $i\in I$, 令 $Z_i\in\mathrm{R}$, $C_i(x^i)=(0, \infty)$ 对一切 $x^i\in X^i$ 成立和 $D_i(x_i)=(-\infty, 0)$ 对一切 $x_i\in X_i$ 成立。定义映射 $F_i, G_i: X^i\to 2^{X_i}$ 和 $S_i, T_i: X_i\to 2^{X^i}$ 如下:

$$F_i(x^i)=\{y_i\in X_i: g_i(x^i, y_i)-a_i>0\},$$
$$G_i(x^i)=\{y_i\in X_i: f_i(x^i, y_i)-a_i>0\},$$
$$S_i(x_i)=\{y^i\in X^i: q_i(y^i, x_i)-b_i<0\},$$
$$T_i(x_i)=\{y^i\in X^i: p_i(y^i, x_i)-b_i<0\}。$$

从条件( ) 推得 F_i 有非空值且 F_i^{-1} 在 X^i 上是转移紧开值的。由 Lin[6] 的引理 2.2, $X^i=\bigcup_{y_i\in X_i}\mathrm{cint}F_i^{-1}(y_i)$ 且因此引理 1.1 的条件( ) 成立。类似地, 由( ) 可以得到引理 1.1 的条件( ) 成立。容易检验引理 1.1 的一切条件被满足。由引理 1.1, 存在 $(\hat{x}_i)_{i\in I}\in X$ 和 $(\hat{y}_i)_{i\in I}\in X$, 使得对每一 $i\in I$, $\hat{y}^i\in T_i(\hat{x}_i)$ 和 $\hat{x}_i\in G_i(\hat{y}^i)$。所以对每一 $i\in I$,

$$p_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i)<b_i,\ f_i(\hat{y}^i, \hat{x}_i)>a_i。$$

注 3.1 定理 3.1 将 Lin[6] 的定理 4.2 从拓扑矢量空间推广到无任何凸性结构的 FC_空间。

定理 3.2 设 I 是任何指标集, $(X_i, \mathcal{U}_{N_i})_{i\in I}$ 是一簇 FC_空间且对每一 $i\in I$, $(X^i, \mathcal{U}_{N^i})$ 是如文献[3] 的引理 1.1 内定义的 FC_空间。对每一 $i\in I$, $f_i, g_i, p_i, q_i: X^i\times X_i\to\mathrm{R}$ 是函数。假设下列条件成立:

( ) 对每一 $i\in I$ 和 $x\in X$, $g_i(x)\le f_i(x)\le p_i(x)\le q_i(x)$;

( ) 对每一 $x^i\in X^i$, $y_i\mapsto f_i(x^i, y_i)$ 在 X_i 上是 FC_拟凹的和对每一 $x_i\in X_i$, $y^i\mapsto p_i(y^i, x_i)$ 在 X^i 上是 FC_拟凸的;

( ) $g_i(x^i, y_i)$ 在 x^i 是转移紧下半连续的和 $q_i(y^i, x_i)$ 在 x_i 是转移紧上半连续的;

( ) 如果 X^i 不是紧的, 则存在 X^i 的非空紧子集 K^i 和对每一 $M_i\in\langle X_i\rangle$ 存在 X_i 的包含 M_i 的 FC_子空间 L_{M_i}, 使得对每一 $x^i\in X^i\setminus K^i$, 存在 $y_i\in L_{M_i}$, 满足

$$x^i\in\mathrm{cint}\{z^i\in X^i: g_i(z^i, y_i)\ge\inf_{u^i\in X^i}\sup_{u_i\in X_i}g_i(u^i, u_i)\};$$

( ) 如果 X_i 不是紧的, 则存在 X_i 的非空紧子集 K_i 和对每一 $N^i\in\langle X^i\rangle$, 存在 X^i 的包含 N^i 的 FC_子空间 L_{N^i}, 使得对每一 $x_i\in X_i\setminus K_i$, 存在 $y^i\in L_{N^i}$, 满足

$$x_i\in\mathrm{cint}\{z_i\in X_i: q_i(y^i, z_i)\le\sup_{u^i\in X^i}\inf_{u_i\in X_i}q_i(u^i, u_i)\};$$

