

文章编号: 1000-0887(2005) 12-1463-07

含椭圆形夹杂的压电体平面应变问题

戴隆超, 郭万林, 余崇民

(南京航空航天大学 航空宇航学院, 南京 210016)

(岳珠峰推荐)

摘要: 利用复变函数理论, 对在无限远处均匀应力和电位移载荷作用下的含有椭圆形弹性夹杂的横观各向同性压电材料, 作了力电分析。在该文有限元结果和前人相关理论解的基础上, 提出了一个可接受的认为弹性夹杂体内的应力场为常应力场的假设。在采用了不导电边界条件之后, 获得了以复势形式表示的压电基体的和弹性夹杂体内部的应力场解。

关键词: 椭圆形夹杂; 横观各向同性; 压电体; 复势

中图分类号: O343.1 文献标识码: A

引 言

材料中总是不可避免的存在有各种缺陷, 如裂纹、孔洞、夹杂、分层和孔隙。缺陷的出现会导致应力集中, 从而致使材料的失效。在各种各样的缺陷当中, 由于椭圆形孔(或夹杂)可以退化为裂纹(或线夹杂)及圆形孔(或夹杂), 因而无论在理论上还是应用中它都是重要的一种缺陷。所以椭圆形孔(或夹杂)附近的应力场问题得到了广泛的关注。

Hwu 和 Ting^[1] 采用 Stroh 公式法以实数形式给出了含椭圆形夹杂的各向异性弹性体二维问题的解。Ting 和 Yan^[2] 也采用这一方法分析了相似的问题, 得到了以实数形式表示的孔边位移和周向应力的无穷级数解。

随着近些年来压电体的大量使用, 含椭圆孔(或夹杂)的压电体问题受到了人们的广泛关注。Sosa^[3] 采用非导电边界, 运用复变理论作了含椭圆孔的横观各向同性压电体问题的二维力电分析, 并给出了孔边相关应力电场参量的变化曲线。然而不幸的是虽然其理论解正确^[4], 但是其中的部分数值结果是错误的^[4-7], 因而其理论解与数值结果是矛盾的。Chung 和 Ting^[8] 采用 Stroh 公式法分析了含有椭圆形孔和夹杂的各向异性压电体问题二维问题。Sosa 和 Khutoryansky^[9] 采用级数展开的方法探讨了含有椭圆孔的横观各向同性压电体平面问题。Gao 和 Fan^[10] 基于复势法讨论了远场均匀载荷作用下的含有椭圆孔的横观各向同性压电体二维问题, 同时也对椭圆孔退化为裂纹时的场强因子作了分析。Zhang, Qian 和 Tong^[11] 采用 Stroh 公式法和有限元分析的方法, 研究了含有穿透椭圆孔或裂纹的无限大压电体介质。

本文运用复势法求解了含有椭圆形弹性夹杂的横观各向同性压电体二维问题, 在理论解

收稿日期: 2003_11_18; 修订日期: 2005_08_17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50275073; 10372044); 航空基金资助项目(03B5201)

作者简介: 郭万林(1960), 教授, 博士(联系人, Tel: + 86_25_84895827; E_mail: wlguo@nuaa.edu.cn)

及本文有限元计算结果的基础上,提出了一个可接受的假设,并运用非导电边界条件得到了全场应力解

1 基本公式

考虑一个远场载荷作用下的含椭圆形弹性夹杂(长轴 x 半长 a , 短轴 z 半长 b) 的横观各向同性压电体 并且,为了与相关文献^[3,9,10]进行比较,取如下假设:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zy} = \sigma_{xy} = E_y = 0,$$

并以 x_1, x_2, x_3 分别替代 x, z, y 这样,依照 Sosa^[3] 的类似过程,此时的本构方程可以简化为:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & b_{22} \\ b_{41} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{41} \\ b_{12} & b_{22} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中:

$$a_{11} = s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{11}}, \quad a_{12} = s_{13} - \frac{s_{12}s_{13}}{s_{11}}, \quad a_{22} = s_{33} - \frac{s_{13}^2}{s_{11}}, \quad b_{12} = g_{31} - \frac{s_{12}g_{31}}{s_{11}},$$

$$b_{22} = g_{33} - \frac{s_{13}g_{31}}{s_{11}}, \quad b_{41} = g_{15}, \quad c_{11} = \epsilon_{11}, \quad c_{22} = \epsilon_{33} + \frac{g_{31}^2}{s_{11}},$$