则存在 $\hat{x}=(\hat{x}_i)_{i\in I}\in X$ 和 $\hat{y}=(\hat{y}_i)_{i\in I}\in X$, 使得

$$\inf_{u^i\in X^i}\sup_{u_i\in X_i} g_i(u^i,u_i)\le f_i(\hat{y}^i,\hat{x}_i)\le p_i(\hat{y}^i,\hat{x}_i)\le \sup_{u^i\in X^i}\inf_{u_i\in X_i} q_i(u^i,u_i),\qquad \forall i\in I.$$

证明　对任给 $\varepsilon>0$ 和 $i\in I$，令

$$a_i=\inf_{u^i\in X^i}\sup_{u_i\in X_i} g_i(u^i,u_i)-\varepsilon \text{ 和 } b_i=\sup_{u^i\in X^i}\inf_{u_i\in X_i} q_i(u^i,u_i)+\varepsilon,$$

则对每一 $x^i\in X^i$，存在 $y_i\in X_i$，使得 $g_i(x^i,y_i)>a_i$ 和对每一 $x_i\in X_i$，存在 $y^i\in X^i$，使得 $q_i(y^i,x_i)<b_i$。由(　)我们有对每一 $x^i\in X^i$，$\{y_i\in X_i: g_i(x^i,y_i)>a_i\}\subset\{y_i\in X_i: f_i(x^i,y_i)>a_i\}$ 和对每一 $x_i\in X_i$，$\{y^i\in X^i: p_i(y^i,x_i)<b_i\}\subset\{y^i\in X^i: q_i(y^i,x_i)<b_i\}$。从条件(　)和定义 3.2 推得 $\{y_i\in X_i: f_i(x^i,y_i)>a_i\}$ 是 X_i 的 FC_子空间和 $\{y^i\in X^i: p_i(y^i,x_i)<b_i\}$ 是 X^i 的 FC_子空间。因此对每一 $x^i\in X^i$，集 $\{y_i\in X_i: f_i(x^i,y_i)>a_i\}$ 是 X_i 的关于 $\{y_i\in X_i: g_i(x^i,y_i)>a_i\}$ 的 FC_子空间和对每一 $x_i\in X_i$，集 $\{y^i\in X^i: p_i(y^i,x_i)<b_i\}$ 是 X^i 的关于 $\{y^i\in X^i: q_i(y^i,x_i)<b_i\}$ 的 FC_子空间，定理 3.1 的条件(　)和(　)被满足。条件(　)蕴含定理 3.1 的条件(　)和(　)成立。条件(　)和(　)蕴含定理 3.1 的条件(　)和(　)成立。由定理 3.1，存在 $\hat{x}=(\hat{x}_i)_{i\in I}\in X$ 和 $\hat{y}=(\hat{y}_i)_{i\in I}\in X$，使得对每一 $i\in I$，

$$p_i(\hat{y}^i,\hat{x}_i)<\sup_{u_i\in X_i}\inf_{u^i\in X^i} q_i(u^i,u_i)+\varepsilon,\ f_i(\hat{y}^i,x_i)>\inf_{u^i\in X^i}\sup_{u_i\in X_i} g_i(u^i,u_i)-\varepsilon.$$

因 ε 是任意的，有

$$p_i(\hat{y}^i,\hat{x}_i)\le\sup_{u_i\in X_i}\inf_{u^i\in X^i} q_i(u^i,u_i),\ f_i(\hat{y}^i,\hat{x}_i)>\inf_{u^i\in X^i}\sup_{u_i\in X_i} g_i(u^i,u_i).$$