在此, s_{ij} 是弹性矩阵常数, g_{ij} 是压电矩阵常数, ϵ_{ik} 是介电矩阵常数 令 $z_k = x_1 + ikx_2$, 表示电势 因此, x_1, x_2 面内的场解可表示如下:

$$\begin{cases} \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[\frac{2}{k} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{41} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k \\ dk \end{pmatrix} \right] k(z_k), \\ D_1, D_2 = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[\begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{41} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k \\ dk \end{pmatrix} \right] k(z_k), \\ E_1, E_2 = -2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k \\ dk \end{pmatrix} \right] k(z_k), \\ u, w = 2\operatorname{Re} \sum_{k=1}^3 \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{41} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k \\ dk \end{pmatrix} \right] k(z_k), \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$\begin{cases} p_k = a_{11} \frac{2}{k} + a_{12} + b_{12} \frac{dk}{k}, \quad q_k = a_{12} \frac{2}{k} + \frac{a_{22} + b_{22} dk}{k}, \\ k = \frac{(b_{12} + b_{41}) \frac{2}{k} + b_{22}}{c_{11} \frac{2}{k} + c_{22}}, \quad dk = (c_{11} \frac{2}{k} - b_{41}) dk, \end{cases} \quad (4)$$

在此, $k(k = 1, 2, 3)$ 由如下方程决定:

$$(a_{22} + (2a_{12} + a_{44}) \frac{2}{k} + a_{11}) (c_{11} \frac{2}{k} + c_{22}) + ((b_{12} + b_{41}) \frac{2}{k} + b_{22})^2 = 0 \quad (5)$$

方程(5)共有3对共轭复根,其中虚部为正的3个根分别记为 $k(k = 1, 2, 3)$

在界面上有如下关系成立:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dx_1} = - \int_{\Gamma} t_{2s} ds = - \int_{\Gamma} t_{12} dx_2 - \int_{\Gamma} t_{21} dx_1, \\ \frac{dU}{dx_2} = \int_{\Gamma} t_{1s} ds = \int_{\Gamma} t_{11} dx_2 - \int_{\Gamma} t_{12} dx_1, \\ - \int_{\Gamma} D_n ds = - \int_{\Gamma} D_1 dx_2 - \int_{\Gamma} D_2 dx_1, \end{cases} \quad (6)$$

其中的 U 为 Airy 应力函数, t_{1s} 和 t_{2s} 是边界上的两个力

2 力电场解

当无穷远处受有均匀应力场 和电位移场 D 作用时, 可将问题分为两部分来求解: 一部分是不考虑椭圆核时的应力场, 此时基体各处的应力和电位移均为 和 D ; 另一部分是考虑椭圆核时基体的附加应力场, 此时该解必须满足无穷远处和界面上的应力和电场边界条件 为方便起见, 将用上标 表示无核时的力电参量, 表示有核时的力电参量, 上标 表示远场处的力电参量, 0 表示界面上的力电参量

2.1 不考虑夹杂时的力电场解

此时基体内的解及 Airy 应力函数可表示为

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^0, \quad D_1 = D_1^0, \quad D_2 = D_2^0, \quad (7)$$

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{22}^0 x_1^2 - \sigma_{12}^0 x_1 x_2 + \frac{1}{2} \sigma_{11}^0 x_2^2 \quad (8)$$

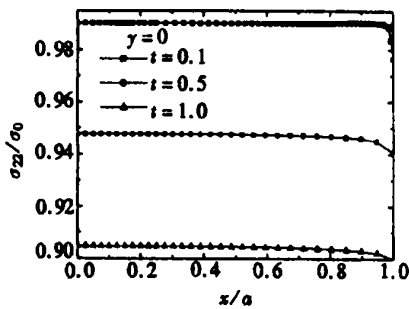
2.2 夹杂体中的应力场

Eshelby 的杰出的工作和列赫尼茨基^[12] 都已指出, 当基体为弹性材料时弹性夹杂体内的应力场为常应力场 已为人熟知的是, 当弹性夹杂体退化为孔或刚性夹杂时, 无论基体是弹性体还是压电体, 夹杂体内的各应力分量都为零 对于压电基体内嵌的椭圆形弹性夹杂, 我们运用有限元法采用四节点力电耦合 1 次单元, 求解了远场载荷 $\sigma_{22} = \sigma_{22}^0$ 作用下其内部的应力场, 得到了应力分量 σ_{22} 、 σ_{11} 的分布曲线, 而另一个应力分量 σ_{12} 总为零

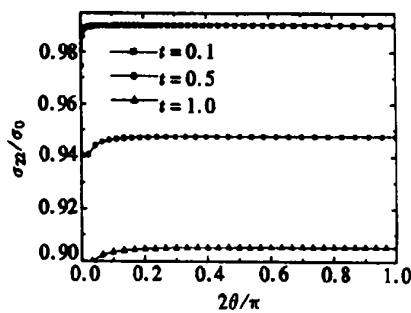
从图中可以看出, 夹杂体内的应力基本不变, 只在椭圆长轴根部由于计算误差才会稍有不同 因为在计算中采用了 1 阶单元, 所以长轴根部的计算误差会随着椭圆形状因子 $t = b/a$ 的减少而增加 因此可以认为当压电基体内嵌的夹杂体为弹性体时, 其内部应力场为常应力场这一假设是合理的

如此夹杂体内的应力场和 Airy 应力函数可表示为:

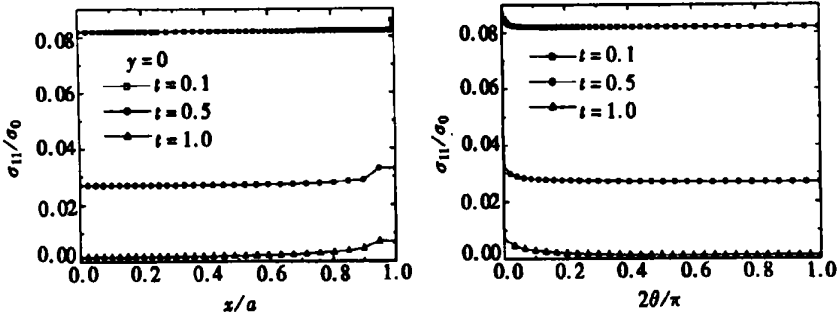
$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^0, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^0, \quad (9)$$



(a) 在 x 轴上应力 σ_z/σ_0 的变化



(b) 在椭圆界面上 σ_z/σ_0 的变化



(c) 在 x 轴上应力 σ_{11}/σ_0 的变化 (d) 在椭圆界面上 σ_{11}/σ_0 的变化

图 1 取不同形状因子 $t = b/a$ 时,无量纲化的应力在几个不同方向上的变化
(基体材料: PZT-4, 夹杂体的材料参数: $E = 202 \text{ GPa}$, $\nu = 0.33$)

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 22 & 11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x_1^2 - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x_1 x_2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 11 & 22 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x_2^2 \quad (10)$$

2.3 有核时基体中的力电场

由于核的出现,基体中会产生附加应力 此应力可由式(3)表示 因为复势 $k(z_k)$ 是全纯函数,由相关文献^[3,9,10]知它可以表示为:

$$k[z_k(z_k)] = k(z_k) = k_1 \bar{k}^n \quad (k = 1, 2, 3), \quad (11)$$

其中

$$z_k = \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - (a^2 + \frac{2}{k}b^2)}}{a - i k b} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (12)$$

在界面处应满足如下条件:

$$\begin{cases} 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 k(z_k) = \frac{1}{x_1}(U - U) + c_1, \\ 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 k(z_k) = \frac{1}{x_2}(U - U) + c_2, \\ 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 k(z_k) + \left[- \frac{D_1}{l} dx_2 - D_2 dx_1 \right] = 0; \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 p_k k(z_k) = u - u + x_2 - u_0, \\ 2\text{Re} \sum_{k=1}^3 q_k k(z_k) = w - w - x_1 - w_0 \end{cases} \quad (14)$$