因为 $p_i(\hat{y}^i,\hat{x}_i)\ge f_i(\hat{y}^i,\hat{x}_i)$，我们得到

$$\inf_{u^i\in X^i}\sup_{u_i\in X_i} g_i(u^i,u_i)\le f_i(\hat{y}^i,\hat{x}_i)\le p_i(\hat{y}^i,\hat{x}_i)\le \sup_{u^i\in X^i}\inf_{u_i\in X_i} q_i(u^i,u_i),\qquad \forall i\in I.$$

证毕。

注 3.2　定理 3.2 将 Lin[6] 的定理 4.3 从拓扑矢量空间推广到无任何线性结构的 FC_空间。当对每一 $i\in I$，$f_i=g_i=p_i=q_i$ 时，由定理 3.2 我们容得到 Lin[6] 的系 4.4 的推广。

定理 3.3　设 I 是任何指标集，$(X_i,\ U_{N_i})_{i\in I}$ 是一簇紧 FC_空间和对每一 $i\in I$，$(X^i,\ U_{N^i})$ 是如文献[3] 的引理 1.1 内定义的 FC_空间。对每一 $i\in I$，$f_i: X^i\times X_i\to R$ 是函数，使得

(　) 对每一 $x^i\in X^i$，$y_i\mapsto f_i(x^i,y_i)$ 是 FC_拟凹和在 X_i 上是上半连续的;

(　) 对每一 $x_i\in X_i$，$y^i\mapsto f_i(y^i,x_i)$ 是 FC_拟凸和在 X^i 上是下半连续的;

则存在 $\hat{x}=(\hat{x}_i)_{i\in I}\in X$ 和 $\hat{y}=(\hat{y}_i)_{i\in I}\in X$，使得

$$\min_{u^i\in X^i}\max_{u_i\in X_i} f_i(u^i,u_i)=f_i(\hat{y}^i,\hat{x}_i)=\max_{u^i\in X^i}\min_{u_i\in X_i} f_i(u^i,u_i),\qquad \forall i\in I.$$

证明　在定理 3.2 中对每一 $i\in I$，令 $f_i=g_i=p_i=q_i$。因每一 X_i 是紧的，定理 3.2 的条件(　)和(　)被平凡满足。因此定理 3.3 的结论由定理 3.2 推得。

注 3.3　定理 3.3 将 Lin[6] 的定理 4.5 和 Sion[7] 的极小极大定理推广到无任何凸性结构的 FC_空间和极小极大定理组。

[参 考 文 献]

[1] DING Xie_ping. New H_KKM theorems and their applications to geometric property, coincidence theorems, minimax inequality and maximal elements[J]. Indian J Pure Appl Math, 1995, 26(1): 1) 19.

[2] DING Xie_ping. Coincidence theorems in topological spaces and their applications[J]. Appl Math Lett, 1999, 12(7): 99) 105.

[3] 丁协平. 乘积拓扑空间内的重合点组定理及应用(Ñ)[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(12): 1401) 1408.

[4] Park S. Continuous selection theorems in generalized convex spaces[J]. Numer Funct Anal Optim, 1999, 20(5/6): 567) 583.

[5] DING Xie_ping, Park J Y. Generalized vector equilibrium problems in generalized convex spaces[J]. J Optim Theory Appl, 2004, 120(2): 327) 353.

[6] Lin L J. System of coincidence theorems with applications[J]. J Math Anal Appl, 2003, 285(2): 408) 418.

[7] Sion M. On nonlinear variational inequalities[J]. Pacific J Math, 1958, 8(1): 171) 176.

System of Coincidence Theorems in Product Topological Spaces and Applications ( )

DING Xie_ping
(College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R.China)

Abstract: By applying coincidence theorems in ( ) for two families of set_valued mappings defined on product space of noncompact FC_spaces in preceding paper, some new existence theorems for system of vector equilibrium problems, system of inequalities and system of minimax theorems were established in FC_spaces. These results generalize some known results in recent literature.

Key words: system of vector equilibrium problems; system of minimax inequalities; transfer compact upper (lower) semicontinuous; FC_space; FC_quasiconvex