上式中, e^i , c_1, c_2 是积分常数, u_0, w_0 表示刚体位移及转动, u, w 指不考虑缺陷时的相应位移, u, w 是核中的相应位移 考虑到方程(1)和变形几何方程,可得:

$$\begin{cases} u = (a_{11} \sigma_{11} + a_{12} \sigma_{22} + b_{12} D_2) x_1, & w = (a_{12} \sigma_{11} + a_{22} \sigma_{22} + b_{22} D_2) x_2; \\ u = (d_{11} \sigma_{11} + d_{12} \sigma_{22}) x_1, & w = (d_{12} \sigma_{11} + d_{22} \sigma_{22}) x_2; \end{cases} \quad (15)$$

其中 d_{ij} 是夹杂体的缩减弹性参数 将式(8)、(10)和(11)代入式(13)中可得:

$$\begin{cases} k_1 = \sum_{j=1}^3 M_{ij} Q_j \quad (k = 1, 2, 3), \\ k_n = 0 \quad (k = 1, 2, 3, n = 2), \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$Q = (Q_j) = \left[a \frac{\sigma_{22}^0 - \tau_{22}}{2} - ib \frac{\sigma_{12}^0 - \tau_{12}}{2}, -a \frac{\sigma_{12}^0 - \tau_{12}}{2} + ib \frac{\sigma_{11}^0 - \tau_{11}}{2}, -\frac{aD_2 - ibD_1}{2} \right]^T$$

通过化简可将式(16)表示为:

$$k1 = a \left[m_{k1} \frac{\sigma_{22}^0 - \tau_{22}}{2} - m_{k2} \frac{\sigma_{12}^0 - \tau_{12}}{2} - m_{k3} \frac{D_2}{2} \right] + ib \left[-m_{k1} \frac{\sigma_{12}^0 - \tau_{12}}{2} + m_{k2} \frac{\sigma_{11}^0 - \tau_{11}}{2} + m_{k3} \frac{D_1}{2} \right] \quad (k = 1, 2, 3) \quad (17)$$

再将式(11)、(15)和(17)代入式(14),就可以解出剩余的4个待定实常数: σ_{11}^0 、 σ_{12}^0 、 σ_{22}^0 、 τ_{11} 、 τ_{12} 、 τ_{22} 、 D_1 、 D_2 。考虑到参数 k 、 σ_k 、 p_k 、 q_k ($k = 1, 2, 3$) 可表示成如下形式:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= i \sigma_0, & \sigma_2 &= R + i I, & \sigma_3 &= -R + i I; \\ \tau_1 &= 0, & \tau_2 &= R + i I, & \tau_3 &= R - i I; \\ p_1 &= p_0, & p_2 &= p_R + ip_I, & p_3 &= p_R - ip_I; \\ q_1 &= iq_0, & q_2 &= q_R + iq_I, & q_3 &= -q_R + iq_I; \end{aligned}$$

其中, $\sigma_0 > 0$, $R > 0$, $I > 0$, σ_0 , R , I , p_0 , p_R , p_I , q_0 , q_R , q_I 均为实数, 其值可由式(4)确定。这样, 就可以将上面4个待定实常数表示成如下形式:

$$\begin{cases} \sigma_{11}^0 = \frac{C_{23}A_3 - C_{33}A_2}{C_{21}C_{33} - C_{23}C_{31}}, & \sigma_{22}^0 = \frac{C_{31}A_2 - C_{21}A_3}{C_{21}C_{33} - C_{23}C_{31}}, \\ \sigma_{12}^0 = \frac{C_{14}A_4 - C_{44}A_1}{C_{12}C_{44} - C_{14}C_{42}}, & \tau_{12}^0 = \frac{C_{42}A_1 - C_{12}A_4}{C_{12}C_{44} - C_{14}C_{42}} \end{cases} \quad (18)$$

其中的各系数在附录的式(A1)和式(A2)表示出来。将式(11)、(12)、(15)、(16)、(17)和(18)代入式(3)中,即可求出有椭圆核时的附加应力场。再运用叠加原理即得到基体中的应力,核中的应力已由式(7)给出。因此,远场均匀应力、电位移作用下的含有椭圆弹性夹杂的横观各向同性压电体的全部力电场解已完全获得。

3 结 论

采用复变理论,分析了在无限远处,均匀应力和电位移载荷作用下的含有椭圆形弹性夹杂的横观各向同性压电体平面应变问题。在考虑了本文有限元结果和前人相关理论解的基础上,提出了一个可接受的认为弹性夹杂体内的应力场为常应力场的假设。在采用了常用的不导电边界条件之后,获得了以复势形式表示的压电基体的和弹性夹杂体内部的应力场解。

附 录

$$C_{12} = \frac{-prf \left[b R (0 + (a + b) i) + p_0 i \left((a + b) i + b R \right) \right]}{2f \left[R (0 - R) + (0 - i) i \right]} + \frac{p \left[-(a + b) i (0 + (a + b) R) \right]}{2f \left[R (0 - R) + (0 - i) i \right]}, \quad (A1a)$$

$$C_{14} = -\frac{b}{2}, \quad (A1b)$$

$$C_{21} = \frac{ad_1 i \left[R (R - 0) + (i - 0) i \right] + b \left[(p_0 - p_R) i + p_I (-0 + R) \right]}{2f \left[R (0 - R) + (0 - i) i \right]}, \quad (A1c)$$

$$C_{23} = a \frac{p_R(L_R K_0 + L_0 K_1) - p_0(L_1 K_1 + L_R K_R) + p_1(L_1 K_0 - L_0 K_R)}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} +$$

$$ad_{12} \frac{L_R(K_R - K_0) + (L_1 - L_0)K_1}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]}, \quad (A1d)$$

$$C_{31} = b \frac{(q_0 - q_1)K_1 + q_R(K_0 - K_R) + d_{12}[L_R(K_R - K_0) + (L_1 - L_0)K_1]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]}, \quad (A1e)$$

$$C_{33} = bd_{22} \frac{L_R(K_R - K_0) + (L_1 - L_0)K_1}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} +$$

$$a \frac{p_R(-L_1 K_0 + L_0 K_R) + q_1(L_R K_0 + L_0 K_1) - q_0(L_1 K_1 + L_R K_R)}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]}, \quad (A1f)$$

$$C_{42} = \frac{-q_1[bL_R K_0 + (a + bL_0)K_1] + q_0[(a + bL_1)K_1 + bL_R K_R]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} -$$

$$\frac{q_R[(a + bL_1)K_0 - (a + bL_0)K_R]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]}, \quad (A1g)$$

$$C_{44} = \frac{a}{2} \# \quad (A1h)$$

$$A_1 = \left\{ \frac{-p_0[(a + bL_1)K_1 + bL_R K_R] + p_1[(a + bL_1)K_0 - (a + bL_0)K_R]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} + \right.$$

$$\left. \frac{p_R[bL_R K_0 + (a + bL_0)K_1]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} \right\} R_{12}^{\downarrow} + \frac{L_R(p_0 - p_R) + p_1(L_0 - L_1)}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} bD_1^{\downarrow}, \quad (A2a)$$

$$A_2 = \frac{b[(-p_0 + p_R)K_1 + p_1(K_0 - K_R)] + aa_{11}[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} R_{11}^{\downarrow} +$$

$$\left\{ \frac{-p_R(L_R K_0 + L_0 K_1) + p_0(L_1 K_1 + L_R K_R) + p_1(-L_1 K_0 + L_0 K_R)}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} + \right.$$

$$\left. a_{12} \frac{L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} \right\} aR_{22}^{\downarrow} +$$

$$\frac{L_R(-p_0 + p_R) + p_1(L_1 - L_0) + b_{12}[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} aD_2^{\downarrow}, \quad (A2b)$$

$$A_3 = \frac{(-q_0 + q_1)K_1 + q_R(-K_0 + K_R) + a_{12}[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} bR_{11}^{\downarrow} +$$

$$\left\{ a \frac{-q_1(L_R K_0 + L_0 K_1) + q_0(L_1 K_1 + L_R K_R) + q_R(L_1 K_0 - L_0 K_R)}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} + \right.$$

$$\left. ba_{22} \frac{L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} \right\} R_{22}^{\downarrow} +$$

$$\frac{a[L_R(-q_0 + q_1) + q_R(L_0 - L_1)] + bb_{22}[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} D_2^{\downarrow}, \quad (A2c)$$

$$A_4 = \left\{ \frac{-q_1[bL_R K_0 + (a + bL_0)K_1] + q_R[(a + bL_1)K_0 - (a + bL_0)K_R]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} + \right.$$

$$\left. \frac{q_0[(a + bL_1)K_1 + bL_R K_R]}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} \right\} R_{12}^{\downarrow} - \frac{L_R(q_0 - q_1) + q_R(L_1 - L_0)}{2[L_R(K_0 - K_R) + (L_0 - L_1)K_1]} bD_1^{\downarrow} \# \quad (A2d)$$

[参 考 文 献]

- [1] Hwu Chyanbin, Ting T C T. Two-dimensional problems of the anisotropic elastic solid with an elliptic inclusion[J]. Q J I Mech Appl Math, 1989, 42(4): 553-572.
- [2] Ting T C T, YAN Gong-pu. The anisotropic elastic hole or rigid inclusion[J]. Internat J Solids Structures, 1991, 27(15): 1879-1894.
- [3] Sosa Horacio. Plane problems in piezoelectric media with defects[J]. Internat J Solids Structures, 1991, 28(4): 491-505.
- [4] 戴隆超, 郭万林. 压电体椭圆孔边的力学分析[J]. 力学学报, 2004, 36(2): 224-228.

- [5] 邓其林,王自强.压电材料椭圆切口的力学分析[J].力学学报,2002,34(1):109-115.
- [6] WANG Xin_wei, ZHOU Yong, ZHOU Wan_lin. A novel hybrid finite element with a hole analysis of plane piezoelectric medium with defects[J]. Internat J Solids Structures, 2004, 41(24/25): 7111-7128.
- [7] 周勇,王鑫伟.压电材料平面裂纹尖端场的杂交应力有限元分析[J].力学学报,2004,36(3):354-358.
- [8] Chung M Y, Ting T C T. Piezoelectric solid with an elliptic inclusion or hole[J]. Internat J Solids Structures, 1996, 33(23): 3343-3361.
- [9] Sosa Horacio, Khutoryansky Naum. New developments concerning piezoelectric materials with defects[J]. Internat J Solids Structures, 1996, 33(23): 3399-3414.
- [10] GAO Cun_fa, FAN Wei_xun. Exact solutions for the plane problem in piezoelectric materials with an elliptic or a crack[J]. Internat J Solids Structures, 1999, 36(17): 2527-2540.
- [11] ZHANG Tong_yi, QIAN Cai_fu, TONG Pin. Linear electro_elastic analysis of a cavity or a crack in a piezoelectric material[J]. Internat J Solids Structures, 1998, 35(17): 2121-2149.
- [12] 列赫尼茨基 S G. 各向异性板[M]. 胡海昌译. 北京:科学出版社,1963,168) 174.

P l a n e S t r a i n P r o b l e m o f P i e z o e l a s t i c S o l i d
W i t h a n E l l i p t i c I n c l u s i o n

DAI Long_chao, GUO Wan_lin, SHE Chong_min
(College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,
Nanjing 210016, P. R. China)

Abstract: By using the complex variables function theory, a plane strain electro_elastic analysis was performed on a transversely isotropic piezoelectric material containing an elliptic elastic inclusion, which is subjected to a uniform stress field and a uniform electric displacement loads at infinity. Based on the present finite element results and some related theoretical solutions, an acceptable conjecture was found that the stress field is constant inside the elastic inclusion. The stress field solutions in the piezoelectric matrix and the elastic inclusion were obtained in the form of complex potentials based on the impermeable electric boundary conditions.

Key words: elliptical inclusion; transversely isotropic; piezoelectric; complex potential